

# Introduction à un domaine de recherche : Chirurgie de contact

Amiel Peiffer-Smadja  
encadré par  
Alexandru Oancea

17 décembre 2013

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Chirurgie</b>	<b>2</b>
2.1	Construction générale . . . . .	2
2.2	Liens avec la théorie de Morse . . . . .	3
2.3	Chirurgie de contact . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Evolution du flot de Reeb après chirurgie legendrienne</b>	<b>6</b>
3.1	Sous variétés isotropes et flot de Reeb . . . . .	6
3.2	Théorème et idée de la preuve . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Théorie de Fredholm</b>	<b>10</b>
4.1	Présentation générale . . . . .	10
4.2	Un exemple d'application . . . . .	11
4.3	Formes de contact génériques . . . . .	12

## 1 Introduction

Depuis l'article fondateur de Milnor [7] en 1961, la chirurgie est devenue un outil essentiel pour comprendre la topologie des variétés différentielles. Nous allons dans un premier temps présenter la chirurgie dans le cadre général : celui des variétés différentielles orientées. Puis nous essaierons de définir la chirurgie pour des variétés ayant une structure supplémentaire : une structure de contact, on reprendra alors l'article de Weinstein [8]. Sur ces variétés de contact, on peut définir des champs de vecteurs particuliers dits champs de Reeb. Notre but final sera de comparer les dynamiques des champs de Reeb avant et après la chirurgie notamment via l'étude de leurs orbites périodiques. Nous présenterons aussi quelques théorèmes de la théorie de Fredholm et une façon d'utiliser ces derniers pour montrer des résultats de généricité ou de transversalité.

## 2 Chirurgie

### 2.1 Construction générale

Le cadre de travail sera le suivant : on se donne une variété différentielle orientée sans bord  $M$  de dimension  $n$  et un plongement d'une sphère  $S^{k-1}$  dans  $M$ . On suppose avoir aussi une trivialisatation du fibré normal de la sphère  $TM/TS$ .

Comme le fibré normal de  $S$  est trivialisé, on peut se donner un plongement

$$S^{k-1} \times D^{n-k+1} \hookrightarrow M.$$

On va alors construire la variété  $W$  qui sera obtenue à partir  $M \times [0, 1]$  en attachant sur ce voisinage de la sphère  $S^{k-1}$  une anse d'indice  $k$  comme le montre la figure 1. Le bord de  $W$  est alors composée de deux composantes : le bord inférieur  $M \times \{0\}$  et le bord supérieur  $M'$ .

$$W = M \times [0, 1] + D^k \times D^{n-k+1}$$

$$\partial W = M \times \{0\} \sqcup M'$$

**Définition 1.** La variété  $M'$ , le bord supérieur de  $W$ , est la variété obtenue par chirurgie le long de  $S^{k-1}$  à partir de  $M$ . Elle est bien définie à difféomorphisme près.

La définition n'est correcte que si on se donne la trivialisatation du fibré normal de la sphère. En effet en grandes dimensions, il y a plusieurs façons de trivialisier ce fibré et  $M'$  dépend de cette donnée.

Une définition naturelle à donner dans ce contexte est celle de cobordisme entre variétés :

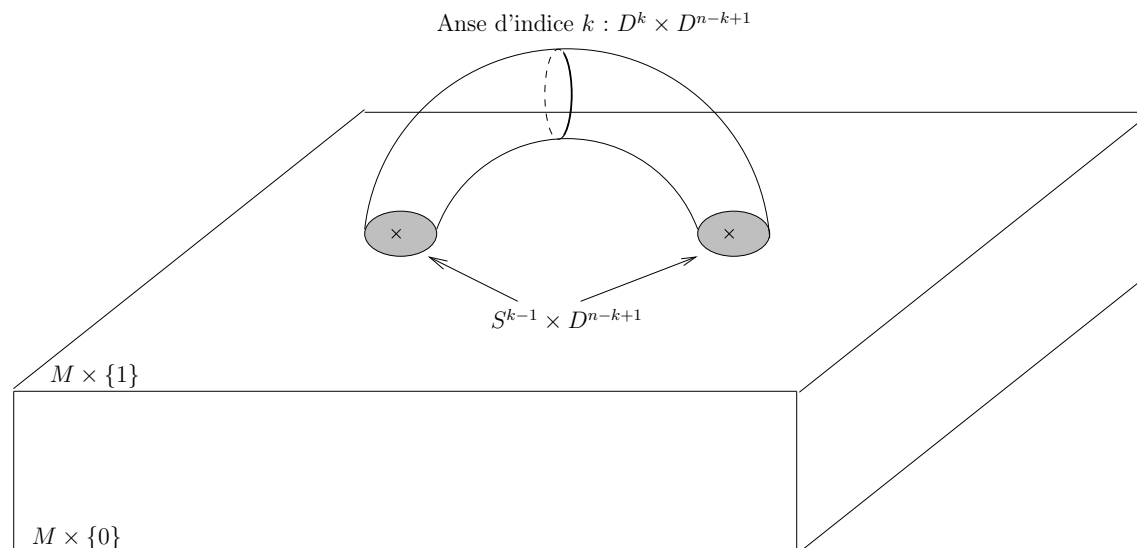


FIGURE 1 – la variété  $W$  obtenue à partir de  $M \times [0, 1]$  en attachant une anse d'indice  $k$ .

**Définition 2.** Deux variétés orientées  $M_1$  et  $M_2$  sont dites cobordantes si il existe une variété  $W$  telle que :

$$\partial W = (-M_1) \sqcup M_2.$$

On dit que  $W$  est le cobordisme entre  $M_1$  et  $M_2$ .

On remarque donc que la variété  $M'$  obtenue après chirurgie à partir de  $M$  est une variété cobordante à  $M$ . On peut finalement donner une autre description de  $M'$  sans ce cobordisme. Si on regarde explicitement le bord de  $W$ , on voit :

$$M' = (M \setminus S^{k-1} \times D^{n-k+1}) + (D^k \times S^{n-k}).$$

## 2.2 Liens avec la théorie de Morse

Dans cette partie, on va essayer de présenter une motivation à une étude précise de ce qui se passe lors d'une chirurgie. Plus précisément, on va s'intéresser à un théorème de Milnor [7] :

**Théorème 1.** *Si  $M_0$  et  $M_1$  sont cobordantes compactes, alors  $M_1$  est difféomorphe à une variété obtenue par chirurgies successives à partir de  $M_0$ .*

La preuve de ce théorème fait appel à de la théorie de Morse. On se donne un cobordisme  $W$  entre  $M_0$  et  $M_1$ . Une construction explicite dans [7] nous donne le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Il existe une fonction de Morse  $F$  sur  $W$  adaptée au cobordisme : elle vérifie*

- (i)  $F^{-1}(0) = M_0$  et  $F^{-1}(1) = M_1$ ;
- (ii) *les valeurs critiques de  $F$  sont atteintes en d'uniques points critiques non dégénérés qui sont situés à l'intérieur de  $W$ .*

Comme  $M_0$  et  $M_1$  sont compactes, on peut supposer que  $W$  est compacte et donc  $F$  n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques. On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Si  $c$  est une valeur critique d'indice  $p$ , alors  $F^{-1} ] - \infty, c + \epsilon [$  est difféomorphe à une variété obtenue en attachant une anse d'indice  $p$  sur  $F^{-1} ] - \infty, c - \epsilon [$ .*

*De plus  $F^{-1}(c + \epsilon)$  est difféomorphe à une variété obtenue à partir de  $F^{-1}(c - \epsilon)$  où on a fait une chirurgie le long d'une sphère  $S^{p-1}$ .*

On voit que le deuxième énoncé est une conséquence directe du premier et c'est à celui là qu'on va s'intéresser. Un dessin suffit pour le démontrer. On suppose que  $F$  s'écrit :

$$F(x_1, \dots, x_n) = c - x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Le lemme de Morse nous dit que cela est possible localement. Dans ce cas, on voit sur les figure 2 et 3 que  $F^{-1} ] - \infty, c + \epsilon [$  est bien difféomorphe à  $F^{-1} ] - \infty, c - \epsilon [$  où on a attaché une anse d'indice  $p$ .

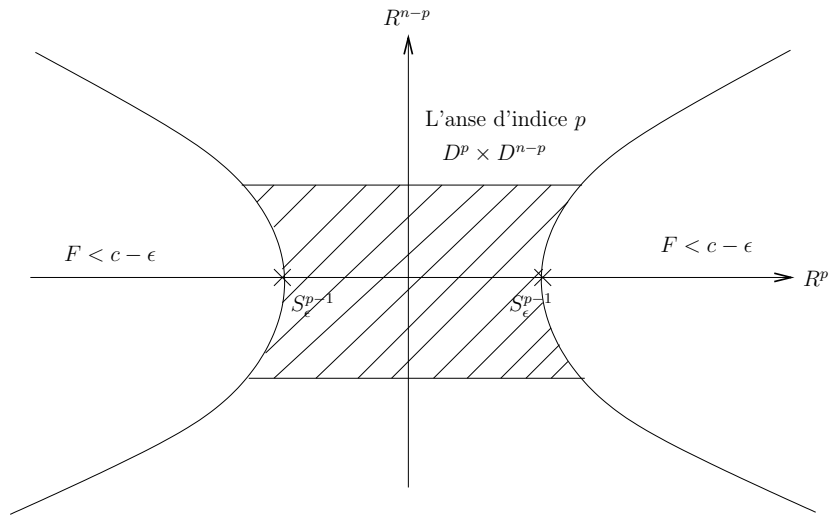


FIGURE 2 – La variété  $F^{-1} ]-\infty, c - \epsilon[$  où on a attaché une anse d'indice  $p$ .

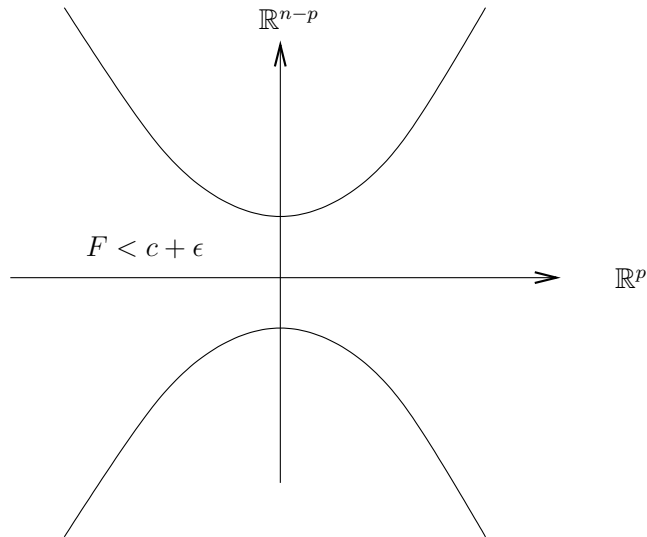


FIGURE 3 – La variété  $F^{-1} ]-\infty, c + \epsilon[$ .

## 2.3 Chirurgie de contact

Nous allons essayer d'adapter la construction de la section 2.1 sur les variétés de contact. Donnons quelques définitions dans un premier temps.

Une variété de contact est une variété  $X^{2n-1}$  munie d'un champ d'hyperplans  $\xi$  appelé structure de contact. On va demander tout d'abord que ce champ d'hyperplans soit globalement défini par une 1-forme  $\alpha$  :

$$\xi = \ker \alpha.$$

On veut aussi que ce champ d'hyperplans soit maximale non intégrable. Plus précisément, on sait d'après le théorème de Frobenius que la condition d'intégrabilité<sup>1</sup> s'écrit :  $\alpha \wedge d\alpha = 0$ . On demandera ici

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0. \quad (1)$$

La condition (1) implique que la dimension des sous-variétés tangentes à  $\xi$ , qu'on appelle sous-variétés isotropes, est forcément inférieure à  $n - 1$  (c'est dans ce sens qu'il faut comprendre la notion de non intégrabilité). Une sous-variété isotrope de dimension maximale, ici  $n - 1$ , est appelée legendrienne. Nous avons vu précédemment que la notion de cobordisme jouait un rôle central dans la construction de la chirurgie. Donnons donc une définition de cobordisme entre variétés de contact.

**Définition 3.** Un cobordisme<sup>2</sup> entre variétés de contact  $(M_0, \xi_0)$  et  $(M_1, \xi_1)$  de dimension  $2n - 1$  est un triplet  $(W, \omega, X)$  où  $W$  est une variété de dimension  $2n$ ,  $\omega$  est une 2-forme sur  $W$  et  $X$  est un champ de vecteurs sur  $W$  vérifiant

- (i)  $\partial W = M_0 \sqcup M_1$  ;
- (ii)  $\omega^n \neq 0$  et  $d\omega = 0$  ;
- (iii)  $L_X \omega = \omega$  ;
- (iv)  $X$  est transverse au bord, rentrant en  $M_0$  et sortant en  $M_1$  ;
- (v) les structures de contact sur  $M_0$  et  $M_1$  coïncident avec celles données par la 1-forme  $i_X \omega$ .

La condition (ii) nous dit que  $(W, \omega)$  est une variété symplectique, la condition (iii) que  $X$  est un champ de Liouville pour la forme symplectique  $\omega$ . On dira de plus que  $M_0$  est le bord concave de  $W$  et  $M_1$  le bord convexe. D'autre part, contrairement au cas des variétés différentielles, cette relation de cobordisme n'est pas symétrique.

Finalement, il est important de remarquer que si l'on a un cobordisme  $W$  entre deux variétés qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii) et (iv), alors ces deux variétés sont naturellement munies d'une structure de contact donnée par la 1-forme  $i_X \omega$ .

Un exemple trivial de cobordisme entre variétés de contact qui sera important dans la suite est le suivant. On prend  $(M, \xi)$  une variété de contact. Alors un cobordisme entre  $(M, \xi)$  et  $(M, \xi)$  est donné par le triplet :

$$M \times [0, 1], d(e^t \alpha), \partial_t$$

---

1. On dit qu'un champ de  $p$ -plan  $\mathcal{D}$  de  $M$  est intégrable s'il existe un feuilletage de  $M$  par des variétés de dimension  $p$  tangentes à  $\mathcal{D}$ .

2. Dans la littérature, ce type de cobordisme s'appelle un cobordisme exact. Un cobordisme non exact ne demanderait l'existence de  $X$  qu'au voisinage du bord.

où on a choisi une forme de contact  $\alpha$  sur  $M$ .

Nous avons désormais tous les outils pour définir la chirurgie de contact. Le cadre de travail cette fois ci sera le suivant : on se donne une variété de contact  $(M, \xi)$  et une sphère isotrope  $S^{k-1}$  de  $M$  (cela veut dire que  $TS \subset \xi$ ) et une trivialisation du fibré symplectique normal<sup>3</sup> de  $S$ .

On reprend alors la figure 1 et on doit juste ajouter au cobordisme  $W$  une forme symplectique et un champ de Liouville transverse au bord. On a déjà trouvé ces objets dans  $M \times [0, 1]$  par l'exemple précédent, il suffit donc de les définir dans l'anse d'indice  $k$  et de faire un recollement pour que ces objets soient définis globalement sur  $W$ . L'anse  $D^k \times D^{2n-k}$  est plongée naturellement dans  $\mathbb{R}^{2n}$  qui admet une structure symplectique classique :

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i \text{ où } \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Et on pourra trouver dans [8] une description d'un champ de Liouville qui est bien transverse au bord de  $D^k \times D^{2n-k}$  avec les bonnes directions (voir la figure 4). Pour recoller ces deux formes symplectiques, on a un théorème qui nous assure que si le fibré normal d'une sphère isotrope  $S$  d'une variété de contact  $M$  est trivialisé, alors on a des voisinages de  $S \times \{1\}$  dans  $M \times [0, 1]$  et de  $S^{k-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$  qui sont symplectomorphes et tel que le symplectomorphisme préserve les champs de Liouville. Cela nous permet d'avoir un cobordisme qui vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv). On peut donc munir  $M'$  d'une structure de contact et cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.** *Si on se donne un plongement isotrope  $S \hookrightarrow M$  et une trivialisation du fibré normal de  $S$ , alors la variété de contact  $M'$  obtenue après chirurgie le long de  $S$  est bien définie à contactomorphisme près. Si  $S$  est une sphère legendrienne (une sphère isotrope de dimension maximale), on parlera de chirurgie legendrienne.*

## 3 Evolution du flot de Reeb après chirurgie legendrienne

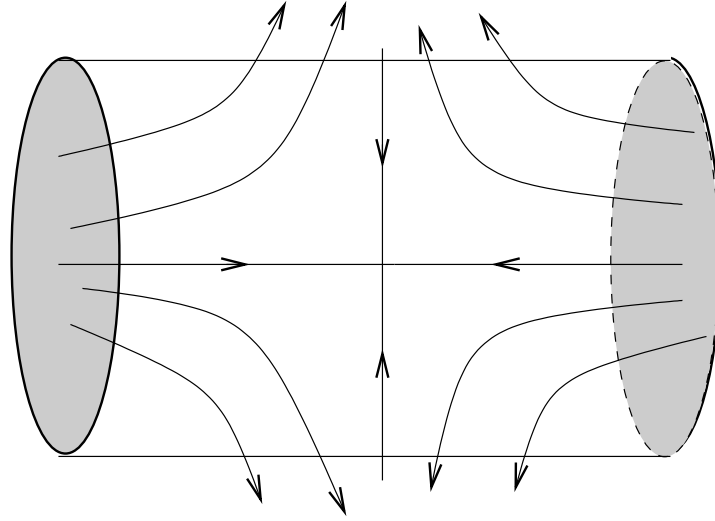
### 3.1 Sous variétés isotropes et flot de Reeb

On se rappelle que la chirurgie legendrienne consiste à remplacer dans une variété de contact un ouvert de la forme  $S^{n-1} \times D_\epsilon^n$  par  $D^n \times S_\epsilon^{n-1}$  (comme on a une forme volume sur toute variété de contact, le  $\epsilon$  est important). On remplace en fait une sphère legendrienne ( $S^{n-1} \times \{0\}$ ) par une autre sphère legendrienne ( $\{0\} \times S_\epsilon^{n-1}$ ). Nous voulons comprendre les effets de la chirurgie. Or un théorème nous assure que nous ne pourrons jamais trouver d'invariants locaux près d'une sphère legendrienne :

**Théorème 4.** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés de contact possédant respectivement deux sous variétés legendriennes  $L_1$  et  $L_2$ . Si  $L_1$  et  $L_2$  sont difféomorphes, alors il existe des voisinages de  $L_1 \subset X_1$  et de  $L_2 \subset X_2$  contactomorphes.*

---

3. Cela est l'équivalent du fibré normal en géométrie de contact. On sait que  $(\xi, d\alpha)$  est un fibré vectoriel symplectique et que  $TS \subset \xi$ . Le fibré symplectique normal de  $S$  est  $(TS)^{\perp_{d\alpha}}/TS$ . Il suffit de savoir que ce fibré est trivialisable pour garantir que le fibré normal de  $S$  est trivialisable.



■ La zone d'attachement  $S^{k-1} \times D^{2n-k}$

FIGURE 4 – Le champ de vecteurs de Liouville dans l'anse  $D^k \times D^{2n-k}$ .

Ce théorème peut s'expliquer par le fait que le fibré symplectique normal d'une variété legendrienne est automatiquement trivialisé<sup>4</sup>. Nous allons donc nous intéresser à une sorte d'invariant plus global : nous allons comparer le nombre d'orbites périodiques du flot de Reeb avant et après la chirurgie.

Les variétés de contact sont munies de champs de vecteurs particuliers qu'on appelle champs de Reeb. Une des conjectures les plus connues de la géométrie de contact les concerne d'ailleurs :

**Conjecture 1.** Tout flot de Reeb sur une variété compacte admet au moins une orbite périodique.

Pour toute forme de contact  $\alpha$ , on définit un champ de vecteurs  $R_\alpha$  qui est l'unique champ de vecteurs vérifiant

$$\begin{cases} R_\alpha \in \ker d\alpha \\ \alpha(R_\alpha) = 1. \end{cases}$$

Ce champ de vecteurs s'appelle le champ de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$ . Il préserve cette dernière car  $L_{R_\alpha}\alpha = 0$ .

On va maintenant considérer une variété de contact  $X'_\epsilon$  obtenue par chirurgie à partir de  $(X, \xi)$  le long d'une sphère  $S$  sur un voisinage de taille  $\epsilon$  (l'ouvert de chirurgie sera

---

4. On peut vérifier rapidement que le fibré symplectique normal d'une sous variété legendrienne est de dimension 0.

$S^{k-1} \times D_\epsilon^{2n-k}$ ). Si on choisit un flot de Reeb  $R$  sur  $X$ , on peut lui associer un flot  $R'_\epsilon$  sur  $X'_\epsilon$ . On sait de plus que :

$$\begin{aligned} X'_\epsilon &= \left( X \setminus S^{k-1} \times D_\epsilon^{2n-k} \right) + D^k \times S_\epsilon^{2n-k-1} \\ R'_\epsilon &= R \text{ en dehors de la zone de chirurgie.} \end{aligned}$$

On va essayer de comparer les orbites périodiques de  $R$  et de  $R'_\epsilon$  si on prend  $\epsilon$  très petit. On peut garantir que, dans des conditions génériques sur la forme de contact et le plongement legendrien, aucune orbite périodique de  $R$  ne passe dans la zone de chirurgie si elle est suffisamment petite. Comme  $R = R'_\epsilon$  en dehors de la zone de chirurgie, toutes les orbites périodiques de  $R$  survivent à la chirurgie. En particulier, on a déjà une injection triviale si  $\epsilon$  est suffisamment petit :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{orbites périodiques} \\ \text{de } R \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{orbites périodiques} \\ \text{de } R'_\epsilon \end{array} \right\}.$$

Il y a deux sortes de nouvelles orbites périodiques qu'on pourrait créer : des orbites périodiques de  $R'_\epsilon$  qui sont complètement contenues dans la zone de chirurgie ou des orbites périodiques qui rentrent et sortent de la zone de chirurgie. Pour que ces dernières existent pour  $\epsilon$  très petit, il faut qu'il existe des *cordes de Reeb* à extrémité dans  $S$  c'est à dire des segments du flot de Reeb qui relient deux points de la sphère isotrope  $S$ . Or on a le résultat suivant :

**Proposition 1.** *Si  $S^{k-1}$  est une sphère isotrope non legendrienne générique et  $R$  un champ de Reeb générique, alors il n'existe pas de corde de Reeb à extrémités dans  $S$ .*

*Si  $S^{n-1}$  est une sphère legendrienne, alors il n'y a qu'un nombre fini de cordes de Reeb à extrémités dans  $S$  de longueur bornée.*

C'est pour cette raison que du point de vue du flot de Reeb, la chirurgie legendrienne est la plus intéressante.

### 3.2 Théorème et idée de la preuve

**Théorème 5.** *Pour tout  $T > 0$ , si on fait de la chirurgie sur un voisinage  $S^{n-1} \times D_\epsilon^n$  suffisamment petit, on obtient une variété de contact  $X'_\epsilon$  munie d'un champ de Reeb  $R'_\epsilon$  dont on peut décrire explicitement toutes les orbites périodiques de période strictement inférieure à  $T$ . On a le résultat suivant qui est formulé dans [3] :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Orbites périodiques} \\ \text{de } R'_\epsilon \text{ de période } < T \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Orbites périodiques} \\ \text{de } R \text{ de période } < T \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{Mots cycliques en les} \\ \text{cordes de Reeb de } S \\ \text{de longueur totale } < T \end{array} \right\}$$

où la longueur totale d'un mot cyclique en des cordes de Reeb est tout simplement la somme des temps mis par le champ de Reeb pour parcourir toutes ces cordes.



On peut remarquer que le résultat a l'air assez faible : la variété de contact obtenue après chirurgie legendrienne n'est définie qu'à contactomorphisme près. Or le flot de Reeb dépend très fortement du choix d'une forme de contact et cette dernière n'est pas du tout définie de manière canonique. Mais cela suffit pour démontrer des résultats reliant l'homologie de contact (qui elle est invariante par contactomorphisme) avant la chirurgie et après la chirurgie. Ces résultats se trouvent dans [3].

Essayons de présenter l'idée de la démonstration : on va seulement traiter le cas d'une unique corde de Reeb et on va essayer de construire une quasi orbite périodique à partir de cette dernière. Puis il suffira d'appliquer un résultat sur les systèmes dynamiques hyperboliques (une version modifiée du "shadowing lemma") pour garantir que près de cette quasi-orbite, il existe une unique vraie orbite périodique. On peut déjà décrire explicitement  $R'_\epsilon$  :

En dehors de la zone de chirurgie,  $R'_\epsilon = R$ .

Dans  $D^n \times S_\epsilon^{n-1}$ ,  $R'_\epsilon$  est égal au flot géodésique de  $T^*D^n$ .

Ce flot géodésique est très simple :

si on entre dans  $D^n \times S_\epsilon^{n-1}$  en  $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ , on ressort en  $\begin{pmatrix} q + tp \\ p \end{pmatrix}$  avec  $\begin{cases} |q| = 1 \\ |q + tp| = 1. \end{cases}$

Donc si on a une corde de Reeb qui commence en  $a \in S$  et finit en  $b \in S$ , il suffit de la perturber légèrement pour qu'on rentre dans la zone de chirurgie près de  $b$  avec la direction qui pointe vers  $a$ . Dans ce cas on ressort de la zone de chirurgie près de  $a$  et on a quasiment trouvé une orbite périodique. Précisons cette idée : avant la chirurgie, la corde de Reeb reliant  $a$  à  $b$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ \epsilon a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de la zone de chirurgie}]{\text{flot de Reeb en dehors}} \begin{pmatrix} b \\ -\epsilon b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La quasi-orbite périodique qu'on peut créer très facilement après la chirurgie à partir de cette corde de Reeb est la suivante :

$$\begin{pmatrix} b \\ \epsilon \frac{a-b}{|a-b|} \end{pmatrix} \xrightarrow[T^*D^{n+1}]{\text{flot géodésique de}} \begin{pmatrix} a \\ \epsilon \frac{a-b}{|a-b|} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de la zone de chirurgie}]{\text{flot de Reeb en dehors}} \begin{pmatrix} b' \\ w \end{pmatrix}$$

avec  $\begin{pmatrix} b' \\ w \end{pmatrix}$  très proche de  $\begin{pmatrix} b \\ -\epsilon b \end{pmatrix}$  car on a suivi le flot de Reeb en dehors de la zone de chirurgie en partant d'un point très proche de  $\begin{pmatrix} a \\ \epsilon a \end{pmatrix}$ . Il suffira alors de choisir  $\epsilon$  suffisamment petit pour garantir que près de cette quasi-orbite périodique, il existe une unique vraie orbite périodique et cela permet de conclure la preuve du théorème.

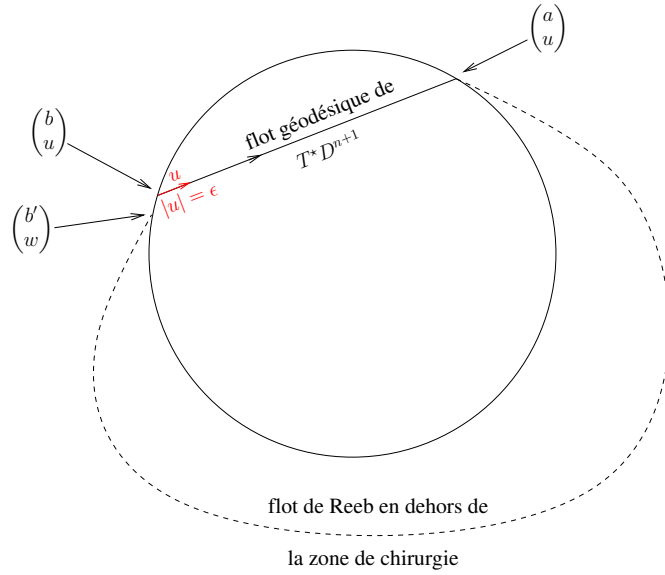


FIGURE 5 – Une quasi-orbite périodique après la chirurgie

## 4 Théorie de Fredholm

Le but de cette section est de présenter une technique classique pour montrer des résultats de généricité qui s'appuie sur la théorie des applications de Fredholm. Cette technique permet par exemple de montrer les résultats concernant les plongements génériques de sphères isotropes utilisés dans la section précédente (voir la proposition 1).

### 4.1 Présentation générale

On ne présentera que deux résultats importants de la théorie des applications de Fredholm. Une démonstration de ces résultats peut être trouvée dans [2]. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés de Banach (possiblement de dimensions infinies). Une application  $C^\infty f : M_1 \rightarrow M_2$  est dite de *Fredholm* si pour tout  $x$ , sa différentielle  $df_x$  vérifie :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(df_x)) &< \infty \\ \dim(\operatorname{coker}(df_x)) &< \infty. \end{aligned}$$

On appelle *indice* de  $f$  l'entier  $I(f) = \dim(\ker(df_x)) - \dim(\operatorname{coker}(df_x))$ . Cet indice est localement constant et donc constant si  $M_1$  est supposé connexe. On a le théorème suivant sur les applications de Fredholm :

**Théorème 6** (Sard-Smale). *L'ensemble des valeurs critiques d'une application de Fredholm est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.*

Comme  $M_1$  et  $M_2$  sont des variétés de Banach, ce sont des espaces complets donc de Baire. Donc la théorie de Baire s'applique et on peut remarquer que l'ensemble des valeurs critiques d'une application de Fredholm est d'intérieur vide. Un autre théorème concerne les valeurs régulières :

**Théorème 7.** Soit  $f$  une application de Fredholm entre  $M_1$  et  $M_2$ . Alors pour tout  $y \in M_2$  valeur régulière de  $f$ ,  $f^{-1}(y)$  est une sous variété de  $M_1$  de dimension finie  $I(f)$ . Son espace tangent en  $x$  est  $\ker(df_x)$ .

## 4.2 Un exemple d'application

**Théorème 8.** Une courbe  $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$  générique est injective.

On va démontrer que les courbes non injectives sont les valeurs critiques d'une application de Fredholm et cela permettra de conclure. On remarque que  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$  est une variété de Banach. On va considérer le diagramme suivant (on dénote  $\Delta$  la diagonale de  $[0, 1]^2$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{R}^3 \\
 & & \uparrow s \\
 s^{-1}(0) \subset & \longrightarrow & \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3) \times [0, 1]^2 \setminus \Delta \\
 \downarrow \pi & & \\
 \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3) & & 
 \end{array}$$

La preuve va se faire en trois étapes :

- 1) Nous allons montrer que 0 est une valeur régulière de  $s$ . Cela permettra d'affirmer que  $s^{-1}(0)$  est une variété de Banach.
- 2) On montrera alors que  $\pi$  est une application de Fredholm dont toutes les valeurs sont critiques. Donc l'image de  $\pi$  est un ensemble maigre au sens de Baire<sup>5</sup>.
- 3) On verra que l'image de  $\pi$  est exactement composée des courbes non simples de  $\mathbb{R}^3$  et le théorème de Sard-Smale permet alors de conclure.

### Définition de $s$ et de $\pi$ .

$$\begin{aligned}
 \text{On définit } s(\gamma, a, b) &= \gamma(a) - \gamma(b), \\
 \pi(\gamma, a, b) &= \gamma.
 \end{aligned}$$

On sait de plus que l'espace tangent à  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$  en  $\gamma$  est

$$\Gamma(\gamma^*T\mathbb{R}^3) = \{X : [0, 1] \rightarrow T\mathbb{R}^3 \text{ tel que } X(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3\}.$$

On peut donc calculer la différentielle de  $s$  :

$$ds_{\gamma, a, b}(X, A, B) = A\dot{\gamma}(a) - B\dot{\gamma}(b) + X(a) - X(b).$$

Il est alors clair que  $ds$  est surjective : on peut choisir  $A = B = 0$  et  $X$  convenable (comme  $a \neq b$ , on peut prendre une application  $X$  telle que  $X(a)$  soit quelconque et  $X(b) = 0$ ). Donc  $s^{-1}(0)$  est une variété de Banach.

---

5. Un ensemble maigre est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

### Caractère Fredholm de $\pi$ .

On sait que si  $s(\gamma, a, b) = 0$ , alors

$$T_{\gamma, a, b} s^{-1}(0) = \ker ds_{\gamma, a, b}.$$

D'autre part pour  $(X, A, B) \in T_{\gamma, a, b} s^{-1}(0)$ ,  $d\pi(\gamma, a, b) \cdot (X, A, B) = X$ .

Il est clair que le noyau de  $d\pi$  est de dimension finie en tout point. L'image de  $d\pi$  est l'ensemble des  $X$  tels qu'il existe  $A$  et  $B$  tels que  $X(a) - X(b) = B\dot{\gamma}(b) - A\dot{\gamma}(a)$ .

$$\text{Donc } \text{coker}(d\pi) \approx \mathbb{R}^3 / \text{Vect}(\dot{\gamma}(a), \dot{\gamma}(b)) = F$$

$$\text{car l'application } \phi : \begin{cases} \text{coker}(d\pi) \rightarrow F \\ X \mapsto X(a) - X(b) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Cela nous assure que le conoyau de  $d\pi$  est de dimension finie et qu'il n'est jamais nul. Donc toutes les valeurs de  $\pi$  sont critiques. L'étape 3 est évidente : l'image de  $\pi$  est exactement l'ensemble des courbes non simples. On a démontré le résultat.

On peut finalement remarquer que le résultat est encore vrai si on remplace  $\mathbb{R}^3$  par n'importe quelle variété de dimension 3. On a fait cette hypothèse de travail pour simplifier la preuve et les notations.

### 4.3 Formes de contact génériques

**Théorème 9.** *Pour une forme de contact générique, toutes les orbites du champ de Reeb associé à la forme de contact sont non dégénérées.*

On dit en général qu'une orbite périodique d'un flot  $\varphi_T^X$  est non dégénérée si l'espace propre de  $d\varphi_T^X$  associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Dans le cas du flot de Reeb, cette condition se précise. Ce dernier préserve la forme  $\alpha$  et donc si on note  $\varphi_t^R$  le flot de Reeb et on choisit  $x$  tel que  $\varphi_t^R(x) = x$ , alors

$$d(\varphi_T^R) \cdot R(x) = R(x).$$

Cependant comme  $\varphi_T^R$  préserve la forme  $\alpha$ , il préserve aussi la structure de contact  $\xi$  et donc

$$d\varphi_T^R : \xi_x \longrightarrow \xi_x.$$

On demande alors que cette dernière application n'a pas 1 comme valeur propre pour dire que l'orbite est non dégénérée (et on peut vérifier que cela est bien la condition de non dégénérescence classique). On peut dorénavant commencer la preuve du théorème 9.

Si on se donne une forme de contact  $\alpha$  sur une variété de contact  $(M, \xi)$ , toute autre forme de contact est de la forme  $f\alpha$  où  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^{+*})$ . On va plutôt travailler avec des  $f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{+*})$  car on veut travailler sur des variétés de Banach. On définit

$$\text{une variété de Banach } B = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{+*}) \times \left\{ (\gamma, T) \mid \gamma \in \mathcal{C}^k([0, T], M), \gamma(0) = \gamma(T) \right\}$$

$$\text{et un fibré vectoriel } \mathcal{E} \text{ sur } B : \mathcal{E}_{\gamma, T, f} = \Gamma(\gamma^* TM).$$

On va prendre  $s$  une section du fibré  $\mathcal{E}$  et on note  $\pi$  la première projection de  $s^{-1}(0)$  dans  $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{+*})$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{E} \\
 & & \uparrow s \\
 s^{-1}(0) & \hookrightarrow & B \\
 \downarrow \pi & & \\
 \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}^{+*}) & & 
 \end{array}$$

On va démontrer que :

- 1)  $s$  est transverse à la section nulle. Cela implique que  $s^{-1}(0)$  est une sous variété de Banach de  $B$ .
- 2)  $\pi$  est une application de Fredholm.
- 3) Si le flot de Reeb de  $f\alpha$  possède une orbite périodique dégénérée alors  $f$  est une valeur critique de  $\pi$ .

Il suffira alors d'appliquer le théorème de Sard-Smale pour conclure.

$$\begin{aligned}
 \text{On définit } s(f, \gamma, T)(t) &= \dot{\gamma}(t) - R^{f\alpha} \circ \gamma(t), \\
 \pi(f, \gamma, T) &= f.
 \end{aligned}$$

Les vérifications des étapes 1), 2) et 3) sont laissées au lecteur. Elles sont effectuées dans mon mémoire de M2.

## Références

- [1] Arnol'd V. : *Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations*, Progress of Mathematics, Vol. 133, pages 99-104, 1995
- [2] Audin M., Damian M. : *Théorie de Morse et homologie de Floer*, CNRS Editions, 2010
- [3] Bourgeois F., Ekholm T., Eliashberg Y. : *Effect of Legendrian surgery*, Geometry and Topology, Vol. 16, 2012
- [4] Geiges H. : *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge studies in advanced mathematics, 2008
- [5] Katok A., Hasselblatt B. : *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge university press, 1997
- [6] McDuff D., Salamon D. : *Introduction to Symplectic topology*, Oxford science publications
- [7] Milnor J. : *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III, 1961
- [8] Weinstein A. : *Contact surgery and symplectic handlebodies*, Hokkaido Mathematical Journal, 1991