

Introduction au domaine de recherche Singularités en analyse géométrique : Flot de Ricci et Équations d'Einstein

Tristan OZUCH-MEERSSEMAN

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Bases de géométrie riemannienne	2
1.2	Variétés d'Einstein	3
1.3	Flots de Ricci	4
1.4	Convergence de Gromov-Hausdorff	5
1.5	Singularités	5
2	Éviter les singularités	6
2.1	Variétés d'Einstein à courbure bornée	6
2.2	Flots de Ricci non-singuliers	6
2.2.1	En dimension 2	6
2.2.2	En courbure positive	6
2.2.3	Flot de Ricci non-singuliers en dimension 3 : un pas vers la géométrisation de Thurston	7
3	Étudier la formation des singularités	8
3.1	Regarder les singularités avec la bonne loupe : Éclatement	8
3.2	Dégénérescence de variétés d'Einstein	8
3.2.1	En dimension 4 : Apparition d'orbifolds d'Einstein	8
3.2.2	En dimension quelconque : Singularités de codimension ≥ 4	9
3.3	Éclatement parabolique de flots de Ricci	9
3.3.1	En dimension 3 : Théorème des voisinages canoniques	9
4	Résoudre certaines singularités	10
4.1	Désingularisation d'orbifolds d'Einstein	10
4.2	Singularités du flot de Ricci	11
4.2.1	Flot de Ricci avec chirurgies	11
4.2.2	Singularités coniques et solitons	11
4.2.3	Flots de Ricci à courbure scalaire bornée	11

1 Introduction

L'analyse géométrique est un domaine très actif des mathématiques qui se situe à l'interface de la géométrie, de l'analyse et de la topologie. Cette spécialité est principalement représentée en géométrie riemannienne, mais ses techniques sont aussi importantes en géométrie moins "lisse" (finlérienne, métrique) ou plus "lisse" (complexe, kählerienne).

On peut résumer ce qui relève de l'analyse géométrique comme étant l'étude des tenseurs issus de la géométrie riemannienne (ou leurs généralisations) grâce à des techniques d'analyse.

Les techniques d'analyse géométrique ont aussi de nombreuses applications en physique (notamment en relativité générale), dans d'autres domaines des mathématiques comme la topologie ou certains aspects de la géométrie algébrique.

L'objectif de la géométrie riemannienne est actuellement de comprendre les relations entre la géométrie locale ou même infinitésimale d'un espace (par exemple, ses différentes notions de courbures) et sa topologie.

Dans cet exposé, nous allons nous focaliser sur un aspect important de l'analyse géométrique : l'analyse des "singularités".

Le terme est imprécis car il aura un sens différent dans chaque cas, mais l'idée est toujours la même : une singularité correspond à une perte de régularité ou l'explosion d'une quantité géométrique donnée.

Les aspects de l'analyse des singularités présentés seront à chaque fois accompagnés d'exemples de théorèmes adaptés à l'étude de deux classes d'objets importants de l'analyse géométrique :

Les variétés d'Einstein qui sont des objets statiques, solutions d'une équation "elliptique", et les flots de Ricci qui sont des objets dynamiques (des flots géométriques), solutions d'une équation "parabolique".

1.1 Bases de géométrie riemannienne

Commençons par donner quelques notions de bases de géométrie riemannienne. Pour une bonne introduction à la géométrie riemannienne, une des références du domaine est [Pet].

Définition 1.1. (M, g) est une **variété riemannienne** si M est une variété différentielle et

$$g : x \in M \mapsto g_x \in \text{Sym}_{++}^2(T_x M),$$

où $\text{Sym}_{++}^2(T_x M)$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives sur $T_x M$ l'espace tangent à M en x .

Cela permet de définir une distance et des angles sur la variété.

Moralement, cela signifie que notre variété est en tout point infinitésimalement euclidienne : à cette échelle, les distances viennent d'un produit scalaire. Plus précisément, on définit les longueurs de courbes comme dans le cas euclidien en remplaçant la norme de la vitesse $|\gamma'(t)|$ par la norme infinitésimale induite par $g_{\gamma(t)}$ au point concerné :

La **longueur** $L(\gamma)$ d'une courbe γ est donnée par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt,$$

où γ' est la dérivée de γ .

La distance entre deux points est alors définie comme l'infimum des longueurs des courbes reliant ces points entre eux.

Cette définition d'espace riemannien généralise la notion de surface lisse dans l'espace muni de la distance induite par les courbes contenues dans la surface elle-même. Cela leur donne une structure d'espace métrique qui nous intéresse.

Remarque 1.1. En fait, les deux notions sont équivalentes, d'après un théorème de Whitney n'importe quelle variété riemannienne peut être plongée isométriquement dans un espace euclidien de dimension assez grande.

Définition 1.2. Le **tenseur de courbure** est un objet géométrique sur la variété noté Rm tel que si X, Y et Z sont des champs de vecteurs, $Rm(X, Y)Z$ en est aussi un.

C'est moralement la hessienne de la métrique $x \mapsto g_x$: dans de bonnes coordonnées locales une métrique à courbure bornée se comportera comme une fonction C^2 .

Plus précisément, en coordonnées géodésiques $(x_i)_i$ centrées en 0, dans une base $(e_i)_i$ de l'espace tangent, la métrique s'écrit, comme une matrice :

$$g(x)_{i,j} = \delta_{i,j} + \sum_{k,l} g(0)(Rm(e_i, e_k)e_l, e_j)x_k x_l + o(|x|^2)$$

$\delta_{i,j}$ correspondant à la matrice identité. Cette quantité s'annule exactement quand l'espace est localement euclidien (plat), le tenseur de courbure mesure à quel point la variété que l'on étudie n'est pas "plate".

Ce tenseur comporte en un certain sens trop d'information : imposer des conditions sur ce tenseur de courbure correspond souvent à des cas qui ne peuvent apparaître ou qui sont suffisamment peu nombreux pour se réduire à des espaces évidents bien connus. Par exemple, supposer ce tenseur constant ne laisse le choix qu'entre trois géométries bien connues :

1. Hyperbolique si la courbure est négative.
2. Euclidienne (ou plate) si la courbure est nulle.
3. Sphérique si la courbure est positive.

Définition 1.3. Le **tenseur de courbure de Ricci** notée Ric est, une forme bilinéaire symétrique (tout comme la métrique g) définie comme la trace du tenseur de courbure. C'est donc une moyenne de l'information contenue dans le tenseur de courbure. Ce tenseur peut être interprété comme le laplacien de la métrique :

En coordonnées locales dites "harmoniques", il prend la forme :

$$\text{Ric} = -\frac{1}{2}\Delta g + Q(g, \partial g),$$

où Q est quadratique en ∂g .

A partir de la dimension 4, une courbure de Ricci constante (condition d'Einstein) correspond à une large classe de variétés. Ces métriques peuvent même dégénérer en des espaces qui ne sont plus des variétés riemanniennes.

La courbure de Ricci est aussi une quantité intéressante par le fait qu'en plus de contrôler la géométrie d'une variété, elle contrôle aussi l'analyse qui se fait dessus :

Une borne inférieure (au sens des formes bilinéaires symétriques) du type $\text{Ric} \geq \lambda g$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ implique que les volumes des boules de rayon r ont un comportement contrôlé par celle d'un espace de courbure constante qui est selon le signe de λ une des trois géométries sphérique, hyperbolique ou plate.

Du point de vue analytique, cela implique que les espaces ayant une borne inférieure sur leur courbure de Ricci sont "doublants" et qu'il est donc possible d'utiliser la plupart des techniques classiques d'analyse harmonique.

Définition 1.4. La **courbure scalaire** notée R est un scalaire défini comme la trace de la courbure de Ricci. C'est une moyenne de la courbure de Ricci sur ses différentes directions.

La courbure scalaire contrôle le volume à petite échelle (comparé à celui de l'espace euclidien) :

$$\frac{\text{vol}(B_p(\epsilon)) \in M}{\text{vol}(B_0(\epsilon)) \in \mathbb{R}^n} = 1 - \frac{R(g(p))}{6(n+2)}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

La courbure scalaire est plus faible, elle n'impose pas grand chose sur la métrique dont elle provient, par exemple, toute variété différentielle admet une métrique de courbure scalaire constante, et même plus fort, d'après la résolution du problème de Yamabe par Richard Schoen [Sch] (finissant les travaux de Yamabe, Trudinger et Aubin), dans toute classe conforme de métriques il existe une métrique de courbure scalaire constante.

Elle ne contrôle pas vraiment la géométrie au delà d'une échelle locale.

1.2 Variétés d'Einstein

Définissons le premier objet qui sera notre exemple de solution d'équation statique.

Définition 1.5. Une **variété d'Einstein** est une variété riemannienne pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{Ric}(g) = \lambda g.$$

Cette équation vient de la physique, mais correspond aussi à une condition naturelle à rechercher sur une métrique. Rechercher un comportement donné sur le tenseur de courbure entier qui a une grande *rigidité* ne correspond qu'à très peu de géométries. Pour la courbure scalaire, c'est le contraire, c'est une condition très *souple* et donne donc beaucoup solutions, souvent trop pour être étudiées. La situation intermédiaire de la courbure de Ricci constante apparaît comme bien plus intéressante.

En dimension 2, toutes les courbures se confondent et toute surface admet une métrique d'Einstein dite canonique.

Théorème 1.2. Etant donnée une surface fermée Σ , il existe une métrique à courbure constante sur la variété dont le signe ne dépend que de la topologie de la surface Σ .

Notons γ_Σ le genre de Σ (le nombre de trous dans la surface) on a plus particulièrement :

1. Si $\gamma_\Sigma = 0$, alors il existe une métrique g de courbure positive sur Σ . C'est le cas de la sphère.
2. Si $\gamma_\Sigma = 1$, alors il existe une métrique g de courbure nulle sur Σ . C'est le cas du tore.
3. Si $\gamma_\Sigma = 2$, alors il existe une métrique g de courbure négative Σ . C'est le cas des surfaces à au moins deux trous.

Remarque 1.3. En dimension 3 et 4, il existe des contraintes topologiques grâce auxquelles on sait que certaines variétés différentielles ne peuvent pas être équipées de métriques d'Einstein. Le problème est ouvert en dimension supérieure à 5, on ne sait pas à quel point la condition d'Einstein est restrictive.

Du point de vue variationnel, ces métriques sont des points critiques de l'action d'Einstein-Hilbert :

$$\mathcal{E}_{EH}(g) = \int_M R(g) dvol(g).$$

Mais aussi des minimiseurs d'autres quantités intégrales, normes L^2 de différentes courbures.

Comme la courbure de Ricci peut être interprétée comme le laplacien de la métrique, c'est une équation parabolique (à difféomorphismes près) analogue par exemple à l'équation de Laplace,

$$\Delta u = 0,$$

qui minimise l'énergie :

$$\mathcal{E}(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv$$

Proposition 1.4. Les métriques d'Einstein sont analytiques.

Idées de preuve 1. C'est une conséquence des différents théorèmes de régularité elliptique.

1.3 Flots de Ricci

Le flot de Ricci est une équation d'évolution d'une métrique dans la direction de sa courbure de Ricci. C'est une équation d'évolution très importante qui est devenue depuis son introduction par Hamilton en 1982 un outil central de l'analyse géométrique.

Définition 1.6. Un **flot de Ricci** sur $M \times I$ (où M est une variété et I un intervalle de \mathbb{R} interprété comme un intervalle de temps) est une famille de métriques $(g_t)_{t \in I}$ satisfaisant l'équation d'évolution suivante :

$$\partial_t g_t = -2\text{Ric}(g_t)$$

En coordonnées harmoniques, cela correspond à l'équation suivante :

$$\partial_t g = \Delta g + Q(g, \delta g)$$

C'est en fait la version parabolique de l'équation $\text{Ric}(g) = 0$, exactement comme l'équation de la chaleur, $\partial_t u = \Delta u$, est la version parabolique de l'équation de Laplace, $\Delta u = 0$, et est le flot de gradient de l'énergie $\mathcal{E}(u)$ (c'est-à-dire le flot normalisé qui fait diminuer cette quantité à la plus grande vitesse).

Vue comme une sorte d'équation de la chaleur, on s'attend à ce que cette équation d'évolution ait de nombreuses bonnes propriétés et "améliore" la géométrie de notre espace au cours du temps et converge vers une métrique "idéale". En particulier, l'objectif initial était vraisemblablement la construction de variétés d'Einstein comme l'équation de la chaleur peut être utilisée pour construire des fonctions harmoniques.

Cette équation peut être vue comme une équation de diffusion sur la métrique couplée avec un terme $Q(g, \delta g)$ quadratique en δg .

Les différentes courbures ont aussi des évolutions similaires, avec un terme de diffusion et un terme quadratique (qui crée des singularités) :

$$\partial_t \text{Rm} = \Delta \text{Rm} + \tilde{Q}(\text{Rm})$$

Proposition 1.5. Soit $(M, (g_t)_t)$, un flot de Ricci sur un intervalle $[a, b]$. La variété (M, g_t) est analytique pour tout $t > a$, peu importe la régularité initiale. (la métrique est lissée)

Idées de preuve 2. C'est une conséquence des différents théorèmes de régularité parabolique.

Exemple 1.6. Soit g_0 une variété d'Einstein :

$$\text{Ric}(g_0) = \lambda g_0$$

Le flot de Ricci n'évolue alors que par changement d'échelle :

$$g_t = (1 - 2\lambda t)g_0$$

On peut donc considérer les métriques d'Einstein comme des points fixes du flot de Ricci à changement d'échelle près.

Remarque 1.7. Les métriques courbées positivement se contractent jusqu'à disparaître, les courbées négativement s'expandent et celles ayant une courbure de Ricci nulle sont de vrais points fixes du flot.

1.4 Convergence de Gromov-Hausdorff

Définissons la notion de convergence adaptée aux espaces métriques : la distance de Gromov-Hausdorff.

Définition 1.7. Soit $A_1 = (X_1, d_1, p_1)$ et $A_2 = (X_2, d_2, p_2)$ des espaces métriques pointés ($p_i \in X_i$). On définit $d_{GH}(A_1, A_2)$, la **distance de Gromov-Hausdorff** entre les deux espaces métriques pointés comme :

$$\inf_B (\inf_{f_1, f_2} d_H^B(f_1(A_1), f_2(A_2)))$$

où d_H^B est la distance de Hausdorff sur B et où les inf sont pris sur les $B = (X, d, p)$, espace métrique pointé et $f_i : A_i \rightarrow X$ des plongements isométriques de (X_1, d_1) et (X_2, d_2) dans (X, d) tels que $f_i(p_i) = p$

Remarque 1.8. On peut minimiser sur $X = X_1 \sqcup X_2$.

Cette définition très abstraite définit une distance entre espaces métriques à isométrie près. Elle préserve peu de structure, par exemple, n'importe quel espace métrique compact peut être approché par des espaces métriques sur des ensembles finis.

Cependant, elle a de très bonnes propriétés de compacité : sous des hypothèses très faibles, il est possible de s'assurer qu'une suite d'espaces métriques pointés admet une sous-suite convergente vers un nouvel espace métrique. Par exemple pour les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, on a :

Théorème 1.9 (Gromov, 1981). Soit $(M_i^n, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variétés de dimension n satisfaisant :

1. La courbure de Ricci de g_i est uniformément minorée,
2. Le diamètre de (M_i, g_i) est uniformément majoré.

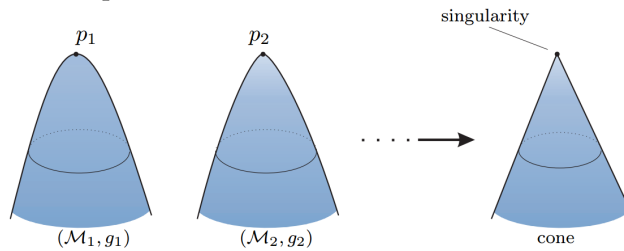
Alors, il existe une sous-suite qui converge vers un espace métrique (X, d) au sens de Gromov-Hausdorff.

C'est une notion centrale dans l'étude des singularités : étant donnée une suite de variété qui devient singulière, il sera possible (sous des hypothèses) de prendre une (sous-)limite convergeant vers un espace dit "singulier". Nous verrons aussi que c'est cette distance qui donne tout son sens au procédé d'éclatement et qui nous permettra de donner un comportement asymptotique de la formation de singularités. La question sera toujours : quelle peut être la structure de (X, d) suivant les propriétés satisfaites par les (M_i^n, g_i) .

1.5 Singularités

Parlons enfin de ce que l'on entend par "singularité". C'est un concept assez vague qui correspond toujours, à une perte de régularité d'une variété ou l'explosion d'une quantité géométrique (courbure) ou encore à ce que l'on appellera un effondrement local :

Quand la courbure n'est pas bornée : [Top]



Quand le volume n'est pas minoré (on dit que la variété "s'effondre") : [Top]



Les singularités apparaissent dans les deux types de problèmes présentés jusqu'ici, statiques et dynamiques.

Leur étude est importante, la connaissance des singularités possibles et leur mode de formation permet d'avoir plus d'informations sur le comportement d'un flot ou de compléter l'ensemble des minimiseurs (ou points critiques) d'une fonctionnelle par une classe d'espaces plus larges qui permettent de mieux comprendre ce qui peut dégénérer.

Nous allons voir qu'il y a plusieurs manières de faire face à ces complications dans les cas qui nous intéressent. Si au début d'une théorie, on choisit souvent d'éviter les singularités, il est possible, en les analysant plus précisément, de comprendre leur mode de formation et parfois même de résoudre certaines de ces singularités.

On peut penser à l'étude des singularités comme une sorte de formulation faible (au sens de l'analyse de EDP) de problème géométriques.

2 Éviter les singularités

La plupart des premiers théorèmes dans l'étude des flots géométriques ou minimiseurs de certaines fonctionnelles correspondent aux cas où des singularités n'apparaissent pas. Donnons quelques exemples :

2.1 Variétés d'Einstein à courbure bornée

Commençons par les variétés d'Einstein

Théorème 2.1. Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés d'Einstein pointées convergeant vers un espace métrique (X, d, p_∞) au sens de Gromov-Hausdorff et satisfaisant :

$$|\text{Rm}(g_i)| \leq C_0$$

et

$$\inf_{x_i \in M_i} \text{vol}_i(B(x_i, 1)) > v_0,$$

Alors, (X, d, p_∞) est une variété d'Einstein (analytique...) de même dimension.

Idées de preuve 3. L'idée est qu'en contrôlant le tenseur de Riemann et le volume, il est possible de faire appel à des coordonnées dites "harmoniques" dans des voisinages de tailles minorées de chaque point.

Dans ces coordonnées, il est alors possible d'utiliser une version du théorème d'Ascoli pour avoir une sous-suite qui satisfait l'équation d'Einstein avec un peu de régularité ($C^{k,\alpha}$), la régularité elliptique assure alors que cette limite est bien une variété d'Einstein (analytique).

Remarque 2.2. On a effectivement besoin de ces deux hypothèses sinon les cas des exemples présentés dans la section précédente peuvent se produire.

2.2 Flots de Ricci non-singuliers

Il y a ensuite une version dynamique due à Hamilton qui est une adaptation de la preuve concernant les variétés d'Einstein (en utilisant la régularité parabolique) à la convergence de flots de Ricci vers un flot de Ricci :

Théorème 2.3 ([Ham1]). Soit $A > 0$ et $v > 0$ et soit $(M_i,]A_i, B_i[, g_i(\cdot), p_i)$ une suite de flots de Ricci pointés sur des intervalles $]A_i, B_i[$ avec $A_i < 0 < B_i$, satisfaisant :

1. $|\text{Rm}(g_i(0))| < A$
2. $\text{vol}_i(M_i, g_i(0)) > v$

Alors il existe une sous-suite convergeant de manière lisse vers un flot de Ricci sur $(M_\infty,]A_\infty, B_\infty[)$ où $(A_\infty, B_\infty) = (\lim_{n \rightarrow \infty} A_{i_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} B_{i_n})$.

Remarque 2.4. Les conditions ne portent que sur un temps donné grâce à la régularité parabolique.

Mais quand on parle de flot de Ricci, les singularités peuvent aussi apparaître au cours d'un même flot. Illustrons cependant le fait que sans singularité, le flot se rapproche d'une géométrie optimale.

2.2.1 En dimension 2

En dimension 2, le flot de Ricci n'a pas de singularité (à part des temps d'extinction où la métrique devient uniformément nulle sur la variété), et fait évoluer n'importe quelle métrique sur une surface fermée vers la métrique de courbure constante de sa classe conforme, cela donne une nouvelle preuve de l'uniformisation des surfaces.

2.2.2 En courbure positive

Lorsque la courbure est positive, le flot de Ricci est non-singulier jusqu'à son temps d'extinction où il devient asymptotiquement sphérique :

Théorème 2.5 (Hamilton [Ham2], Huisken [Hui], Bohm-Wilking [B-W]). Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n simplement connexe et ayant un tenseur de courbure positif, alors le flot de Ricci partant de (M, g) n'a pas de singularité avant que la métrique ne se contracte en un "point sphérique", c'est-à-dire :

$$\frac{g_t}{2(n-1)(T-t)} \rightarrow g^0,$$

où g^0 est une métrique de courbure constante égale à 1. On sait alors que (M, g^0) est un quotient de la sphère unité. En particulier, M est difféomorphe à la sphère (ce qui n'était pas connu avant).

Idées de preuve 4. La démonstration repose sur le fait que certaines inégalités algébriques sur le tenseur de courbure sont préservées par le flot (en particulier la positivité du tenseur de courbure). Ces inégalités empêchent l'apparition de singularité avant extinction et s'améliorent le long du flot.

En revenant à l'équation satisfaite par la courbure :

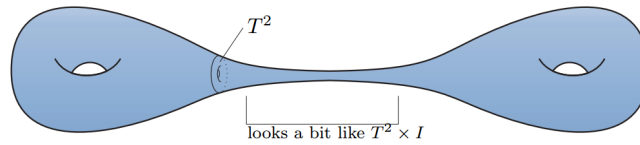
$$\partial_t Rm = \Delta Rm + \tilde{Q}(Rm)$$

On peut montrer que quand la courbure devient grande, le ΔRm devient négligeable devant le terme quadratique et l'équation satisfaite se rapproche de celle d'une métrique à courbure constante, et on peut prouver que le rapport du minimum et du maximum de la courbure tend vers 1.

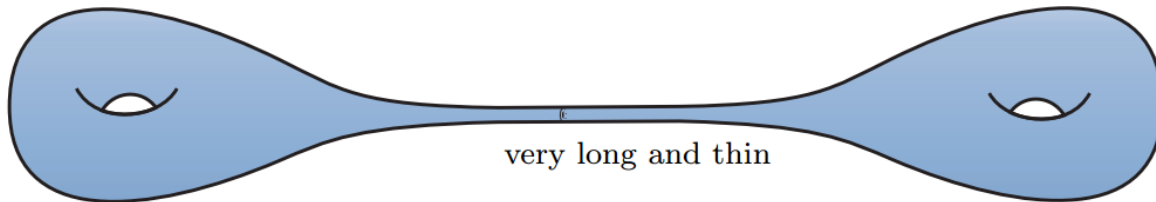
2.2.3 Flot de Ricci non-singuliers en dimension 3 : un pas vers la géométrisation de Thurston

Hamilton a décrit dans [Ham3] le comportement en temps long du flot de Ricci sur une variété compacte de dimension 3 si aucune singularité n'apparaît (ceci a ensuite été raffiné par Perelman et enfin Bamler dans le cadre des flots de Ricci avec chirurgies). C'est une étape cruciale de la preuve de la conjecture de la géométrisation de Thurston (c'est d'ailleurs ce qui a donné l'espoir de résoudre ce problème par flot de Ricci).

Ce qui est montré est qu'en temps long, la variété se découpe en des morceaux hyperboliques reliés par des cylindres sur des tores presque plats [Top] :



Les parties hyperboliques de courbure négative deviennent très grosses (de l'ordre de t) et s'allongent en des sortes de cusps (corne) alors que les parties presque plates ne changent pas d'épaisseur et apparaissent donc très fines [Top]



3 Étudier la formation des singularités

Une autre manière de s'intéresser aux singularités est de caractériser leur nature et leurs conditions d'apparition.

L'idée pour cela est de trouver un "modèle de singularité" à chaque singularité se formant, c'est-à-dire dégager le comportement de formation de la singularité à son échelle de formation.

Pour dégager ces modèles, l'idée est de "regarder" les singularités à leur échelle d'apparition. Le comportement asymptotique sera ce que l'on appellera un modèle de singularité (souvent un objet très particulier).

3.1 Regarder les singularités avec la bonne loupe : Éclatement

Ici, nous présentons un des outils les plus importants de l'étude des singularités en analyse géométrique : l'éclatement des singularités.

Le problème de l'apparition de singularités est que certaines parties de la variété n'ont plus la même "échelle caractéristique". Il convient donc de changer l'échelle à laquelle on regarde chaque partie de la variété : [Top]

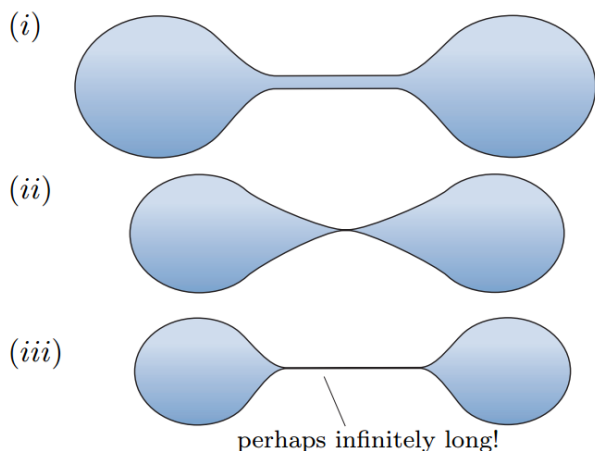


Figure 1.3: Neck Pinch.

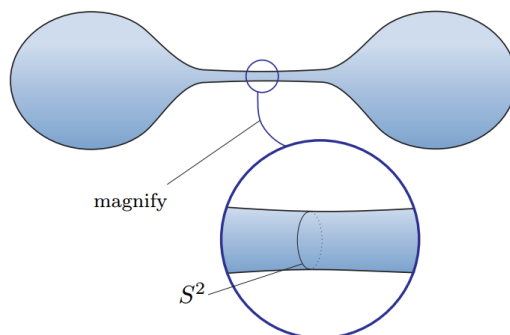


Figure 1.4: Blowing up.

L'idée est de suivre la singularité grâce à un changement d'échelle adapté à son apparition pour en dégager des espaces "modèles" pour ces singularités en passant à la limite.

La première étape de ce procédé est de dégager une "échelle caractéristique" de l'apparition de la singularité, cela se fait au cas par cas, mais on peut par exemple choisir le maximum de la courbure quand la courbure explose, le volume d'un domaine de la variété quand la variété s'effondre en certains endroits (penser à un cylindre dont le rayon tend vers 0 comme cas typique d'effondrement).

En observant la variété à cette échelle bien choisie, la quantité choisie reste bornée et parfois il est possible de passer à la limite et obtenir un comportement asymptotique de la formation de singularité.

3.2 Dégénérescence de variétés d'Einstein

Bien que l'équation d'Einstein soit parabolique et implique que les solutions sont lisses, ces mêmes solutions peuvent dégénérer en des variétés singulières. Donnons un exemple qui sera en fait un exemple modèle de ce phénomène :

Exemple 3.1. Il existe une variété d'Einstein construite par Eguchi et Hanson qui est asymptotique au cône : $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ (c'est à dire que $(M_{EH}, \lambda g_{EH}, p) \rightarrow (\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2, d^{\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2}, 0)$ au sens de Gromov-Hausdorff). Elle est de plus de courbure de Ricci nulle. Notons sa métrique g_{EH} .

Les deux propriétés ci-dessus sont invariantes par changement d'échelle, c'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$, λg_{EH} satisfait les mêmes propriétés.

En faisant tendre λ vers 0, on fait tendre l'espace métrique pointé $(M, \lambda g_{EH}, p \in M)$ vers le cône métrique $(\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2, d^{\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2}, 0)$ (c'est la définition du cône asymptotique).

En particulier, une suite de métrique satisfaisant une borne inférieure sur le volume de ses boules unités (à partir d'un certain rang, elles s'approchent de celles de $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$) et une borne sur sa courbure de Ricci (ici nulle) peut dégénérer vers un espace singulier.

3.2.1 En dimension 4 : Apparition d'orbifolds d'Einstein

Dans le cas statique des métriques d'Einstein, il est aussi possible de décrire comment des zones de courbure infinie peuvent apparaître, elles sont en fait modelées sur des suites de métriques comme celle des changements d'échelle d'Eguchi-Hanson (elles peuvent être asymptotiques à \mathbb{R}^4/Γ où Γ est un sous-groupe fini de $SO(4)$) :

Théorème 3.2 ([And], [B-K-N]). Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de métrique d'Einstein de dimension 4 et de constante d'Einstein bornée qui converge vers un orbifold (une variété avec éventuellement des singularités coniques), l'espace singulier.

On a de plus la description de la formation des singularités :

Si (M_i, g_i, p_i) converge vers $(M_\infty, g_\infty, p_\infty)$ singulier en p_∞ .

Alors, $(M_i, \frac{g_i}{t_i}, p_i)$ (où $\frac{1}{t_i} = |\text{Rm}_i|(p_i)$) converge de manière lisse vers une variété de courbure de Ricci nulle asymptotique à un quotient de $\mathbb{R} \setminus \Gamma$ (plat). C'est le modèle de formation des singularités.

C'est-à-dire : la formation de singularités dans une suite de variétés d'Einstein est modélisée sur la singularité connue de métriques de courbure de Ricci nulle asymptotique à un cône plat qui converge vers le cône plat.

Idées de preuve 5. La preuve se fait en éclatant la variété autour d'un maximum de sa courbure. Les conditions du théorème de compacité des variétés d'Einstein (rayon d'injectivité et courbure bornée) sont alors vérifiées et on peut passer à la limite.

Le côté asymptotiquement plat vient du fait qu'il y a une réelle concentration de la courbure au point qui devient singulier. Les points à distance finie de la singularité ayant une bien plus faible courbure, la variété éclatée paraît de plus en plus plate à longue distance.

Le côté Ricci-plat vient simplement du fait que si $\text{Ric}(g) = \lambda g$ et $g_\alpha = \alpha g$, alors $\text{Ric}(g_\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha} g_\alpha$. Comme ici, on fait un changement d'échelle qui tend vers $+\infty$ (l'échelle choisie est la courbure qui explose), la variété est Ricci-plate à la limite.

Remarque 3.3. Les variétés qui apparaissent dites ALE Ricci-plates ne sont pas classifiées. Connaître toutes ces métriques qui apparaissent dans de nombreuses situations comme modèles de formation de singularités est un vieux problème très important.

3.2.2 En dimension quelconque : Singularités de codimension ≥ 4

En dimension plus grande, les singularités ne sont plus simplement localisées en un point. elle se trouvent cependant dans un sous-espace très petit : de codimension 4 d'après un théorème de Cheeger et Naber :

Théorème 3.4 (Cheeger-Naber [C-N]). Soit $(M_i, g_i, p_i)_i$ une suite de variétés pointées de dimension n convergeant vers (X, d, p) et satisfaisant :

1. $-g_i \leq \text{Ric}(g_i) \leq g_i$
2. $\text{vol}_i(B(x_i, 1)) > v_0 > 0$

Alors (X, d, p) est lisse hors d'un sous-espace singulier de codimension au moins 4.

3.3 Éclatement parabolique de flots de Ricci

Un procédé d'éclatement analogue est possible sur les flots de Ricci, il ne se fait pas simplement par changement d'échelle sur la variété, mais aussi sur le temps :

Définition 3.1. Un changement d'échelle parabolique de facteur λ sur des coordonnées (g, t) où g est la métrique et t le temps correspond au changement :

$$(g_\lambda, t_\lambda) = (\lambda^2 g, \lambda^2 t)$$

C'est-à-dire à une multiplication des distances par λ et une multiplication des temps par λ^2 .

Ce comportement $d^2 \approx t$ entre les distance et les temps est classique dans l'étude des équations paraboliques principalement lié au fait que, par ce changement, l'équation est toujours satisfaite.

On veut alors, comme dans le cas Einstein, utiliser une propriété de compacité. Les outils principaux pour vérifier les hypothèses du théorème d'Hamilton sont les fonctionnelles introduites par Perelman en 2002.

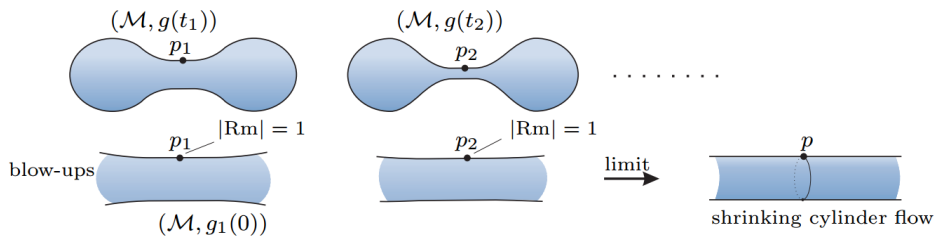
3.3.1 En dimension 3 : Théorème des voisinages canoniques

Un autre résultat important des travaux de Perelman qui lui a permis de construire un flot de Ricci avec chirurgies imaginé par Hamilton est le Théorème des voisinages canoniques. Il décrit les zones de grande courbure scalaire (et donc de toutes les autres courbures aussi) dans un flot de Ricci sur une variété de dimension 3 :

Théorème 3.5 (Voisinages canoniques [Per2], [K-L]). Dans un flot de Ricci de dimension 3, la formation de singularités est modélisée sur un des modèles suivants :

1. Un cylindre $\mathbb{S}^2 \times]-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}[$, avec la métrique canonique produit, de courbure scalaire 1. On appelle ce voisinage une ϵ -gorge.
2. Une boule B^3 ou le complémentaire d'une boule dans l'espace projectif, c'est-à-dire $P^3(\mathbb{R}) \setminus \bar{B}^3$, munie d'une métrique de courbure strictement positive qui est proche, en dehors d'un compact, d'un cylindre sphérique comme ci-dessus. On appelle un tel voisinage un ϵ -capuchon.
3. Une variété fermée de courbure strictement positive (et donc difféomorphe à un quotient de la sphère d'après le théorème d'Hamilton).

Idées de preuve 6. La preuve est faite par éclatement des singularités à l'échelle de leur courbure. [Top]



L'existence d'une limite vient de l'utilisation des fonctionnelles de Perelman pour lesquelles le flot de Ricci est un flot de gradient.

Ces fonctionnelles qui contrôlent la géométrie (le non-effondrement en particulier) s'améliorent le long d'un flot de Ricci et sont invariantes par éclatement parabolique. On obtient grâce à elle un contrôle uniforme sur la suite d'éclatement qui permet de passer à la limite par le théorème de compacité d'Hamilton. Les limites possibles sont alors celles listées dans l'énoncé.

Remarque 3.6. En dimension plus grande, il n'est pas toujours possible de s'assurer de la possibilité de passer à la limite, quand c'est le cas, on tombe souvent sur des flots de Ricci particuliers, les solitons de Ricci qui sont des généralisations de variétés d'Einstein dans le sens où ce sont des points fixes du flot de Ricci à changement d'échelle et difféomorphismes près.

Ils satisfont :

$$\text{Ric} + \text{Hess}f = \lambda g.$$

Une variété d'Einstein aurait $\text{Hess}f = 0$

S'il n'est pas possible de passer à la limite, on peut toujours distinguer le cas où c'est possible ou non et tout de même obtenir des informations sur la formations des singularités, par exemple, le théorème de pseudolocalité de Perelman affirme que toutes les singularités possibles ont une fonctionnelle ν assez négative.

4 Résoudre certaines singularités

Une fois les singularités bien comprises, un travail (souvent bien plus difficile) peut permettre de se débarrasser de ces singularités. Cela peut vouloir dire continuer un flot au-delà d'une singularité ou par exemple reconstruire des espaces lisses approchant un espace singulier.

Je présente ici des résultats récents qui donnent une idée des questions qui se posent actuellement concernant la possibilité d'éviter certaines singularités.

4.1 Désingularisation d'orbifolds d'Einstein

Dans ce cas, l'espoir est de déterminer quels orbifolds d'Einstein sont effectivement limites de variétés d'Einstein au sens de Gromov-Hausdorff, c'est une question posée depuis la fin des années 80.

Il y a d'assez nombreux exemples de désingularisation de variétés, mais seulement en géométrie kählerienne (cas très particulier). Un premier résultat dans le cas riemannien est celui d'Olivier Biquard qui a développé un procédé de désingularisation d'une classe assez importante de singularités modulo des suppositions techniques.

Au cours de la démonstration, une condition pour appliquer la méthode apparaît et elle semble effectivement être une obstruction à la désingularisation de certains orbifolds d'Einstein par des variétés d'Einstein.

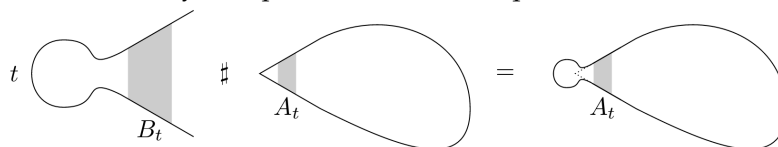
Énonçons le résultat de manière très approximative :

Théorème 4.1 ([Biq1][Biq2]). Il est possible de désingulariser des orbifolds d'Einstein par des variétés d'Einstein sous certaines hypothèses, notamment sur la courbure au point singulier.

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, la méthode ne peut pas donner une variété d'Einstein. En fait, un voisinage (dans un voisinage $C^{1,\alpha}$) explicite de la métrique que l'on obtient quand même par la méthode ne peut être d'Einstein.

Il semble qu'il n'est donc pas possible qu'une suite de variétés d'Einstein converge vers l'orbifold si la condition n'est pas vérifiée ce serait donc une obstruction à la désingularisation de certains orbifolds d'Einstein par des variétés d'Einstein.

Idées de preuve 7. L'idée est de recoller une métrique d'Eguchi-Hanson avec un changement d'échelle de rapport $t : B_t$ sur la singularité conique de la variété A_t et essayer de perturber cette métrique recollée en une variété d'Einstein. [Biq1]



La méthode ne marche que si une condition de courbure est satisfaite.

4.2 Singularités du flot de Ricci

Dans le cas dynamique, en plus des suites de flots de Ricci qui peuvent dégénérer, il y a des singularités qui peuvent apparaître le long d'un même flot.

4.2.1 Flot de Ricci avec chirurgies

Un bel exemple de procédé permettant de continuer le flot au-delà de singularités est la construction du "flot de Ricci avec chirurgies". L'idée est ici de modifier la variété peu avant l'apparition d'une singularité par un procédé contrôlé, puis de relancer le flot.

Plus précisément, nous avons vu que les singularités qui peuvent apparaître sont modélées par des cylindres contractants (éventuellement refermé par un "capuchon") ou bien sont de courbure positive et se contractent donc comme une sphère par le théorème d'Hamilton [Ham2]. Ce dernier cas ne pose pas de problème car le flot se continue jusqu'à une extinction de la partie concernée sans singularité. Il reste alors le cas où une partie cylindrique se contracte : [Top]

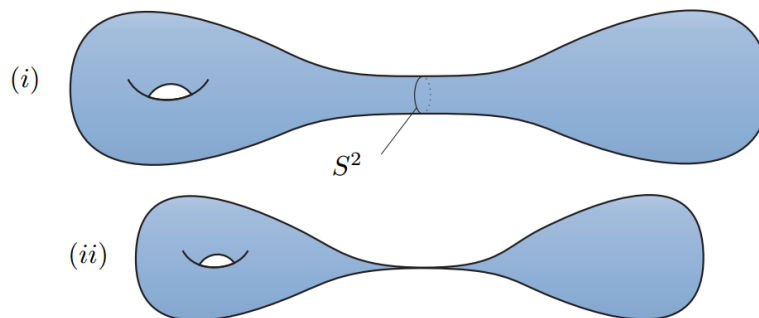


Figure 1.6: Neck pinch

L'idée est de découper ce cylindre en son milieu et de refermer les deux petits cylindres restant grâce à des "capuchons" bien choisis. [Top]

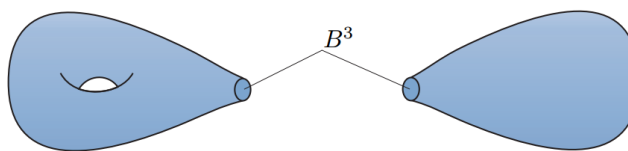


Figure 1.7: Surgery

4.2.2 Singularités coniques et solitons

Un exemple construit par Feldman, Ilmanen et Knopf [F-I-K] décrit un flot de Ricci qui se contracte en un cône puis s'expand en un flot de Ricci passé la singularité conique. Ce procédé est modélé sur des types de flots de Ricci particuliers : les solitons de gradients contractant pour celui qui mène à la singularité et expansif pour celui qui la désingularise. Un soliton de Ricci est un point fixe du flot de Ricci à difféomorphisme et changement d'échelle près.

Felix Schulze a montré qu'on pouvait désingulariser des métriques ayant des singularités coniques à courbure positive grâce à des solitons de gradient expansifs partant de ces cônes.

4.2.3 Flots de Ricci à courbure scalaire bornée

Un théorème classique d'Hamilton affirme qu'une singularité apparaît en temps fini T dans un flot de Ricci si et seulement si $|\text{Rm}|(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow T$.

Ce résultat a été raffiné par Sesum qui a montré que c'était aussi le cas pour la courbure de Ricci.

Un théorème de Richard Bamler [Bam] (utilisant les techniques de Cheeger-Naber adaptées aux flots de Ricci) donne une sorte de réciproque concernant la courbure scalaire :

Il montre que si la courbure scalaire est bornée dans un flot de Ricci, alors les singularités apparaissant sont encore une fois contenues dans un sous-espace de codimension au moins 4.

Il montre aussi un théorème de compacité pour ces flots de Ricci à courbure scalaire bornée comme objet géométrique avec encore une fois des singularités de codimension 4.

Références

- [And] Michael T. Anderson , *Ricci Curvature Bounds and Einstein Metrics on Compact Manifolds*, <http://www.jstor.org/stable/1990939>
- [Bam1] Richard Bamler, *Long-time behavior of 3 dimensional Ricci flow – A : Generalizations of Perelman’s long-time estimates*, <http://arxiv.org/abs/1411.6655>
- [Bam] Richard Bamler, *Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature*, <https://arxiv.org/abs/1603.05235>
- [B-K-N] S. Bando ; A. Kasue ; H. Nakajima, *On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*, <https://eudml.org/doc/143705>
- [Biq1] Olivier Biquard, *Désingularisation de métriques d’Einstein. I*, <http://link.springer.com/article/10.1007/s00222-012-0410-7>
- [Biq2] Olivier Biquard, *Désingularisation de métriques d’Einstein. II*, <http://link.springer.com/article/10.1007/s00222-015-0619-3>
- [B-W] Bohm ; Wilking, *Manifold with positive curvature operators are space forms*,
- [C-N] Jeff Cheeger ; Aaron Naber, *Regularity of Einstein Manifolds and the Codimension 4 Conjecture*, <https://arxiv.org/abs/1406.6534>
- [TheRF] Bennett Chow ; Sun-Chin Chu ; David Glickenstein ; Christine Guenther ; James Isenberg ; Tom Ivey ; Dan Knopf ; Peng Lu ; Feng Luo ; Lei Ni, *The Ricci flow : I, II, III and IV*
- [F-I-K] Mikhail Feldman ; Tom Ilmanen ; Dan Knopf, *Rotationally Symmetric Shrinking and Expanding Gradient Kähler-Ricci Solitons*, <https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090511686>
- [Ham1] Richard Hamilton, *A Compactness Property for Solutions of the Ricci Flow*
- [Ham2] Richard S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, <https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214436922>
- [Ham3] Richard S. Hamilton, *Long-time behavior of the Ricci flow*
- [Hui] Gerhard Huisken, *Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold*, <https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214439463>
- [K-L] Bruce Kleiner ; John Lott, *Notes on Perelman’s papers* <http://arxiv.org/abs/math/0605667>
- [Per1] Gregory Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, <https://arxiv.org/abs/math/0211159>
- [Per2] Gregory Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, <http://arxiv.org/abs/math/0303109>
- [Pet] Peter Petersen, *Riemannian Geometry*
- [Sch] Richard Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar*, <http://www.math.jhu.edu/~js/Math646/schoen.yamabe.pdf>
- [Top] Peter Topping, *Lecture notes on the Ricci flow*