# Introduction au domaine de recherche :

# Revêtements des variétés complexes projectives


ShengYuan ZHAO

sous la direction de Serge CANTAT



octobre 2016

## Table des matières



# 1 Introduction

Le fameux théorème d'uniformisation de Riemann assure que le revêtement universel d'une surface de Riemann $S$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^1$ si le genre $g(S)$ est 0, le plan complexe $\mathbb{C}$ si $g(S) = 1$ et le disque $\mathbb{D}$ si $g(S) > 1$. Une surface de Riemann n'étant rien d'autre qu'une courbe complexe projective, on peut se demander plus généralement quels sont des revêtements (universels ou intermédiaires) des variétés algébriques complexes (lisses). Cette question qui trouve ses origines dans l'époque de Riemann est naturelle d'un point de vue géométrique, mais elle n'en est pas moins difficile. Bien que le cas de dimension 1 soit bien compris depuis longtemps et fasse partie de la base commune de générations de mathématiciens, on en sait encore peu en dimension supérieure.

Une première remarque est que si le revêtement est infini, alors il n'est pas projectif. Mais est-ce qu'on peut quand-même avoir une régularité ? Dans son livre [Sha74], Shafarevich a posé la conjecture suivante : le revêtement universel d'une variété complexe projective est holomorphiquement convexe (voir la section suivante pour la définition). Une quarantaine d'années est passée et la conjecture est toujours ouverte. Néanmoins, autour de la conjecture est déployé un terrain fécond où poussent plein de travaux en géométrie liés à différents domaines mathématiques. Toute variété complexe projective étant kählérienne, un problème très lié est celui des groupes fondamentaux de variétés kählériennes, appelés groupes de Kähler. Depuis les années 80, on commence à obtenir des connaissances intéressantes sur ces groupes et donc sur les revêtements, à l'aide des théories naissantes : technique $L^2$, théorie de Hodge non abélienne, etc.

On peut simplifier le problème en ajoutant des restrictions sur le groupe de revêtement. Si on suppose que le groupe fondamental est linéaire, alors la conjecture de Shafarevich est vraie d'après [EKPR12]. On peut ensuite regarder le cas où le revêtement est algébrique dans le sens où il agit par transformations birationnelles (voir la section suivante pour l'énoncé précis). Ceci nécessite des connaissances sur la géométrie birationnelle, notamment le groupe des transformations birationnelles.

Le cas de dimension deux est particulièrement intéressant parce que tout groupe fondamental d'une variété projective complexe est celui d'une surface projective grâce au théorème de Lefschetz. En dimension deux on dispose de la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces complexes compactes qui nous permet souvent d'examiner certains problèmes cas par cas.

Dans ce petit texte, on donnera d'abord des énoncés précis de notre problème et on mentionnera quelques résultats déjà connus. Puis on donnera une introduction sur les groupes kählériens, on y présentera notamment quelques théorèmes concernant les fibrations. Ensuite on parlera des groupes de transformations birationnelles. Puisque le cas de dimension deux est très important, le texte finira par une présentation de la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces complexes compactes.

# 2 Mise en scène

## 2.1 Conjecture de Shafarevich

**Définition 2.1** *Soit $X$ une variété complexe et soit $K$ un sous-ensemble compact de $X$. L'enveloppe holomorphe de $K$ dans $X$ est définie par*

$$\widehat{K} = \{z \in X; \forall f \in \mathcal{O}(X),\ |f(z)| \leqslant \sup_K |f|\}.$$

**Définition 2.2** *Une variété complexe $X$ est dite holomorphiquement convexe si l'enveloppe holomorphe $\widehat{K}$ de tout sous-ensemble compact $K \subset X$ est compacte.*

La classe des variétés complexes holomorphiquement convexes contiennent deux types de variétés : variétés complexes compactes et des ouverts holomorphiquement convexes de $\mathbb{C}^n$. Ces deux types sont assez différents parce qu'une variété compacte n'admet aucune fonction holomorphe non constante tandis qu'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ en admet beaucoup. Stein a donc introduit la notion suivante :

**Définition 2.3** *Une variété complexe $X$ est appelée une variété de Stein si*

1. *$X$ est holomorphiquement convexe ;*
2. *Tout point $x \in X$ possède un voisinage $V$ tel que pour tout $y \in V/\{x\}$ il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Maintenant on peut énoncer la conjecture de Shafarevich :

**Conjecture 2.4 (Shafarevich)** *Version 1 : Le revêtement universel d'une variété complexe projective est holomorphiquement convexe.*

*Version 2 : Le revêtement universel d'une variété complexe projective dont le groupe fondamental est infini est une variété de Stein.*

On peut vérifier la conjecture en dimension 1 par le théorème d'uniformisation de Riemann qui assure que le revêtement universel d'une surface de Riemann est soit $\mathbb{P}^1$, soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{D}$. En fait Behnke et Stein ont même prouvé en 1948 que toute surface de Riemann non compacte est une variété de Stein. Mais c'est à la fin du vingtième siècle, plus d'un siècle après le décès de Riemann, qu'on a su donner une réponse partielle à la conjecture en dimension deux en utilisant la théorie de Hodge non-abélienne :

**Théorème 2.5 ([KR98])** *Le revêtement universel d'une surface complexe projective dont le groupe fondamental est réductif est holomorphiquement convexe.*

Puis il y a quelques années on a eu un résultat qui est valable en toute dimension :

**Théorème 2.6 ([EKPR12])** *Le revêtement universel d'une variété complexe projective dont le groupe fondamental est linéaire est holomorphiquement convexe.*

## 2.2 Revêtements algébriques

Maintenant on regarde des revêtements des variétés complexes projectives dans un style un peu différent de celui de la conjecture de Shafarevich. On considère des revêtements étales infinis qui ne sortent pas trop du cadre albébrique :

**Définition 2.7** *Soit $X$ une variété complexe projective. Un revêtement $\tilde{X}$ de $X$ est dit algébrique si $\tilde{X}$ est identifié à un ouvert d'une autre variété projective $Y$ (pour la topologie transcendante) et le groupe d'automorphismes du revêtement s'étend en un groupe de transformations birationnelles de $Y$, avec des indéterminations possibles dans le complémentaire de $\tilde{X}$.*

D'un point de vue de revêtement, les variétés projectives les plus simples sont les variétés abéliennes :

**Définition 2.8** *Une variété abélienne complexe est un tore complexe projectif, c'est-à-dire une variété projective isomorphe à une variété de la forme $\mathbb{C}^n/\Lambda$ où $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ engendre $\mathbb{C}^n$ comme espace vectoriel.*

Le groupe fondamental d'une variété abélienne est $\mathbb{Z}^{2n}$ et son revêtement universel est $\mathbb{C}^n$. Le théorème suivant nous dit que si on reste dans un cadre très algébrique, alors on peut espérer peu de choses à part les variétés abéliennes :

**Théorème 2.9 ([CHK13])** *Sous l'hypothèse d'une conjecture (prouvée en dimension $\leqslant 3$, voir [CHK13]), les énoncés suivants sont équivalents pour une variété projective normale $X$ :*

1. *Le revêtement universel de $X$ est biholomorphe à une variété quasi-projective.*
2. *Il existe un revêtement étale fini de $X$ qui est un fibré sur une variété abélienne avec des fibres simplement connexes.*
3. *Le revêtement universel de $X$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^m \times F$ où $m \geqslant 0$ et $F$ est une variété projective simplement connexe.*

# 3 Groupes de Kähler

Une variété $X$ est le quotient de son revêtement universel $\tilde{X}$ par l'action du groupe fondamental $\pi_1(X)$. Ainsi l'étude des revêtements est extrêmement liée à celle des groupes fondamentaux.

**Définition 3.1** *On dit qu'un groupe est un groupe de Kähler s'il est isomorphe au groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte.*

Une référence pour cette section est le livre [ABC$^+$96].

## 3.1 Quelques exemples

Comme un produit de variétés kählériennes est une variété kählérienne, et comme une métrique de Kähler peut être relevé au revêtement, on a :

**Proposition 3.2** *Un produit direct de groupes kählériens est kählérien. Un sous-groupe d'indice fini d'un groupe kählérien est kählérien.*

Puisque toute surface réelle orientable admet une structure complexe qui est automatiquement kählérienne, on a :

**Proposition 3.3** *Tout groupe fondamental d'une surface réelle orientable est kählérien.*

On sait aussi (d'abord prouvé par Serre, voir [Sha74] pour une démonstration) :

**Théorème 3.4** *Tout groupe fini est un groupe de Kähler.*

Il existe bien sûr des groupes qui ne sont pas des groupes de Kähler. Par exemple la théorie de Hodge fournit une contrainte :

**Proposition 3.5** *Le rang de l'abélianisé d'un groupe de Kähler est pair.*

Avec la proposition 3.2, on en déduit que

**Corollaire 3.6** *Un groupe libre non abélien n'est pas un groupe de Kähler.*

Maintenant on explique pourquoi le cas de dimension deux joue un rôle important. Ceci résulte de deux théorèmes classiques. Le premier est un théorème obtenu par Lefschetz avant la seconde guerre mondiale :

**Théorème 3.7 (de Lefschetz sur les sections hyperplanes)** *Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété algébrique de dimension $n$ et soit $Y = \mathbb{P}^{N-1} \cap X$ une section hyperplane telle que $U := X - Y$ est lisse de dimension $n$. Alors $\pi_i(Y) \to \pi_i(X)$ est un isomorphisme pour $i < n - 1$, et est surjectif pour $i = n - 1$.*

Le deuxième est un théorème qui résulte des travaux de Kodaira sur la théorie de déformation pendant les années 50 :

**Théorème 3.8 (Kodaira)** *Toute surface kählérienne compacte peut être obtenue par déformation des surfaces complexes projectives.*

Les deux théorèmes précédents impliquent :

**Théorème 3.9** *Soit $G$ un groupe, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$G$ est le groupe fondamental d'une variété complexe projective.*
2. *$G$ est le groupe fondamental d'une surface complexe projective.*
3. *$G$ est le groupe fondamental d'une surface kählérienne compacte.*

## 3.2 Fibrations

Réciproquement des conditions sur le groupe fondamental peuvent imposer des structures géométriques intéressantes sur la variété. On présente quelques théorèmes concernant la structure de fibration.

**Définition 3.10** *Soit $X$ une variété différentielle. Un sous-espace $U \subset \mathrm{H}^1(X)$ est dit isotrope si l'application naturelle $\bigwedge^2 U \to \mathrm{H}^2(X)$ est nulle. Le genre de $X$ est défini par*

$$g(X) = \max\{\dim U; U \subset \mathrm{H}^1(X, \mathbb{R}), U \text{ isotrope}\}.$$

**Remarque 3.11** En utilisant la théorie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, on peut montrer que la notion de genre ne dépend que du groupe fondamental.

**Théorème 3.12 (Castelnuovo-de Franchis (1905))** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte qui admet un sous-espace isotrope maximal $U \subset \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_X)$ de dimension $g \geqslant 2$. Il existe un application holomorphe surjective $f : X \to C$ où $C$ est une surface de Riemann compacte de genre $g$ telle que $U$ est inclus dans l'image de $f^*$. De plus on peut supposer que les fibres de $f$ sont connexes.*

Catenese en a déduit :

**Corollaire 3.13 ([Cat91])** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte telle que $g(X) \geqslant 2$. Il existe une application holomorphe surjective $f : X \to C$ à fibres connexes où $C$ est une surface de Riemann compacte de genre $g$.*

Ensuite Beauville en a déduit (indépendemment démontré par Siu avec d'autres méthodes) :

**Théorème 3.14 (Annexe de [Cat91])** *Soit $X$ une variété kählérienne compacte et soit $g \geqslant 2$ un entier. Alors $X$ admet une application holomorphe surjective vers une surface de Riemann compacte de genre $g' \geqslant g$ à fibres connexes si et seulement s'il existe un morphisme surjectif $\pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$ où $C_g$ est une surface de Riemann compacte de genre $g$.*

Il y a aussi d'autres résultats concernant la fibration, faisant intervenir différentes théories. Par exemple le théorème suivant est obtenu par la théorie de cohomologie $L^2$ :

**Théorème 3.15 ([Gro89])** *Soit $X$ une variété kählérienne complète admettant une triangulation bornée. Supposons que* $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{R}) = 0$ *et que* $\mathcal{H}^1_{(2)}(X) \neq 0$ *(le groupe de cohomologie $L^2$). Alors il existe une application holomorphe propre $h : X \to \mathbb{D}$ vers le disque hyperbolique à fibres connexes. De plus on peut supposer que les fibres de $h$ sont permutées par* $\mathrm{Aut}(X)$.

# 4 Groupes de Cremona

On dit qu'un groupe $\Gamma$ est linéaire s'il existe un plongement $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$ pour un entier $n$ et un corps $\mathbf{k}$. De la même manière, on dit qu'un groupe $\Gamma$ est un *groupe de transformations birationnelles* s'il existe un plongement $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{Bir}(Y)$ où $Y$ est une variété projective sur un corps $\mathbf{k}$. On sait déjà que la conjecture de Shafarevich est vérifiée dans le cas où le groupe fondamental est linéaire et on veut consiérer le cas des groupes de transformations birationnelles. En fait les groupes de transformations birationnelles sont plus grands que des groupes linéaires et sont moins bien compris. Dans cette section on explique pourquoi ils sont grands et comment leurs actions sont liées à la géométrie.

On voit immédiatement que

1. Un groupe linéaire est un groupe de transformations birationnelles ;
2. Le produit de deux groupes de transformations birationnelles est un groupe de transformations birationnelles ;
3. Un sous-groupe d'un groupe de transformations birationnelles est un groupe de transformations birationnelles.

Les groupes de transformations birationnelles des espaces projectifs, ou de manière équivalente des espaces affines, sont particulièrement riches ; on les appelle les groupes de Cremona :

$$\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}) = \mathrm{Bir}(\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}).$$

D'un point de vue algébrique, $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ est le groupe d'automorphismes de l'algèbre $\mathbf{k}(X_1, \cdots, X_n)$.

## 4.1 Structures algébriques

La morale est que les groupes de Cremona sont très grands, au moins comparés aux groupes linéaires. Néanmoins il est connu depuis longtemps (voir par exemple [Ser10]) que les groupes de Cremona possèdent une certaine structure algébrique.

On fixe maitenant le corps de base $\mathbf{k}$. Soit $B$ une variété algébrique irréductible. Une *famille* de transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n$ paramétrisée par $B$ est, par définition, une transformation birationnelle $f \in \mathrm{Bir}(B \times \mathbb{P}^n)$ telle que

1. $f$ détermine un isomorphisme entre deux ouverts $U, V \subset B \times \mathbb{P}^n$ tels que les projections de $U$ et de $V$ sur $B$ sont toutes deux surjectives ;
2. $f(b, x) = (b, f_2(b, x))$ avec $f_2(b, \dot{}) \in \mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$.

On appelle l'application $b \mapsto f_b = f_2(b, \dot{})$ un *morphisme* de $B$ dans $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$.

On dit qu'un sous-ensemble $S \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ est *fermé* si pour tout morphisme $B \to \mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ son image réciproque est fermé pour la topologie de Zariski de $B$. Ceci définit une topologie sur $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ qui est aussi appelée *la topologie de Zariski.*

**Définition 4.1** *Un sous-groupe algébrique du groupe de Cremona est un sous-groupe $G \subset \mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ qui est l'image d'un morphisme de groupes $K \to \mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ avec $K$ un groupe algébrique.*

Un groupe de Cremona admet une filtration naturelle par degré. Un élément de $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ peut être donné par $(n+1)$ polynômes homogènes sans facteurs communs ; on définit le degré de la transformation comme le degré commun de ces polynômes. On note $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k}; d) \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ le sous-ensemble des éléments de degré $d$ et $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k}; \leqslant d)$ celui des éléments de degré inférieur ou égal à $d$.

**Théorème 4.2 ([BF13])**

1. *Si $B \to \mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ est un morphisme, alors son image est contenue dans $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k}; \leqslant d)$ pour un certain $d$.*
2. *Pour tout $d \geqslant 1$, $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k}; \leqslant d)$ est fermé.*
3. *La topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ est la topologie limite inductive des topologies de $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k}; \leqslant d)$.*

On en déduit le corollaire suivant qui justifie, en un sens, que les groupes de Cremona sont grands :

**Corollaire 4.3** *Tout sous-groupe algébrique de $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ est de degré borné.*

En fait un théorème de Weil dit que les sous-groupes algébriques de $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ sont des groupes d'automorphismes de variétés rationnelles (voir [Can14]).

Une autre manière pour voir que les groupes de Cremona sont grands est de regarder leurs générateurs. Les deux théorèmes suivants nous disent qu'en dimension deux on a quand-même un système de générateurs raisonnables tandis qu'en dimension plus grande il est difficile d'avoir une description simple :

**Théorème 4.4 (Noether, Castelnuovo)** *Soit $\boldsymbol{k}$ un corps algébriquement clos. Le groupe de Cremona $\mathrm{Cr}_2(\boldsymbol{k})$ est engendré par $\mathrm{PGL}_3(\boldsymbol{k})$ et l'involution quadratique $\sigma : [x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]$.*

**Théorème 4.5 (Hudson, Pan)** *Soit $n \geqslant 3$ un entier. Soit $\boldsymbol{k}$ un corps algébriquement clos. Pour engendrer $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$, il faut au moins autant de générateurs que de familles d'hyperplans lisses dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$ de degré $\geqslant n+2$. On ne peut pas engendrer $\mathrm{Cr}_n(\boldsymbol{k})$ par des éléments de degré fini.*

## 4.2 Propriétés dynamiques

En dimension deux, nous disposons d'une représentation du groupe de Cremona dans le groupe d'isométries d'un espace hyperbolique de dimension infinie.

La construction est initialement due à Zariski et Manin (voir [Man86]). Cette action dynamique peut nous donner des informations sur la géométrie.

Soit $X$ une surface projective lisse irréductible. Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ est le quotient du groupe des diviseurs par le sous-groupe des diviseurs principaux. Il y une forme bilinéaire symétrique sur $Pic(X)$, appelée la forme d'intersection : $(C,D) \mapsto C \cdot D$. Le quotient de $\mathrm{Pic}(X)$ par le sous-groupe des éléments $E$ tel que $E \cdot D = 0$ pour tout $D$ est appelé le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ ; c'est un groupe abélien libre dont le rang $\rho(X)$ est fini. Le théorème de l'indice de Hodge nous dit que la forme d'intersection est de signature $(1, \rho(X)-1)$ sur $\mathrm{NS}(X)$.

Si $\phi : X' \to X$ est un morphisme birationnel, l'action induite $\phi^*\mathrm{NS}(X) \to \mathrm{NS}(X')$ est injective et préserve la forme d'intersection. D'après des propriétés d'éclatement en dimension deux, on sait que si $X_1 \to X$ et $X_2 \to X$ sont deux morphismes birationnels, alors il existe un troisième qui les recouvre. Ainsi on peut définir la limite directe des groupes $\mathrm{NS}(X')$ où $X' \to X$ parcourt tous les morphismes birationnels. Cette limite

$$\mathcal{Z}(X) = \lim_{X' \to X} \mathrm{NS}(X')$$

est appelée l'espace de Picard-Manin de $X$. C'est un groupe abélien libre de rang infini muni d'une forme d'intersection de signature $(1, \infty)$.

Considérons $\mathcal{Z}(X) \otimes \mathbb{R}$, ses éléments s'écrivent comme une somme finie $u + \sum a_i e_i$ où $u \in \mathrm{NS}(X)$ et les $e_i$ correspondent aux diviseurs exceptionnels. En y ajoutant les sommes infinies $\sum a_i e_i$ telles que $\sum a_i^2 < +\infty$, on obtient un espace $Z(X)$ sur lequel la forme d'intersection s'étend continûment. On peut donc en fabriquer un espace hyperbolique de dimension infinie $\mathbb{H}_\infty$ : comme en dimension finie, on choisit un élément ample $e_0$ (d'auto-intersection positive), et on prend l'ensemble des éléments $v \in Z(X)$ d'auto-intersection 1 et tel que $v \cdot e_0 > 0$.

**Théorème 4.6 ([Man86])** *Le morphisme $f \mapsto (f^{-1})^*$ induit un morphisme injectif de* $\mathrm{Bir}(X)$ *dans le groupe des isométries de $\mathbb{H}_\infty$.*

Soit $h \in \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$ un élément ample d'auto-intersection 1. On définit le degré de $f \in \mathrm{Bir}(X)$ par

$$\deg_h(f) = (f^{-1})^*(h) \cdot h = \cosh(\mathrm{distance}(h, (f^{-1})^*(h))).$$

**Définition 4.7 (théorème)** *La suite $(\deg_h(f^j))^{1/j}$ converge vers un nombre réel $\lambda(f) \geqslant 1$, appelé le degré dynamique de $f$.*

L'action des transformations birationnelles décrite par le théorème 4.6 peut être utilisée pour étudier la géométrie de la surface, ainsi que des propriétés des groupes de Cremona. Voici un théorème concernant la géométrie :

**Théorème 4.8 (Gizatullin, Cantat, Diller, Favre, voir par exemple [DF01])** *Soit $X$ une surface projective lisse définie sur un corps algébriquement clos **k**. Soient $f \in \mathrm{Bir}(X)$ et $h$ une polarisation de $X$. Il n'y que trois possibilités pour le comportement asymptotique de la suite $\deg_h(f^n)$ :*

1. *La suite $\deg_h(f^n)$ est bornée. Dans ce cas $f$ s'identifie à un automorphisme d'une surface birationnelle à $X$.*
2. *La suite $\deg_h(f^n)$ croît linéairement ou quadratiquement en $n$. Dans ce cas $X$ est une fibration rationnelle ou elliptique sur une courbe.*
3. *La suite $\deg_h(f^n)$ croît exponentiellemnt en $n$.*

Et un théorème sur la structure de groupe :

**Théorème 4.9 ([Can11])** *Soit $X$ une surface projective sur un corps **k**. Alros $\mathrm{Bir}(X)$ satisfait l'alternative de Tits : soit $G$ un sous-groupe de type fini de $\mathrm{Bir}(X)$, alors $G$ contient soit un sous-groupe résoluble d'indice fini, soit un sous-groupe libre non-abélien.*

L'alternative de Tits est aussi satisfaite pour les groupes linéaires, mais pas pour les groupes de difféomorphismes du cercle. Pour $n > 2$, on ignore encore si $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{k})$ satisfait l'alternative de Tits.

# 5 Classification d'Enriques-Kodaira

On revient au théorème d'uniformisation ; on peut le considérer comme une classification des variétés complexes compactes de dimension 1. En dimension 1, toute transformation birationnelle est isomorphisme, ce qui n'est plus vraie en dimension supérieure. Au début de vingtième siècle, Castelnuovo, Enriques et aussi beaucoup d'autres s'intéressaient intensivement à la classification birationnelle des surfaces algébriques lisses (en fait de toutes les surfaces algébriques parce que toute surface est birationnelle à une surface lisse, mais la première preuve rigoureuse de ce fait n'est apparu qu'en 1935). Les géomètres de l'époque voulaient classifier les surfaces selon des invariants numériques, comme le genre dans le cas de dimension 1, et ils ont obtenu des résultats impressionnants. Parmi les invariants d'une surface lisse $X$ qu'ils ont découverts, il y avait le premier nombre de Betti $b_1(X)$ et les plurigenres $P_n(X)$ (dimension de l'espace des sections $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^{\otimes n})$ où $\mathcal{K}$ est le fibré canonique de $X$). Il y a quatre possibilités pour le comportement asymptotique de la suite $P_n(X)$ :

1. Tous les $P_n$ s'annulent ;
2. Les $P_n$ sont 0 ou 1, et il existe au moins un $n$ pour lequel $P_n = 1$ ;
3. La suite croît linéairement ;
4. La suite croît quadratiquement.

Ils savaient aussi que dans la première classe il y a les surfaces réglées, dans la deuxième il y a ce qu'on appelle aujourd'hui les surfaces K3, les surfaces d'Enriques, les surfaces bi-elliptiques et les tores, dans la troisième il y a les surfaces elliptiques, tandis que la quatrième classe était encore mal connue. Ces résultats sont ce qu'on appelle la classification d'Enriques.

Pendant la période des deux guerres mondiales, peu de progrès ont été obtenus sur la classification des surfaces parce qu'on ne disposait pas de fondations rigoureuses de la géométrie algébrique. L'aspect algébrique de cette base est ensuite développé par Zariski, Weil et l'aspect transcendant par De Rham et Hodge. A partir des travaux de ces mathématiciens et de beaucoup d'autres, on a pu donner un traitement rigoureux de la classification d'Enriques. Après l'introduction de la théorie des faisceaux dans la géométrie algébrique et analytique par Serre, Grothendieck et les autres, la classification des surfaces a admis de grands progrès : non seulement Kodaira a complété les résultats classiques sur les surfaces algébriques, mais il a aussi classifié celles qui ne sont pas algébriques. La classification d'Enriques des surfaces algébriques est donc étendue à la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces complexes compactes.

Le point de vue monderne utilise la notion de dimension de Kodaira. Soit $X$ une variété complexe compacte et soit $\mathcal{K}$ son fibré canonique. Il existe une application naturelle

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^m) \otimes \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^n) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^{n+m})$$

de sorte que $R(X) := \mathbb{C} \oplus \sum_{m \geqslant 1} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}^m)$ est muni d'une structure d'anneau commutatif. Il se trouve que $R(X)$ a un degré de transcendance fini $\mathrm{tr}(R(X))$ sur $\mathbb{C}$. On définit la dimension de Kodaira $\mathrm{kod}(X)$ de $X$ par

$$\mathrm{kod}(X) = \begin{cases} -\infty & \text{si } R(X) \cong \mathbb{C} \\ \mathrm{tr}(R(X)) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci donne une reformulation du comportement asymptotique des plurigenres :

**Théorème 5.1 (voir [BHPVdV04] et des références données là)** *Soit $X$ une surface complexe compacte. La suite des plurigenres $(P_n(X))$ admet quatres types de comportement asymptotique, décrits ci-dessus. Ces quatres types correspondent respectivement à* $\mathrm{kod}(X) = -\infty, 0, 1$ *ou* $2$.

La classification d'Enriques-Kodaira consiste à classifier les surfaces d'abord selon leurs dimensions de Kodaira et puis selon d'autres invariants comme le premier nombre de Betti.

**Théorème 5.2 (Enriques, Kodaira, voir [BHPVdV04])** *Toute surface complexe compacte admet un modèle minimal dans exactement une des dix classes du tableau suivant. Ce modèle minimal est unique à isomorphisme près, à part les surfaces dont les modèles minimaux appartiennent aux classes 1) et 3).*

| $X$ | $\mathrm{kod}(X)$ | $\mathrm{b}_1(X)$ |
|---|---|---|
| 1) surfaces rationnelles minimales | | 0 |
| 2) surfaces de classe VII minimales | $-\infty$ | 1 |
| 3) surfaces réglées de genre $g \geqslant 1$ | | 2g |
| 4) surfaces d'Enriques | | 0 |
| 5) surfaces bi-elliptiques | | 2 |
| 6) surfaces de Kodaira | 0 | |
| a) primaires | | 3 |
| b) secondaires | | 1 |
| 7) surfaces K3 | | 0 |
| 8) tores | | 4 |
| 9) surfaces proprement elliptiques minimales | 1 | |
| 10) surfaces de type général | 2 | pair |

Une *surface rationnelle* est une surface birationnelle au plan projectif $\mathbb{P}^2$.

Une *surface de classe VII* est une surface $X$ telle que $\mathrm{kod}(X) = -\infty$ et $\mathrm{b}_1(X) = 1$. Une surface de classe VII n'est pas projective.

Une *surface réglée* de genre $g$ est une surface $X$ qui admet une fibration localement triviale à fibre $\mathbb{P}^1$ et à groupe structural $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ sur une courbe lisse de genre $g$. Toutes les surfaces réglées sont algébriques.

Une *surface d'Enriques* est une surface $X$ telle que $\mathrm{b}_1(X) = 0$ et dont le fibré canonique $\mathcal{K}$ satisfait $\mathcal{K}^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}$ mais $\mathcal{K} \neq \mathcal{O}$. Toute surface d'Enriques est projective.

Une *surface bi-elliptique* est une surface $X$ telle que $\mathrm{b}_1(X) = 2$ qui admet une fibration localement triviale sur une courbe elliptique avec une courbe elliptique comme fibre générale. Toute surface bi-elliptique est projective.

Une *surface de Kodaira primaire* est une surface telle que $\mathrm{b}_1(X) = 3$ qui admet une fibration localement triviale sur une courbe elliptique avec une courbe elliptique comme fibre générale.

Une *surface de Kodaira secondaire* est une surface qui n'est pas elle-même une surface de Kodaira mais qui admet une surface de Kodaira primaire comme revêtement non-ramifié. Les surfaces de Kodaira (primaires ou secondaires) sont non projectives.

Une *surface K3* est une surface simplement connexe dont le fibré canonique est trivial. Il y a des surfaces K3 projectives et des surfaces K3 non projectives.

Une *surface proprement elliptique* est une surface elliptique (qui admet une fibration elliptique) $X$ telle que $\mathrm{kod}(X) = 1$.

Une *surface de type général* est une surface $X$ telle que $\mathrm{kod}(X) = 2$. Toute surface de type général est algébrique.

Il y a aussi d'autres invariants qu'on n'a pas mentionnés : dimension algébrique, nombres de Chern, etc. Une classification similaire des surfaces algébriques en caractéristique $p$ est faite par Mumford et Bombieri dans les années 70, dix ans après les travaux de Kodaira. Bien que la classification de Kodaira soit puissante, cela n'empêche pas qu'il y a encore beaucoup de questions ouvertes concernant les surfaces complexes compactes. Et la théorie des surfaces est toujours un domaine actif.

Une question non résolue dans la classification de Kodaira était de demander quelles surfaces sont kählériennes. Ceci est très important à savoir, en soi ou pour étudier d'autres problèmes, par exemple elle est utile pour étudier des groupes kählériens ainsi que des revêtements. Par le théorème de Hodge, le premier nombre de Betti d'une variété kählérienne doit être pair. Et bien sûr on savait que les surfaces projectives sont kählériennes. Mais est-ce qu'il existe une surface non kählérienne dont le premier nombre de Betti est pair ? Par exemple est-ce que toute surface K3 est kählérienne ? Pour répondre à ces questions, on a dû attendre la naissance des méthodes d'analyse très puissantes. Ce n'est qu'avec la résolution de la conjecture de Calabi par Yau que Siu est arrivé à montrer que toute surface K3 est kählérienne. Et puis on a pu avoir une réponse positive à notre question. Voir [BHPVdV04] pour une démonstration de ce théorème en utilisant la théorie analytique de Demailly.

**Théorème 5.3 (voir [BHPVdV04])** *Toute surface complexe compacte dont le premier nombre de Betti est pair est kählérienne.*

## Références


[ABC$^+$96] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo. *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, volume 44 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[BF13] J. Blanc and J. P. Furter. Topologies and structures of the Cremona groups. *Ann. of Math. (2)*, 178(3) :1173–1198, 2013.

[BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[Can11] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 174(1) :299–340, 2011.

[Can14] S. Cantat. Morphisms between Cremona groups, and characterization of rational varieties. *Compos. Math.*, 150(7) :1107–1124, 2014.

[Cat91] F. Catanese. Moduli and classification of irregular Kaehler manifolds (and algebraic varieties) with Albanese general type fibrations. *Invent. Math.*, 104(2) :263–289, 1991.

[CHK13] B. Claudon, A. Höring, and J. Kollár. Algebraic varieties with quasi-projective universal cover. *J. Reine Angew. Math.*, 679 :207–221, 2013.

[DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.

[EKPR12] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev, and M. Ramachandran. Linear Shafarevich conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 176(3) :1545–1581, 2012.

[Gro89] M. Gromov. Sur le groupe fondamental d'une variété kählérienne. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 308(3) :67–70, 1989.

[KR98] L. Katzarkov and M. Ramachandran. On the universal coverings of algebraic surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(4) :525–535, 1998.

[Man86] Yu. I. Manin. *Cubic forms*, volume 4 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1986.

[Ser10] J. P. Serre. Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. *Astérisque*, (332) :Exp. No. 1000, vii, 75–100, 2010.

[Sha74] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.