Introduction au domaine de recherche : Densité locale motivique

Arthur Forey

20 octobre 2014

L'objet de ces pages est la présentation d'une notion de densité locale motivique. Intuitivement, la densité locale mesure la manière dont un ensemble emplit l'espace localement. Historiquement, cette notion a été étudiée dans les cadres complexes, réels et p-adiques, que nous présenterons dans une première partie. Nous allons définir une densité locale dans certains corps valués pour lesquels il n'existe pas de mesure classique. En revanche, la théorie de l'intégration motivique permet d'attribuer un volume à certains ensembles, volume qui n'est pas un nombre réel, mais un élément d'un groupe de Grothendieck localisé, c'est-à-dire une classe d'isomorphisme de variétés. La deuxième partie est une introduction à cette théorie. La troisième partie consistera à définir la densité locale de certains ensembles définis dans des corps valués henséliens, en utilisant la mesure motivique.

Table des matières

1 Densité locale classique

Soit K un corps muni d'une distance et d'une mesure μ. La densité locale d'un ensemble $X \subseteq K^n$ de dimension d, en un point $x \in K^n$ est la limite si elle existe

$$\Theta_d(X, x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu_d(X \cap B(x, r))}{\mu_d(B_d(x, r))},$$

où $B(x, r)$ est la boule fermée de centre x et rayon r. Si X est une variété lisse réelle ou complexe de dimension d, la densité locale existe et vaut 1 en tout point de X. Cette notion devient intéressante quand X a des points singuliers, auxquels elle attribue un invariant.

1.1 Densité complexe

Elle a été introduite dans le cas complexe par Lelong dans [Lel57], où il montre l'existence de la densité locale des ensembles analytiques complexes, c'est-à-dire définis par des équations de fonctions analytiques complexes. Dans ce cadre, $K = \mathbb{C}$, et μ est la mesure de Lebesgue. Thie montre plus tard dans [Thi67] que dans ce cas complexe analytique, la densité est un entier strictement positif, en exprimant la densité comme somme des densités locales des composantes du cône tangent comptées avec multiplicité, et R. Draper [Dra69] l'exprime comme la multiplicité algébrique de l'anneau local de X en x. Par exemple, si X est une union de courbes algébriques, qui passent par un point x, la densité locale de X en x est la multiplicité d'intersection de ces courbes en X. Par exemple, la densité locale complexe du cusp $x^2 = y^3$ à l'origine est 2.

1.2 Densité réelle

Le cas sous-analytique réel, c'est-à-dire les ensembles définis par des équations et inéquations de fonctions analytiques réelles est étudié par Kurdyka-Raby [KR89]. Ils montrent l'existence de la densité locale et l'expriment également comme somme de densités des composantes du cône tangent comptées avec multiplicité. La densité n'est alors plus un entier, mais un nombre réel strictement positif si $x \in \overline{X}$. Dans ce cas, Comte, Lion et Rolin montrent dans [CLR00] que la densité vue comme fonction du point de base est une fonction log-analytique, c'est-à-dire un polynôme de fonctions analytiques et de logarithmes de fonctions analytiques. Par exemple, la densité locale réelle du cusp $x^2 = y^3$ à l'origine est 1.

1.3 Densité p-adique

Cluckers, Comte et Loeser étudient ensuite le cas p-adique dans [CCL12]. La mesure de Lebesgue est remplacée par la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$, ou plus généralement une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$. Contrairement aux cas réels et complexes, la suite des volumes locaux normalisés ne converge pas toujours, mais ils montrent qu'elle a une convergence cyclique, c'est-à-dire qu'ils lui attribuent une limite en utilisant une moyenne de Cesàro. On définira le même procédé dans le cadre motivique dans la section 3.1. La densité p-adique du cusp à l'origine est $1/2$, par un calcul similaire à celui de l'exemple 3.1.

2 Intégration motivique

Batyrev montre que deux variétés de Calabi-Yau complexes birationnellement équivalentes ont les mêmes nombres de Betti. Il utilise pour cela l'intégration p-adique et les conjectures de Weil. Kontsevich remarque que l'on peut géométriser la preuve de Batyrev et montre un résultat plus fort, l'égalité des nombres de Hodge. Il montre qu'on peut attribuer un volume motivique à des objets définis dans des espaces d'arcs, et établit un théorème de changement de variable, qui permet de montrer l'égalité des volumes motiviques des deux variétés. Or ce volume motivique est défini de sorte à être un invariant additif universel de la variété, de sorte que cela prouve l'égalité des nombres de Hodge. À la différence d'une théorie de la mesure classique, l'idée principale est que la mesure n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais dans un localisé du groupe de Grothendieck des variétés définies sur le corps résiduel, c'est-à-dire du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes de variétés muni de certaines relations.

La théorie de l'intégration motivique a été développée par Denef-Loeser [DL99] dans sa forme dite géométrique, puis par Loeser-Sebag [LS03] pour les variétés rigides. En utilisant la théorie des modèles, Cluckers-Loeser [CL08] et Hrushovski-Kazhdan [HK06] construisent deux théories indépendantes très flexibles, qui permettent notamment de traiter les intégrales à paramètres.

On va présenter ici la théorie de Cluckers-Loeser [CL08], qui se place dans le cadre des corps valués henséliens de caractéristique nulle. On se limite à partir du paragraphe 2.2 au cas de la caractéristique résiduelle nulle, bien que la théorie soit valable en toute caractéristique résiduelle si l'on rajoute des composantes angulaires supérieures au langage.

2.1 Corps valués henséliens

Pour une introduction aux corps valués, on pourra consulter [EP05]. Un corps discretement valué est un corps K muni d'une valuation

$$\mathrm{val} : K^\times \to \mathbb{Z}$$

qui vérifie pour tous $x, y \in K$

$$\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y),$$

$$\mathrm{val}(x+y) \geq \min(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)).$$

On prolonge val à K en posant $\mathrm{val}(0) = +\infty$.

L'anneau de valuation $\mathcal{O} := \{x \in K \mid \mathrm{val}(x) \geq 0\}$ est un anneau local, c'est-à-dire qu'il a un unique idéal maximal $\mathfrak{M} = \{x \in K \mid \mathrm{val}(x) > 0\}$. Le quotient $k := \mathcal{O}/\mathfrak{M}$ est donc un corps, appelé corps résiduel de K. On notera $\overline{x}$ la projection de $x \in \mathcal{O}$ dans k.

Une composante angulaire est un morphisme multiplicatif $\overline{\mathrm{ac}} : K^\times \to k^\times$, vérifiant $\overline{\mathrm{ac}}(x) = \overline{x}$ si $x \in \mathcal{O}\backslash\mathfrak{M}$. Si on choisit un $\pi \in \mathcal{O}\backslash\mathfrak{M}$, on a une composante angulaire définie par

$$\overline{\mathrm{ac}}(x) = \overline{x\pi^{-\mathrm{val}(x)}}.$$

Soit $B(a,n) = \{x \in K \mid \mathrm{val}(x-a) \geq 0\}$ la boule de centre a et de rayon valuatif n ; en particulier, plus n est grand plus la boule est petite. Les $B(0,n)$ définissent une base de voisinages de 0 pour une topologie sur K, la topologie valuative. Pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$|\cdot| : x \in K \mapsto \alpha^{-\mathrm{val}(x)}$$

est une distance, qui définit la même topologie valuative. Elle vérifie une inégalité plus forte que l'inégalité triangulaire, l'inégalité ultramétrique :

$$\forall x, y \in K, \quad |x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Cela entraîne un certain nombre de propriétés exotiques à qui est habitué de la distance archimédienne usuelle sur $\mathbb{R}$. Par exemple, les boules $B(a,n)$ sont à la fois ouvertes et fermées, tout point d'une boule en est un centre, c'est à dire que pour tout $b \in B(a,n)$, $B(b,n) = B(a,n)$. Cette topologie est séparée et totalement discontinue. Elle est localement compacte si et seulement si le corps résiduel est fini, car on s'est limité à des valuations discrètes.

Un corps valué est dit hensélien s'il vérifie le lemme suivant :

Lemme 2.1. *(Hensel) Soit $P \in R[X]$ un polynôme unitaire. On note $\overline{P} \in k[X]$ sa réduction à k. On suppose qu'on a un $a \in R$ tel que $\overline{P}(\overline{a}) = 0$ et $\overline{P}'(\overline{a}) \neq 0$. Alors il existe un (unique) $b \in R$ tel que $\mathrm{val}(b-a) > 0$ et $P(b) = 0$.*

Dans un corps hensélien, on peut donc relever les racines résiduelles d'un polynôme en des vraies racines. Un corps complet pour la distance valuative est hensélien (si le groupe de valeur est $\mathbb{Z}$, ou plus généralement d'ordre 1), mais la réciproque est fausse. Tout corps valué K admet un unique henselisé K^h, c'est la plus petite extension de K vérifiant le lemme de Hensel. C'est en général une extension bien plus maniable que le complété.

Exemples 2.2.

1. Fixons un nombre premier p. Pour $x \in \mathbb{Q}$, si $x = p^n r$, où $r \in \mathbb{Q}$ est premier avec p, on définit la valuation p-adique de x par

$$\mathrm{val}_p(x) := n \in \mathbb{Z}.$$

Le corps $\mathbb{Q}$ muni de cette valuation est un corps valué, muni d'une composante angulaire définie par $\overline{\mathrm{ac}}(x) := \overline{p^{-\mathrm{val}(x)}x}$, mais il n'est pas hensélien. On appelle corps des nombres p-adiques, et on note $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette distance p-adique. Ses éléments peuvent tous s'écrire comme des séries formelles $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n p^n$, où les $a_n \in \{0, ..., p-1\}$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$. La distance p-adique fait converger ces séries.

2. Pour tout corps k, le corps des séries formelles $k((t))$ est un corps valué henselien pour la valuation
$$\mathrm{val}: \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i t^i \mapsto i_0,$$
où $a_{i_0} \neq 0$. Il a une composante angulaire donnée par
$$\overline{\mathrm{ac}}: \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i t^i \mapsto a_{i_0}.$$

2.2 Langage de Denef-Pas

On voudrait attribuer un volume à certains ensembles définis dans des corps valués henséliens. Comme pour la théorie de la mesure classique, tous les ensembles ne seront pas mesurables, on ne va attribuer un volume qu'à une classe particulière d'ensembles, les définissables dans le langage de Denef-Pas.

Pour une introduction à la théorie des modèles de la logique classique du premier ordre, on renvoie à [TZ12]. On indiquera seulement ici comment construire les définissables qui nous intéressent.

Le langage $\mathcal{L}$ de Denef-Pas est un langage formel à trois sortes notées respectivement $\mathbf{K}, \mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$. Il faut penser à $\mathbf{K}$ comme la sorte du corps valué, $\mathbf{k}$ comme la sorte du corps résiduel, et à $\mathbf{\Gamma}$ comme la sorte du groupe de valeurs. On met sur $\mathbf{K}$ le langage des anneaux, c'est à dire des constantes 0,1, et des fonctions de deux variables $+$ et $\cdot$. On met également le langage des anneaux sur $\mathbf{K}$. Sur $\mathbf{\Gamma}$ on met le langage de l'arithmétique de Presburger, constitué d'une constante 0, d'une fonction $+$, d'une relation binaire $\leq$ et de symboles de relations binaires $\equiv_n$ pour tout n. On met également un symbole de fonctions $\mathrm{val}: \mathbf{K} \to \mathbf{\Gamma}$ et $\overline{\mathrm{ac}}: \mathbf{K} \to \mathbf{k}$.

Une $\mathcal{L}$-structure est simplement un triplet d'ensembles (K, k, Γ) auquel on associe pour chaque symbole de constante, de fonction et de relation de $\mathcal{L}$ une "vraie constante", "vraie fonction", ou "vraie relation". Par exemple, pour tout corps k, $k((t))$ est une $\mathcal{L}$-structure $(k((t)), k, \mathbb{Z})$, où les symboles sont interprétés de façon naturelle : le symbole "$+$" sur $\mathbf{K}$ s'interprète comme l'addition usuelle sur $k((t))$, la fonction "val" s'interprète comme la valuation, la relation $\equiv_n$ est la congruence modulo n...

Les $\mathcal{L}$-formules sont construites récursivement à partir des symboles du langage $\mathcal{L}$, de variables "formelles" attachées aux sortes $\mathbf{K}, \mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$, de la conjonction, disjonction, négation, et des quantificateurs existentiels et universels (qui quantifient exclusivement sur des variables de $\mathbf{K}, \mathbf{k}$ ou $\mathbf{\Gamma}$).

Fixons maintenant, et pour tout le mémoire, un corps k de caractéristique nulle. On note $\mathcal{L}(k)$ le langage $\mathcal{L} \cup \{k((t)), k\}$, c'est-à-dire qu'on rajoute à $\mathcal{L}$ des symboles de constantes pour tous les points de $k((t))$ et k, dans les sortes correspondantes. On a une notion de $\mathcal{L}(k)$-formule, définie de manière similaire. Pour toute extension de corps $k \hookrightarrow k'$, on dit que $K = k'((t))$ est un $\mathcal{T}_k$-corps ; tout $\mathcal{T}_k$-corps s'interprète naturellement comme une $\mathcal{L}(k)$-structure, puisqu'il contient $k((t))$.

Pour toute $\mathcal{L}(k)$-formule φ, avec n variables de $\mathbf{K}$, r variables de $\mathbf{k}$ et s variables de $\mathbf{\Gamma}$, ainsi que $K = k'((t))$ un $\mathcal{T}_k$-corps, on définit les K-points de φ comme l'ensemble des $(x, \xi, \alpha) \in K^n \times (k')^r \times \mathbb{Z}^s$ tels que $\varphi(x, \xi, \alpha)$ est satisfaite dans K.

Par analogie avec la géométrie algébrique, il n'est pas très intéressant de regarder les points dans une unique extension à la fois, il vaut mieux toutes les considérer en même temps. Un définissable $X \subseteq h[n, r, s]$ est une fonction qui associe à tout $\mathcal{T}_k$-corps K un ensemble $X(K)$, tel qu'il existe une $\mathcal{L}(k)$-formule φ avec n variables de $\mathbf{K}$, r variables de $\mathbf{k}$ et s variables de $\mathbf{\Gamma}$ telle que pour tout K, on a $X(K) = \varphi(K)$. On appelle fonction définissable une fonction dont le graphe est définissable, et on note $S[n, r, s] = S \times h[n, r, s]$.

Par exemple, $X = \left\{(x, y, \xi) \in \mathbf{K}^2 \times \mathbf{k} \mid x^2 = y^3, \overline{\mathrm{ac}}(x) = \xi\right\}$ est un définissable. Sa projection sur les deux dernières variables est aussi un définissable, c'est
$$\left\{(y, \xi) \in \mathbf{K} \times \mathbf{k} \mid \exists x, (x, y, \xi) \in X\right\} = \left\{(y, \xi) \in \mathbf{K} \times \mathbf{k} \mid \overline{\mathrm{ac}}(y)^3 = \xi^2, \mathrm{val}(y) \equiv 0 \mod 2\right\}.$$

L'intérêt de travailler avec des définissables est que l'on sait généralement décrire très précisément à quoi ils ressemblent (au moins en dimension relative 1). Pour la théorie des corps valués, on dispose du théorème de décomposition cellulaire de Denef-Pas [Pas89].

Théorème 2.3 (Denef-Pas)**.** *Soit $X \subseteq S[1,0,0]$, où S est un définissable d'un corps discrètement valué hensélien de charactéristique résiduelle nulle. Alors quitte à rajouter des variables auxiliaires de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$ à X, il existe un définissable $D \subseteq S$, et des fonctions définissables $c : D \to \mathbf{K}, \xi : D \to \mathbf{k}$ et $\alpha : D \to \mathbf{\Gamma}$, tels que*

$$X = \{(d,t) \in D \times \mathbf{K} \mid \mathrm{val}(t - c(d)) = \alpha(d), \overline{\mathrm{ac}}(t - c(d)) = \xi(d)\}\,.$$

En particulier, en dimension 1, tout définissable s'écrit comme union de boules paramétrées par leur rayon et le corps résiduel (infini).

Le premier résultat important de la théorie des modèles des corps valués est le principe d'Ax-Kochen-Ershov. Il montre en particulier l'équivalence élémentaire entre les ultraproduits des $\mathbb{Q}_p$ et les ultraproduits des $\mathbb{F}_p((t))$, ce qui peut se traduire de la façon suivante.

Théorème 2.4 (Ax-Kochen-Ershov)**.** *Soit φ un $\mathcal{L}$-énoncé (i.e. une $\mathcal{L}$-formule sans variables libres). Alors φ est vrai dans tous les $\mathbb{Q}_p$ sauf un nombre fini si et seulement φ est vrai dans tous les $\mathbb{F}_p((t))$ sauf un nombre fini.*

Cela a permis en particulier de résoudre une conjecture d'Artin (voir [EP05, chapitre 6]).

Théorème 2.5 (Conjecture d'Artin)**.** *Soit d un entier fixé. Pour tout p premier, sauf un nombre fini, tout polynôme homogène de degré d en $n \geq d^2 + 1$ variables et à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ à une solution non triviale dans $\mathbb{Q}_p^n$.*

Démonstration. À degréd fixé et $n \geq d^2 + 1$ fixé, cette propriété se traduit par la $\mathcal{L}$-formule suivante :

$$\forall a_1, ..., a_s \in \mathbf{K}(\bigvee_i a_i \neq 0 \to \exists x \in \mathbf{K}^n, \bigvee_j x_j \neq 0 \wedge \sum_i a_i x^i = 0).$$

Par principe d'Ax-Kochen-Ershov, il suffit alors de montrer la propriété pour $\mathbb{F}_p((t))$, ce qui n'est pas très difficile, et était déjà connu. □

L'intégration motivique peut être vue comme une intégration p-adique "uniforme", visant à rendre compte de la remarquable similarité formelle entre les intégrales p-adiques quand on fait varier p. En un certain sens, la théorie des intégrales modiques à paramètres de Cluckers-Loeser [CL08] est une vaste généralisation du principe d'Ax-Kochen-Ershov pour des formules à paramètres. Par exemple, Cluckers-Hales-Loeser [CHL11] montrent que les égalités du lemme fondamental se traduisent comme des égalités d'intégrales motiviques, et en déduisent un transfert du lemme fondamental de $\mathbb{F}_p((t))$ à $\mathbb{Q}_p$, pour tout p assez grand, redémontrant ainsi le résultat de Walspurger [Wal06].

2.3 Fonctions constructibles motiviques

Définir le volume d'un définissable comme un nombre réel ne conduit pas à des propriétés d'uniformité satisfaisantes. La mesure motivique va être à valeurs dans un localisé du groupe de Grothendieck des variétés définies sur le corps résiduel k. Pour définir l'intégrale, se limiter à des définissables ne va pas suffire, on est amené à considérer des fonctions constructibles motiviques, classe qui sera stable par intégration. C'est cette classe que l'on va maintenant définir.

L'objectif de la mesure motivique est de coder de l'information à la fois au niveau du corps résiduel et du groupe de valeurs. Le théorème d'élimination des quantificateurs du corps valué montre que tout définissable $X \subseteq h[0,r,s]$ s'écrit comme une union finie de produits $A \times B$, où $A \subseteq \mathbf{k}^r$ et $B \subseteq \mathbf{\Gamma}^s$ sont définissables, c'est ce qu'on appelle l'orthogonalité entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$. Ce résultat nous permet de définir les intégrales sur le groupe de valeurs et sur le corps résiduel séparément, puis de tout mettre ensemble.

Soit X un définissable (quelconque). On va définir le semi-anneau des fonctions constructibles motiviques de X.

Groupe de valeurs Soit $\mathbb{A}$ l'anneau

$$\mathbb{A} := \mathbb{Z}\left[\mathbb{L}, \mathbb{L}^{-1}, \left(\frac{1}{1-\mathbb{L}^{-n}}\right)_{n\geq 1}\right].$$

Pour tout réel $q > 1$, on note $\theta_q : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ le morphisme d'anneaux engendré par $\mathbb{L} \to q$, et $\mathbb{A}_+$ le sous semi-anneau $\mathbb{A}_+ := \{a \in \mathbb{A} \mid \forall q > 1, \theta(a) \geq 0\}$.

Soit alors $\mathcal{P}(X)$ l'anneau engendré par les fonctions

— $\alpha : X \to \mathbb{Z}$ définissables,

— $\mathbb{L}^\alpha$, où α est comme ci-dessus,

— les constantes de $\mathbb{A}$.

On définit de manière analogue $\mathcal{P}_+(X)$, mais comme les fonctions à valeurs dans $\mathbb{A}_+$.

On notera $\mathcal{P}^0_+(X)$ le sous-semi-anneau de $\mathcal{P}_+(X)$ engendré par les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_Y$ pour tout définissable Y inclus dans X, et la fonction constante $\mathbb{L} - 1$.

Corps résiduel Soit $\mathcal{Q}_+(X)$ le semi-groupe abélien libre engendré par les symboles $[Y_{/X}]$, où $Y \subseteq X[0, r, 0]$, et quotienté par les relations

— $[Y_{/X}] = [Y'_{/X}]$ si Y et Y' sont isomorphes au-dessus de la projection sur X,

— $[Y_{/X}] + [Y'_{/X}] = [(Y \cup Y')_{/X}] + [(Y \cap Y')_{/X}]$,

— $[\emptyset_{/X}] = 0$.

On note $\mathcal{Q}(X)$ le groupe associé. Attention, le morphisme de groupification $\mathcal{Q}_+(X) \to \mathcal{Q}(X)$ n'est en général pas injectif.

On a une structure de semi-anneau sur $\mathcal{Q}(X)$ donnée par le produit fibré au-dessus de X :

$$[Y_{/X}] \cdot [Y'_{/X}] = [Y \times_X Y'_{/X}].$$

On identifie $[X \times \mathbf{k}^\times_{/X}] = \mathbb{L} - 1$, de sorte qu'on a une inclusion $\mathcal{P}^0_+(X) \hookrightarrow \mathcal{Q}_+(X)$.

On définit alors le semi-anneau des fonctions constructibles motiviques positives :

$$\mathcal{C}_+(X) := \mathcal{P}_+(X) \otimes_{\mathcal{P}^0_+(X)} \mathcal{Q}_+(X).$$

En utilisant l'orthogonalité entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Gamma}$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{C}_+(X[0, r, s]) \simeq \mathcal{P}_+(X[0, 0, s]) \otimes_{\mathcal{P}^0_+(X)} \mathcal{Q}_+(X[0, r, 0]).$$

2.4 Volume motivique

L'intégrale motivique se définit variable par variable. Quand on calcule une intégrale, on intègre une par une toutes les variables. Des théorèmes de type Fubini montrent que l'ordre que l'on choisit n'a pas d'importance.

Sur $\mathbf{k}$, l'intégrale est simplement la projection. Si $[Y_{/X[0,1,0]}] \in \mathcal{Q}_+(X[0, 1, 0])$, on définit

$$\mu_{/X}([Y_{/X[0,1,0]}]) := [Y_{/X}].$$

C'est purement formel, mais cela permet de garder le maximum d'informations relatives au corps résiduel.

Sur $\mathbf{\Gamma}$, l'intégrale est une somme. Si $\varphi \in \mathcal{P}_+(X[0, 0, 1])$, on dit que φ est X-intégrable si la famille $(\varphi(x, n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable pour tout $x \in X$. On définit alors

$$\mu_{/X}(\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x, n) \in \mathcal{P}_+(X).$$

Le théorème de décomposition cellulaire permet de se ramener à des sommes du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \psi(x)P(n)\mathbb{L}^{-an}$, avec a entier strictement positif, et P un polynôme, ce qui montre que ce sont bien des éléments de $\mathcal{P}_+(X)$, au vu de la définition de $\mathbb{A}$.

Sur $\mathbf{K}$, on va utiliser le théorème de Denef-Pas pour se ramener à compter des boules. Par analogie avec l'intégration p-adique, on fixe le volume d'une boule de rayon valuatif n à $\mathbb{L}^{-n}$. Si $Y \subseteq X[1, 0, 0]$, quitte à rajouter des variables auxiliaires (*i.e.* considérer $Y \subseteq X[1, r, s]$), on a

$$Y = \{(d, t) \in D \times \mathbf{K} \mid \mathrm{val}(t - c(d)) = \alpha(d), \overline{\mathrm{ac}}(t - c(d)) = \xi(d)\},$$

où D est un définissable de $X[0,r,s]$, et $\alpha : D \to \mathbb{Z}$, $\xi : D \to \mathbf{k}$ sont des fonctions définissable. On pose alors

$$\mu_{/X[0,r,s]}(Y) := [D]\mathbb{L}^{-\alpha-1}.$$

Le travail consiste alors à montrer que la définition ne dépend pas de la décomposition choisie, mais nous ne nous y aventurerons pas ici. Donnons simplement un exemple.

Exemple 2.6. Calculons l'intégrale de $X = B(0,0)$, la boule unité. Si on écrit $X = \left\{x \in \mathbf{K} \mid \overline{\mathrm{ac}}(x-\pi^{-1}) = -1, \mathrm{val}(x-\pi^{-1}) = -1\right\}$, on a directement $\mu([X]) = 1$.

Écrivons maintenant

$$\begin{aligned} X' &= \{(x,\xi) \in \mathbf{K} \times \mathbf{k} \mid \xi \neq 0, \overline{\mathrm{ac}}(x) = \xi, 0 \leq \mathrm{val}(x) \leq n\} \\ &\quad \cup \{(x,\xi) \in \mathbf{K} \times \mathbf{k} \mid \overline{\mathrm{ac}}(x-\pi^n) = \xi = -1, \mathrm{val}(x-\pi^n) = n\}, \end{aligned}$$

pour un entier positif n. On a $[X'] \in \mathcal{C}_+(h[1,1,0])$, et $\mu_{/h[1,0,0]}([X']) = [X]$. On calcule alors

$$\mu_{/h[0,1,0]}([X']) = \sum_{k=0}^{n} [\mathbf{k}^\times]\mathbb{L}^{-k-1} + \mathbb{L}^{-n-1},$$

$$\begin{aligned} \mu([X]) &= \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-k-1} + \mathbb{L}^{-n-1} \\ &= (1-\mathbb{L}^{-1})\frac{1-\mathbb{L}^{-n-1}}{1-\mathbb{L}^{-1}} + \mathbb{L}^{-n-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Calculons $\mu([X]) = 1$ d'une troisième façon. On écrit

$$X' = \{(x,\xi) \in \mathbf{K} \times \mathbf{k} \mid \xi \neq 0, \overline{\mathrm{ac}}(x) = \xi, \mathrm{val}(x) \geq 0\},$$

et comme précédemment, $\mu_{/h[1,0,0]}([X']) = [X]$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu([X]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} [\mathbf{k}^\times]\mathbb{L}^{-k-1} \\ &= (\mathbb{L}-1)\frac{1}{\mathbb{L}-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dans les trois cas, on retrouve bien la même valeur.

On dispose aussi d'une formule de changement de variable, et par analogie avec la théorie de la mesure classique, on peut attribuer un volume aux objets de dimension d, même s'ils sont plongés dans des espaces de dimension supérieure, on notera cette mesure μ_d.

3 Densité motivique

Maintenant que l'on a une notion de volume pour les définissables des corps valués henséliens, en s'inspirant du cas p-adique [CCL12], on va définir la densité locale motivique d'un définissable et plus généralement d'une fonction constructible.

3.1 Valeur moyenne à l'infini

Le degré en $\mathbb{L}$ définit sur $\mathbb{A}$ une topologie et une notion de limite. En s'inspirant des cas réels et complexes, on voudrait définir la densité d'un définissable X en x comme la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_d(X \cap S(x,n))}{\mu_d(S(x,n))},$$

où $S(x,n)=\{x\in\mathbf{K}^m \mid \min_i\{\mathrm{val}(x_i)\}=n\}$ est la sphère de rayon n.

Or cette limite n'existe pas en général, si on considère par exemple

$$X=\{x\in\mathbf{K}\mid \mathrm{val}(x)=0 \mod 2\},$$

on a $X\cap S(0,n)=\emptyset$ si n est impair, et $X\cap S(0,n)=S(0,n)$ si n est pair, donc la suite oscille entre 0 et 1. Pour pallier ce problème, on va définir la densité de X comme la moyenne arithmétique de ces deux valeurs, soit 1/2. On va voir que c'est un phénomène général, pour toute suite

$$\theta_n=\frac{\mu_d(X\cap S(x,n))}{\mu_d(S(x,n))},$$

on a un entier e tel que les suites extraites $(\theta_{ke+i})_{k\geq 0}$ convergent respectivement vers des d_i, et on peut définir la densité par $\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{d-1} d_i$. Dans le cas de l'exemple $X=\{x\in\mathbf{K}\mid \mathrm{val}(x)=0 \mod 2\}$, on trouve alors une densité de 1/2.

Soit $\varphi\in\mathcal{P}_+(\mathbb{Z})$ une fonction bornée. Par décomposition cellulaire de Presburger, il existe un entier $e>0$ tel que pour tout $i=0,...,e-1$, il existe des $a_{i,j}\in\mathbb{A}_+$, des $\alpha_{i,j}\in\mathbb{N},\beta_{i,j}\in\mathbb{Z}$ tels que

$$\varphi(ke+i)=\sum_{j=0}^{l_i} a_{i,j}n^{\alpha_{i,j}}\mathbb{L}^{\beta_{i,j}}.$$

Comme φ est bornée, on a $\beta_{i,j}\leq 0$, et pour $\beta_{i,j_0}=0$, on a $\alpha_{i,j_0}=0$, de sorte que pour $d_i:=a_{i,j_0}$, on a $\lim_{k\to+\infty}\varphi(ke+i)=d_i$. On pose alors

$$\mathrm{MV}_\infty(\varphi):=\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{e-1} d_i,$$

c'est la valeur moyenne à l'infini de φ.

Cette définition s'étend canoniquement à $\mathcal{C}_+(\mathbb{Z})$ en utilisant l'isomorphisme d'orthogonalité.

3.2 Densité locale

Soit $\varphi\in\mathcal{C}_+(\mathbf{K}^n)$ localement bornée, de support de dimension d, et $x\in\mathbf{K}^n$. Soit

$$\theta_d(\varphi)(n):=\frac{\mu_d(\varphi\cdot\mathbf{1}_{B(x,n)})}{\mu_d(B(0,n))}.$$

On définit la densité locale motivique de φ en x par

$$\Theta_d(\varphi,x):=\mathrm{MV}_\infty(\theta_d(\varphi)).$$

Si $\varphi=\mathbf{1}_{B(x,n)}$, on note $\Theta_d(X,x)=\Theta_d(\mathbf{1}_{B(x,n)},x)$. Comme φ est localement bornée, $\theta_d(\varphi)$ est bien définie, au moins pour n assez grand, ainsi que bornée, de sorte que sa valeur moyenne à l'infini est bien définie.

Par un calcul direct, on voit que dans la définition de la densité, on peut remplacer les boules par des sphères $S(x,n)=\{y\in\mathbf{K}^n\mid \min_i\{\mathrm{val}(y_i-x_i)\}=n\}$.

Exemple 3.1. On a déjà donné plus haut un exemple qui montre la nécessité de considérer la valeur moyenne à l'infini. On pourrait penser que ce phénomène apparaît uniquement quand on considère des ensembles définis à l'aide de la fonction val. Il n'en est rien, comme le montre l'exemple du cusp $X=\left\{(x,y)\in\mathbf{K}\mid x^2=y^3\right\}$:

Si n impair, $X\cap S(0,n)=\emptyset$. Pour $n\geq 0$ pair, on a

$$\begin{aligned}
\mu_1(X\cap S(0,n)) &= \{(x,y,\eta)\in\mathbf{K}^2\times\mathbf{k}\mid x^2=y^3,\mathrm{val}(y)=n,\\
&\qquad \mathrm{val}(y)\equiv 0 \mod 2,\overline{\mathrm{ac}}(x)=\eta,\overline{\mathrm{ac}}(y)^3=\eta^2\}\\
&= \left\{(y,\eta)\in\mathbf{K}\times\mathbf{k}\mid \mathrm{val}(y)=n,\overline{\mathrm{ac}}(y)^3=\eta^2\right\}\\
&= [\nu^3=\eta^2,\eta\neq 0]\mathbb{L}^{-n-1}\\
&= (\mathbb{L}-1)\mathbb{L}^{-n-1}\\
&= \mu_1(S(0,n)).
\end{aligned}$$

De sorte que $\Theta_1(X,0)=1/2$.

3.3 Cône tangent

On va maintenant définir une famille de cônes tangents, et montrer que la densité locale peut être calculée sur ces cônes.

Soit $\Lambda_n = \{\lambda \in \mathbf{K}^\times \mid \overline{\mathrm{ac}}(\lambda) = 1, \mathrm{val}(\lambda) \equiv 0 \mod n\}$, et $\mathcal{D} = \{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $\Lambda \in \mathcal{D}$ et X définissable, on définit le Λ-cône tangent à X en x par

$$C_x^\Lambda(X) := \{u \in \mathbf{K} \mid \forall n \in \mathbf{\Gamma}, \exists y \in X, \exists \lambda \in \Lambda, \mathrm{val}(y-x) \geq n, \mathrm{val}(\lambda(y-x)-u) \geq n\}.$$

Il est stable par multiplication par des éléments de Λ, on dit que c'est un Λ-cône.

La déformation $\mathcal{D}(X,\Lambda,x) := \{(t,\lambda) \in \mathbf{K}^n \times \Lambda \mid x + t\lambda \in X\}$ a pour fibre spéciale $C_x^\Lambda(X)$, *i.e.* $\overline{\mathcal{D}(X,\Lambda,x)} \cap (\mathbf{K}^n \times \{0\}) = C_x^\Lambda(X)$. C'est-à-dire qu'on peut déformer X sur son cône tangent. Dans cette situation, il parait plausible que la densité locale puisse se calculer sur le cône tangent, pour peu qu'on lui attribue les bonnes multiplicités.

En effet, si on considère $X = \{y^2 = x^4\}$, le Λ_1-cône est $C_0^{\Lambda_1}(X) = \mathbf{K} \times \{0\}$, et on doit lui attribuer la multiplicité 2 pour retrouver la densité locale $\Theta_1(X)(0) = 2$. En revanche, il serait trop naïf de toujours définir la multiplicité comme un entier, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2. On se place dans le cas où le corps résiduel est $\mathbb{C}$. Comme on l'a vu plus haut, le cusp $X = \{y^2 = x^3\}$ a en 0 une densité de $1/2$. Le Λ_2-cône tangent est

$$C_0^{\Lambda_2}(X) = \{(0,y) \mid \mathrm{val}(y) = 0 \mod 2, \exists \eta, \overline{\mathrm{ac}}(y)^3 = \eta^2\} = \{(0,y) \mid \mathrm{val}(y) = 0 \mod 2\},$$

car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. On aurait envie de dire qu'il y a deux fibres au-dessus de chaque point du cône tangent, définies par les deux racines de $\overline{\mathrm{ac}}(y)^3 = \eta^2$, et donc d'attribuer une multiplicité de 2 en tout point du cône tangent. C'est trop naïf, car cela conduit à une densité de 1. La bonne manière de la définir est de la considérer comme un motif : la densité m_y du point $(0,y)$ du cône tangent est $[\{\eta \in \mathbf{k} \mid \eta^2 = \overline{\mathrm{ac}}(y)^3\}] \in \mathbb{C}(\{y\})$, et le cône tangent avec multiplicités est

$$CM_0^{\Lambda_2}(X) = [\{(0,y,\eta) \in \mathbf{K}^2 \times \mathbf{k} \mid \mathrm{val}(y) = 0 \mod 2, \eta^2 = \overline{\mathrm{ac}}(y)^3\}] \in \mathcal{C}_+(\mathbf{K}^2),$$

et on retrouve bien

$$\Theta_1(CM_0^{\Lambda_2}(X))(0) = \frac{1}{2}\frac{[\{(\xi,\eta) \in k^2 \mid \xi^2 = \eta^3\}] - 1}{\mathbb{L} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Pour définir le cône tangent avec multiplicités en général, on utilise le fait que pour tout définissable $X \subseteq \mathbf{K}^n$ de dimension d, il existe une fonction définissable $g : X \to \mathbf{k}^r$ telle que, à permutations des coordonnées près, pour tout $\xi \in \mathbf{k}^r$, $g^{-1}(\xi)$ est le graphe d'une application 1-analytique $U^d \to \mathbf{K}^{n-d}$.

On définit alors le Λ-cône tangent avec multiplicités comme la fonction constructible motivique

$$CM_x^\Lambda(X) := [\{(x,\xi) \in h[n,r,0] \mid x \in C_x^\Lambda(g^{-1}(\xi))\}] \in \mathcal{C}_+(\mathbf{K}^n).$$

Cela correspond à l'exemple ci-dessus. Cela ne dépend pas de la fonction g choisie, car les classes dans le groupe de Grothendieck sont définies à isomorphisme près.

On a alors le théorème attendu.

Théorème 3.3. *Soit X un définissable de $\mathbf{K}^m$ de dimension d, et x un point de $\mathbf{K}^n$. Alors il existe $\Lambda \in \mathcal{D}$ tel que*

$$\Theta_d(X)(x) = \Theta_d(CM_x^\Lambda(X))(0) \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{C}(\{x\}).$$

De plus, pour tout $\Lambda' \in \mathcal{D}, \Lambda' \subset \Lambda$, à un ensemble de dimension $< d$ près, on a

$$CM_x^\Lambda(X) = CM_x^{\Lambda'}(X).$$

4 Perspectives

Comme l'intégration de Cluckers-Loeser s'applique en toute caractéristique résiduelle, voir [CL13], on peut espérer une densité locale motivique en caractéristique résiduelle quelconque, avec le même résultat sur le cône tangent. On peut aussi envisager une généralisation au langage analytique, c'est-à-dire d'étendre le langage utilisé en rajoutant des symboles de fonctions pour les fonctions analytiques à support borné.

Soit $X \subset \mathbb{C}^n$ définie par $f = 0$, où f est un polynôme et on suppose que $0 \in X$ est une singularité isolée de X. Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, le type d'homotopie de $X \cap S(0, \varepsilon)$ ne dépend pas de ε. On l'appelle le link de X en 0 ; A. Durfee [Dur83] le munit d'une structure de Hodge mixte, ce qui permet de lui associer son polynôme de Hodge-Deligne. Si on regarde les $\mathbb{C}((t))$ points de X, on peut calculer la densité locale motivique de X en 0, qui est un élément du groupe de Grothendieck des variétés définies sur $\mathbb{C}$ (localisé). On peut alors également lui associer son polynôme de Hodge-Deligne, de sorte qu'il serait intéressant de comparer ces deux objets.

Il est également envisageable de définir une autre densité locale motivique en utilisant la théorie de Hrushovski-Kazhdan [HK06] pour les corps valués algébriquement clos et de la comparer à celle définie précédemment.

Bibliographie

[CCL12] R. Cluckers, G. Comte et F. Loeser : Local metric properties and regular stratifications of p-adic definable sets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 87(4):963–1009, 2012.

[CHL11] R. Cluckers, T. Hales et F. Loeser : Transfer principle for the fundamental lemma. *In On the stabilization of the trace formula*, volume 1 de *Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl.*, pages 309–347. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[CL08] R. Cluckers et F. Loeser : Constructible motivic functions and motivic integration. *Inventiones mathematicae*, 173(1):23–121, juillet 2008.

[CL13] R. Cluckers et F. Loeser : Motivic integration in all residue field characteristics for henselian discretely valued fields of characteristic zero. *to appar in J. für die reine und angewandte Math.*, 2013. arXiv :1102.3832.

[CLR00] G. Comte, J.-M. Lion et J.-P. Rolin : Nature log-analytique du volume des sous-analytiques. *Illinois J. Math.*, 44(4):884–888, 2000.

[DL99] J. Denef et F. Loeser : Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. *Invent. Math.*, 135(1):201–232, 1999.

[Dra69] R. N. Draper : Intersection theory in analytic geometry. *Mathematische Annalen*, 180(3):175–204, 1969.

[Dur83] A. Durfee : Mixed Hodge structures on punctured neighborhoods. *Duke Math. J.*, 50(4):1017–1040, 1983.

[EP05] A. Engler et A. Prestel : *Valued fields.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[HK06] E. Hrushovski et D. Kazhdan : Integration in valued fields. *In Algebraic geometry and number theory*, volume 253 de *Progr. Math.*, pages 261–405. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[KR89] K. Kurdyka et G. Raby : Densité des ensembles sous-analytiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(3):753–771, 1989.

[Lel57] P. Lelong : Intégration sur un ensemble analytique complexe. *Bull. Soc. Math. France*, 85:239–262, 1957.

[LS03] F. Loeser et J. Sebag : Motivic integration on smooth rigid varieties and invariants of degenerations. *Duke Math. J.*, 119(2):315–344, 2003.

[Pas89] J. Pas : Uniform p-adic cell decomposition and local zeta functions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 399:137–172, 1989.

[Thi67] P. R. Thie : The Lelong number of a point of a complex analytic set. *Math. Ann.*, 172:269–312, 1967.

[TZ12] K. Tent et M. Ziegler : *A course in model theory*, volume 40 de *Lecture Notes in Logic.* Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[Wal06] J.-L. Waldspurger : Endoscopie et changement de caractéristique. *J. Inst. Math. Jussieu*, 5(3): 423–525, 2006.