Projet de thèse: l'étude des fonctions BV à valeurs sur le cercle S^1

Radu Ignat
Sous la direction de Haïm Brezis

28 juillet 2003

Motivée par l'étude de l'équation de Ginzburg-Landau et la théorie du degré, on constate une recherche asiduée sur la structure de l'espace des fonctions à valeurs sur le cercle S^1 ayant une certaine régularité (par exemple $W^{s,p}$, BMO, VMO). Dans ce cadre, les questions principales à résoudre sont : la problématique du relèvement des fonctions à valeurs sur le cercle, la densité des sous-ensembles de fonctions régulières dans les espaces considérés, l'étude des singularités topologiques de fonctions $W^{s,p}$ à valeurs sur le cercle S^1 etc. Le but de ma thèse est de transposer cette problèmatique pour les fonctions BV à valeurs sur le cercle.

Dans la suite, je présente une introduction à l'équation de Ginzburg-Landau ; dans la section 2, je fais une esquisse des résultats connus sur le relèvement des fonctions à valeurs dans S^1 et je présente un premier résultat pour le relèvement des fonctions BV. Dans la dernière partie, je discute quelques problèmes concrets de recherche pour les fonctions BV à valeurs sur le cercle.

1 Introduction à l'équation de Ginzburg-Landau.

La théorie de Ginzburg-Landau fournit un modèle très utilisé dans l'étude des phénomènes de transition de phase qui apparaissent dans les supraconducteurs et les superfluides.

Soit $G \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, régulier avec la frontière $\Omega = \partial G$ simplement connexe. Soit $g : \Omega \mapsto S^1$ une application régulière que l'on écrit $g = e^{i\varphi_0}$ sur Ω où $\varphi_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est une application régulière. On veut résoudre le problème de minimisation

$$\operatorname*{Min}_{u \in H^1_g(G,S^1)} \int_G |\nabla u|^2, \tag{1}$$

où $\quad H^1_g(G,S^1) = \{u \in L^2(G,\mathbb{C}) \,|\, \nabla u \in \left(L^2(G,\mathbb{C})\right)^3,\ |u| = 1 \text{ p.p. sur } G \text{ et } u = g \text{ sur } \Omega\}.$

Ce problème a bien un sens puisque $H^1_g(G,S^1) \neq \varnothing$. En effet, il suffit de prolonger φ_0 sur G par une fonction régulière $\varphi : G \mapsto \mathbb{R}$ et alors $e^{i\varphi} \in H^1_g(G,S^1)$.

L'équation d'Euler-Lagrange associée au problème (1) est le système non linéaire couplé

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = u_1 |\nabla u|^2 & \text{sur } G \\ -\Delta u_2 = u_2 |\nabla u|^2 & \text{sur } G \\ u = (u_1,u_2) = g & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Théorème 1.1 *Il existe une unique solution $u_* \in H^1_g(G,S^1)$ pour le problème (1) et $u_* = e^{i\varphi_*}$ où φ_* est la solution (régulière) de l'équation*

$$\begin{cases} \Delta \varphi_* = 0 & \textit{sur } G \\ \varphi_* = \varphi_0 & \textit{sur } \Omega. \end{cases}$$

Dans la théorie des superfluides et des superconducteurs, où la modélisation mathématique ressemble à (1), les "solutions" décrites dans la littérature physique comportent des singularités : des points de vorticité (en 2-d) et lignes de vorticité (en 3-d). Pour transposer cette observation, l'idée est de considérer des données au bord qui admettent des singularités. Un exemple important est donné par les fonctions $g : \Omega \mapsto S^1$ qui sont régulières sur Ω sauf un nombre fini de points $a_i \in \Omega$ et que près de a_i

$$g(z) \sim \left(\frac{z - a_i}{|z - a_i|} \right)^{d_i}, \quad z \in \Omega \tag{3}$$

modulo une rotation; ici $d_i = \deg(g, a_i) \in \mathbb{Z}$. Pour simplifier, on suppose que Ω est plat près de a_i de manière que le membre gauche de (3) prend les valeurs sur le cercle S^1. La condition naturelle que $g \in H^{1/2}(\Omega, S^1)$ impose que

$$\deg(g, \Omega) = 0 \text{ i.e. } \sum d_i = 0.$$

Mais pour g de la forme (3), l'espace naturel d'énergie $H^1_g(G, S^1) = \varnothing$ et donc le problème (1) n'a plus de sens. On aimerait modifier légèrement le problème, en espérant un comportement asymptotique. C'est ici que le mécanisme de Ginzburg-Landau joue un rôle essentiel : on relaxe la contrainte $u : G \mapsto S^1$ (qui est le coeur de l'obstruction topologique) et on la remplace par une "pénalisation". Plus précisément, on considère toutes les fonctions $u : G \mapsto \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, mais l'energie standard $\int_G |\nabla u|^2$ est remplacée par l'énergie de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (1 - |u|^2)^2$$

avec le (petit) parametre $\varepsilon > 0$. La stratégie est d'étudier le problème approché

$$\operatorname*{Min}_{u \in H^1_g(G, \mathbb{R}^2)} E_\varepsilon(u)$$

et d'analyser le comportement limite des minimiseurs u_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

Le terme $\frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (1 - |u|^2)^2$ pénalise le fait que $|u|$ peut être différent de 1. Alors, plus ε est petit, plus cette pénalisation est importante. La constante ε dépend du matériau et de sa température. Dans le cas des applications d'intérêt pour la physique, ε est extrement petit, donc il est naturel de faire une analyse asymptotique des phénomènes qui apparaissent lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce programme a été initié par F.Bethuel, H.Brezis et F.Hélein [BBH] en 2-d et continué par Rivière [R] en 3-d.

On introduit maintenant la notion de connexion minimale pour la donnée au bord g. Les points a_i avec $d_i > 0$ (resp. $d_i < 0$) sont appelés positifs (resp. négatifs). On écrit les points positifs avec chaque a_i répété d_i fois : $p_1, \ldots, p_k$. Puisque $\sum d_i = 0$, on aura le même nombre de points négatifs qu'on écrit : $n_1, \ldots, n_k$. Les points a_i avec degré zero i.e. les singularités non-topologiques, sont omis. On appelle *longueur de la connexion minimale entre les points* (p_i) *et* (n_i),

$$L(g) = \operatorname*{Min}_{\sigma \in S_k} \sum_{i=1}^{k} d_G(p_i, n_{\sigma(i)}),$$

où S_k est le groupe de permutations de $\{1, \ldots, k\}$ et d_G est la distance géodésique dans G. Pour chaque $\tilde{\sigma} \in S_k$ telle que $L(g) = \sum_{i=1}^{k} d_G(p_i, n_{\tilde{\sigma}(i)})$, toute réunion de segments géodésiques $\Sigma = \cup_{i=1}^{k} [p_i, n_{\tilde{\sigma}(i)}]_G$ est une *connexion minimale entre* (p_i) *et* (n_i).

Le plus important résultat est le suivant :

Théorème 1.2 *(Rivière)*

Il existe une sous-suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $u_{\varepsilon_n} \to u_*$ dans tout point de G sauf sur une connexion minimale Σ entre (p_i) et (n_i). De plus, u_* est régulier sur $\bar{G} \setminus \Sigma$ et u_* satisfait les équations des fonctions harmoniques (2) *sur $G \setminus \Sigma$.*

J.Bourgain, H.Brezis et P.Mironescu [BBM2] ont étudié le cas général d'une donnée au bord $g \in H^{1/2}(\Omega, S^1)$.

2 Relèvement des fonctions à valeurs sur le cercle S^1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u : \Omega \to S^1$ une fonction mesurable. Un relèvement de u est une fonction mesurable $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$u(x) = e^{i\varphi(x)}$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Une question naturelle est de savoir s'il existe un relèvement φ qui préserve la régularité de la fonction u. Par exemple, si Ω est simplement connexe et u est continue (resp. dans $C^k(\Omega, S^1)$), alors on sait qu'on peut trouver un relèvement φ continu (resp. dans $C^k(\Omega, \mathbb{R})$).

Dans la section précédente, on se rend compte que la résolution de l'équation de Ginzburg-Landau nécessite l'étude du relèvement dans certains espaces de Sobolev. C'est pourquoi dans les dernières années il y avait beaucoup de recherche sur ce thème. Le premier résultat de ce type a été donné par Bethuel et Zheng [BZ]. Avant le présenter, on rappelle quelques notations pour les espaces de Sobolev : si $p \geq 1$, $0 < s < 1$ et $m, q \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^q) &= \left\{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^q) \,|\, D^\alpha u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^q) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \right\} \\ W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^q) &= \left\{ u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^q) \,|\, \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \, dx \, dy < +\infty \right\} \\ W^{m+s,p}(\Omega, \mathbb{R}^q) &= \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^q) \,|\, D^\alpha u \in W^{s,p} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| = m \right\} \end{aligned}$$

et $u \in W^{m,p}(\Omega, S^1)$ (resp. $W^{s,p}(\Omega, S^1)$) si $u \in W^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ (resp. $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$) et $|u| = 1$ p.p. dans Ω. On note $H^s := W^{s,2}$.

Théorème 2.1 *(Bethuel et Zheng)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, un ouvert borné, régulier et simplement connexe. Alors
i) si $p \geq 2$, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega, S^1)$ il existe un relèvement $\varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$. De plus, la fonction φ est unique, modulo 2π.
ii) si $1 \leq p < 2$, alors il existe $u \in W^{1,p}(\Omega, S^1)$ qui n'admet pas de relèvement dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$.

Un exemple simple pour ii) est de considérer $N = 2$, $0 \in \Omega$ et

$$u(x) = \frac{x}{|x|}. \tag{4}$$

Plus tard Bourgain, Brezis et Mironescu [BBM1] ont analysé la même question dans le cadre général des espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Omega; S^1)$, $0 < s < \infty$ et $1 < p < \infty$. Ils donnent une description complète, caractérisant en fonction de N, s et p tous les cas où le relèvement est toujours possible dans $W^{s,p}$ et les cas où il existe des fonctions $u \in W^{s,p}(\Omega; S^1)$ sans relèvement dans $W^{s,p}$. Plus précisément,

Théorème 2.2 *(Bourgain, Brezis et Mironescu)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert (régulier) borné, simplement connexe.
i) Si $N = 1$, $0 < s < \infty$ et $1 < p < \infty$, alors la réponse au problème du relèvement dans $W^{s,p}$ est toujours positive.
ii) Si $N \geq 2$, $0 < s < 1$ et $1 < p < \infty$, alors la réponse au problème du relèvement dans $W^{s,p}$ est

$$\begin{cases} \textit{positive} & \textit{si} \ \ sp < 1 \ \ \textit{ou} \ \ sp \geq N \\ \textit{négative} & \textit{si} \ \ 1 \leq sp < N \end{cases}$$

iii) Si $N \geq 2$, $1 \leq s < \infty$ et $1 < p < \infty$, alors la réponse au problème du relèvement dans $W^{s,p}$ est

$$\begin{cases} \textit{positive} & \textit{si } sp \geq 2 \\ \textit{négative} & \textit{si } sp < 2 \end{cases}$$

Dans ces énoncés, réponse *positive* signifie que pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega; S^1)$ il existe un relèvement $\varphi \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R})$ et réponse *négative* signifie qu'il existe de fonctions $u \in W^{s,p}(\Omega; S^1)$ qui n'admettent pas de relèvement dans $W^{s,p}$.

Si $0 < s < \infty$, $p \geq 1$ et $sp \geq 1$, on a l'unicité (modulo 2π) du relèvement $W^{s,p}$ i.e. si $u \in W^{s,p}(\Omega, S^1)$ admet deux relèvements $\varphi_1, \varphi_2 \in W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R})$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 2\pi k$ p.p. dans Ω. C'est une conséquence immediate du résultat suivant de Bourgain, Brezis et Mironescu [BBM] :

Théorème 2.3 *Soit Ω un ouvert connexe dans $\mathbb{R}^N$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable qui satisfait*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \frac{dx\,dy}{|x-y|^N} < +\infty,$$

alors f est constante (p.p. dans Ω). Plus généralement, si $p \geq 1$ et

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^p} \frac{dx\,dy}{|x-y|^N} < +\infty,$$

alors la même conclusion reste vraie.

Dans le papier [I], je présente une généralisation de ce résultat. Je donne des conditions nécessaires et suffisantes pour les fonctions continues $\omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ de manière que toute fonction mesurable satisfaisant la condition

$$\int_\Omega \int_\Omega \omega\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}\right) \frac{dx\,dy}{|x-y|^N} < +\infty,$$

soit constante (p.p. dans Ω).

Puisque dans l'équation de Ginzburg-Landau la donnée au bord g est normalment dans $H^{1/2} = W^{1/2,2}$, on est très intéressé dans la structure de $H^{1/2}(\Omega, S^1)$ (on pense à Ω de dimension 2). On remarque d'abord qu'on peut définir $L(g)$ pour une fonction $g \in H^{1/2}(\Omega, S^1)$ quelconque. En effet, on sait que l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{f \in H^{1/2}(\Omega, S^1) \,|\, f \text{ de classe } C^\infty \text{ sur } \Omega \text{ sauf sur un nombre fini de points}\}$$

est dense dans $H^{1/2}(\Omega, S^1)$ (voir [R2]). Si $g_n \to g$ dans $H^{1/2}$ et $g_n \in \mathcal{R}$ alors la limite $\lim_{n\to\infty} L(g_n)$ existe et on la note $L(g)$. Concernant le problème du relèvement, d'après le Théorème 2.2, on voit qu'en général on ne peut pas relever la fonction g dans $H^{1/2}$. Dans ce contexte, on présente le résultat suivant de Bourgain, Brezis et Mironescu [BBM2] :

Théorème 2.4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné simplement connexe. Pour tout $g \in H^{1/2}(\Omega, S^1)$ il existe un relèvement $\varphi \in H^{1/2} + BV(\Omega, \mathbb{R})$.*

Remarque 2.5 *Le relèvement φ du théorème précédent n'est pas unique (voir l'exemple (4)). Dans [BBM2], les auteurs trouvent une borne inférieure pour la partie BV de tout relèvement possible pour une fonction donnée $g \in H^{1/2}(\Omega, S^1)$:*

$$\inf\{|\varphi_2|_{\mathrm{BV}} \,|\, g = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \varphi_1 \in H^{1/2}, \varphi_2 \in BV\} \geq 4\pi L(g). \tag{5}$$

Dans le papier [DI], on étudie le problème du relèvement dans le cas des fonctions à variation bornée; pour un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^N$ on rappelle que $u \in \mathrm{BV}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si $u \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ et sa différentielle est une mesure (matrice) de Radon i.e.

$$|u|_{\mathrm{BV}} := \sup \{ \int_\Omega \sum_{i=1}^m u_i \operatorname{div} g_i \, dx \mid g_i \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), \ \sum_{i=1}^m |g_i(x)|^2 \le 1 \ \forall x \in \Omega \} < \infty$$

où $|\cdot|$ est la norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.6 *(Dávila et Ignat)*
Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in \mathrm{BV}(\Omega; S^1)$. Alors il existe un relèvement $\varphi \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R})$ de u tel que

$$|\varphi|_{\mathrm{BV}} \le 2|u|_{\mathrm{BV}}. \tag{6}$$

Si $N \ge 2$ la constante 2 est optimale (voir l'exemple (4) et penser à (5)). En dimension $N = 1$ on peut trouver un relèvement φ tel que $|\varphi|_{\mathrm{BV}} \le \frac{\pi}{2}|u|_{\mathrm{BV}}$.

Si $u \in W^{1,1}(\Omega; S^1)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné régulier et simplement connexe, il était connu que u a un relèvement $\varphi \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R})$ qui satisfait (6) (communiqué par H. Brezis et P. Mironescu). L'idée est d'utiliser le résultat de densité de Bethuel and Zheng [BZ] pour se réduire au cas où u est régulier sauf dans un nombre fini des points. Pour un tel u on peut construire un relèvement dont l'ensemble de sauts est exactement une connexion minimale entre les singularités (par rapport à leur degré) de u et la frontière de Ω. Ce relèvement satisfait la condition (6). Ces outils ne peuvent pas s'appliquer au cas de fonctions à variation bornée.

L'idée de la démonstration du Théorème 2.6 est de considérer la fonction $L : S^1 \to \mathbb{R}$, $L(e^{i\theta}) = \theta \quad \forall -\pi \le \theta < \pi$. Alors $\varphi = L(u)$ est un relèvement (mesurable) de u, ainsi que toutes les fonctions $L(e^{i\alpha}u) - \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. En suite on montre que la fonction $\alpha \mapsto |L(e^{i\alpha}u)|_{\mathrm{BV}}$ est semi-continue inférieurement et qu'on a

$$\int_0^{2\pi} |L(e^{i\alpha}u)|_{\mathrm{BV}} \, d\alpha \le 4\pi |u|_{\mathrm{BV}}.$$

Corollaire 2.7 *Soit $u \in \mathrm{BV}(\Omega; S^1)$. Alors il existe une suite $u_k \in C^\infty(\Omega; S^1) \cap \mathrm{BV}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ p.p. et*

$$\limsup_{k \to \infty} |u_k|_{\mathrm{BV}} \le 2|u|_{\mathrm{BV}}.$$

Remarque 2.8 *Si on note*

$$SBV(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathrm{BV}(\Omega; \mathbb{R}^m) \, : \, D^c u \equiv 0\}$$

(où $D^c u$ est la partie Cantor de la différentielle Du), alors pour tout $u \in SBV(\Omega; S^1)$ il existe un relèvement $\varphi \in SBV(\Omega; \mathbb{R})$ tel que $|\varphi|_{\mathrm{BV}} \le 2|u|_{\mathrm{BV}}$.

Concernant le problème de l'existence du relèvement dans des autres espaces, on mentione aussi le travail de Coifman et Meyer [CM], qui montrent que si $u : \mathbb{R} \to S^1$ est BMO et $\|u\|_{BMO} < \gamma$ (où $\gamma > 0$ est une constante universelle) alors u a un relèvement dans BMO. On dit que $u \in BMO(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et

$$\|u\|_{BMO} = \sup_{x \in \Omega, \, \varepsilon > 0} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \fint_{B_\varepsilon(x)} f(z) \, dz \,| \, dy < \infty.$$

Plus tard, Brezis et Nirenberg [BN] ont prouvé ce résultat pour des ouverts Ω quelconques, ainsi que pour tout $u \in$ VMO il existe un relèvement $\varphi \in VMO$. Par définition, $u \in VMO(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et

$$\sup_{x \in \Omega} \fint_{B_\varepsilon(x)} |f(y) - \fint_{B_\varepsilon(x)} f(z) \, dz \,| \, dy \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Ce dernier résultat est très important pour la théorie du degré généralisée au cas des fonctions VMO.

Références

[AD] L. Ambrosio and G. Dal Maso, *A general chain rule for distributional derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 691–702.

[BBH] F. Bethuel, H. Brezis, F. Hélein *Ginzburg-Landau Vortices*, Birkhäuser, 1994

[BZ] F. Bethuel and X. M. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 60–75.

[BBM] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, in Optimal Control and Partial Differential Equations, (J.L. Menaldi, eds.), IOS Press, 2001, pp. 439-455

[BBM1] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu, *Lifting in Sobolev spaces*, J. Anal. Math. **80** (2000), 37–86.

[BBM2] J. Bourgain , H. Brezis, P. Mironescu $H^{1/2}$ *maps with values into the circle : Minimal connections, lifting and Ginzburg-Landau equation* (à paraître)

[Br] H. Brezis, *The interplay between analysis and topology in some nonlinear PDE problems.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **40** (2003), no. 2, 179–201

[BCL] H. Brezis, J.M. Coron and E.H. Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649–705.

[BN] H. Brezis and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 197–263.

[CM] R. R. Coifman and Y. Meyer, *Une généralisation du théorème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy*, Fourier analysis (Proc. Sem., El Escorial, 1979), Asoc. Mat. Española, Madrid, 1980, pp. 87–116.

[DI] J. Dávila, R. Ignat, *Lifting of BV functions with values in* S^1, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I (à paraître)

[I] R.Ignat, *On an open problem about how to recognize constant functions* , Houston Journal of Math. (à paraître)

[R] T.Rivière, *Line vortices in the U(1)- Higgs model*, Control, Opt. and Calc. of Variations **1**(1996), 77-167.

[R2] T.Rivière, *Dense subsets of* $H^{1/2}(S^2, S^1)$, Ann. of Global Anal. and Geom. **18**(2000), 517-528.