

# Opérateurs courbes en TQFT

Renaud Detcherry

Introduction au domaine de recherche sous la direction de Julien Marché

Après la découverte fondamentale d'un nouvel invariant des noeuds en 1987 par Jones, Witten, par des outils d'intégrales de chemin, définit de nouveaux invariants des variétés de dimension 3 et énonce que ces invariants font partie chacun d'une "théorie quantique topologique des champs" [W](abregé en TQFT dans ce texte). Reshitikin et Turaev formalisent les idées de Witten pour construire une série d'invariants des 3-variétés [RT]: les invariants de Reshitikin-Turaev  $\theta_p(M)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , et montrer qu'ils font partie d'une TQFT. Puis, une autre méthode, plus combinatoire, pour étendre ces invariants en TQFT est donnée par [BHMV].

En particulier, on peut associer à toute surface  $\Sigma$ , un  $\mathbf{k}$ -espace vectoriel hermitien  $V_p(\Sigma)$  (avec  $V_p(\emptyset) = \mathbf{k}$ ) et à tout cobordisme  $M$  entre deux surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  on associe un morphisme  $V_p(M)$  entre  $V_p(\Sigma_1)$  et  $V_p(\Sigma_2)$ , de sorte que pour  $M$  variété de dimension 3 (donc un cobordisme entre  $\emptyset$  et  $\emptyset$ ), on ait  $V_p(M) = \theta_p(M) \in \mathbf{k}$

Si la compabilité avec les collages/découpages et la définition assez combinatoire des invariants de Reshitikin-Turaev rendent les calculs dans ces TQFT abordables, leur interprétation est plus délicate. Toutefois, on peut lier les propriétés asymptotiques pour  $p \rightarrow \infty$  à des invariants classiques. Ici, on développera un exemple de ce fait: on définira certains morphismes en TQFT, dits "opérateurs courbes", qui sont des opérateurs  $V_p(\Sigma) \rightarrow V_p(\Sigma)$  associés à une union de courbes plongées dans une surface  $\Sigma$ , puis on discutera d'un lien asymptotique avec des représentations du groupe fondamental de  $\Sigma$ .

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction à la TQFT</b>	<b>2</b>
1.1	Chirurgie, crochet de Kauffman et invariants de Reshetikin-Turaev . . . . .	2
1.2	Théorie quantique topologique des champs . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Etude asymptotique des opérateurs courbes</b>	<b>8</b>
2.1	Définition et premiers résultats . . . . .	8
2.2	Applications . . . . .	9

## 1 Introduction à la TQFT

### 1.1 Chirurgie, crochet de Kauffman et invariants de Reshetikin-Turaev

Pour commencer, nous allons décrire une opération fondamentale en théorie des variétés de dimension 3: la chirurgie par rapport à un entrelacs. Cette opération permet, à partir d'une variété  $M$  et d'un entrelacs (en bande, ou solide)  $L$  de former une nouvelle variété. On procède de la sorte, par exemple si l'entrelacs est un noeud  $K$ :

Le noeud solide  $K$  est un plongement de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ . La variété  $M \setminus K$  a pour bord  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . On dispose d'un difféomorphisme  $h$  de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  qui échange les facteurs. La variété  $M(K)$  obtenue par chirurgie par rapport à  $K$  est  $(M \setminus K) \bigcup_h (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$ . On a donc recollé le tore solide "à l'envers".

Pour un entrelacs à plusieurs composantes, on opère de même pour chacune des composantes, qu'on retire de la variété pour les recoller "à l'envers". La chirurgie par rapport à un entrelacs permet d'obtenir une nouvelle variété à partir de l'ancienne: par exemple si  $K$  est un noeud trivial dans  $\mathbb{S}^3$  alors  $\mathbb{S}^3(K)$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . L'opération de chirurgie est fondamentale à cause du théorème suivant:

**Théorème** (Lickorish)[Li] Toute variété  $M$  orientée compacte connexe de dimension 3 est difféomorphe à une variété  $\mathbb{S}^3(L)$ , pour un certain entrelacs en bande  $L \subset \mathbb{S}^3$ .

On dit alors que  $\mathbb{S}^3(L)$  est une présentation par chirurgie de  $M$ . En outre, on dispose d'un moyen pour caractériser deux variétés présentées par chirurgie sont difféomorphes: les mouvements de Kirby.

**Théorème** (Kirby) [Kir] Deux variétés présentées par chirurgie  $\mathbb{S}^3(L)$  et  $\mathbb{S}^3(L')$  sont difféomorphes si on peut passer de  $L$  à  $L'$  par une succession d'isotopies et de mouvements  $K1$  et  $K2$  (voir figure 1).

La construction des invariants de Reshetikin-Turaev repose alors sur l'idée suivante:

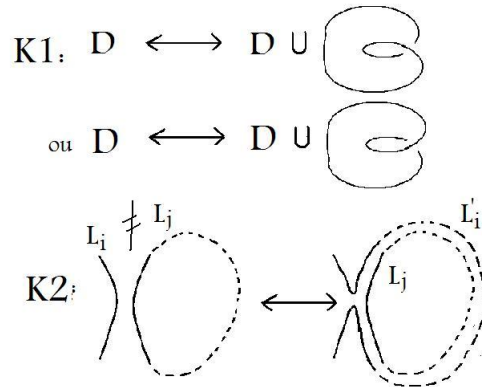



Figure 1: Les mouvements de Kirby K1 et K2. Le mouvement K1 consiste à rajouter à l'entrelacs une composante, qui est disjointe de l'entrelacs initial, et isotope à un noeud trivial avec auto-entrelacement  $+1$  ou  $-1$ . Le mouvement K2 est le glissement d'une composante par rapport à une autre,  $L_i$  est remplacé par la somme connexe de  $L_i$  et d'une composante parallèle à  $L_j$

si on définit un invariant des entrelacs en bande dans  $\mathbb{S}^3$  qui soit aussi invariant par les mouvements K1 et K2, alors on aura un invariant des 3-variétés. Les invariants de Reshetikin-Turaev se construisent à partir d'un invariant d'entrelacs en bandes: le crochet de Kauffman (qui intervient aussi dans la définition du polynôme de Jones):

**Définition:** (Crochet de Kauffman) Soit  $A$  une indéterminée, ou un élément du corps de base  $\mathbb{K}$ . Il existe un unique invariant  $\langle L \rangle$  des entrelacs  $L$  en bandes vérifiant les relations locales:

- 1) Lorsqu'on rajoute une composante trivial disjointe du reste à un diagramme de noeud solide  $D$ , on a  $\langle \bigcirc \cup D' \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle D' \rangle$
- 2) On peut résoudre les croisements: si le diagramme de noeud  $D$  contient un croisement , on peut exprimer son crochet de Kauffman en fonction des crochets de Kauffman de diagrammes obtenus à partir de  $D$  en modifiant juste au voisinage du croisement:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A\langle \text{smooth} \rangle + A^{-1}\langle \text{smooth} \rangle$$

De plus, on impose une normalisation  $\langle \emptyset \rangle = 1$ , où  $\emptyset$  désigne un entrelacs vide. On nomme cet invariant crochet de Kauffman.

On peut également définir le "multicrochet"  $\langle Q_1, \dots, Q_m \rangle_L$  d'un entrelacs  $L$  dont les  $m$  composantes sont coloriées par des polynômes  $Q_1, \dots, Q_m$  à coefficients dans  $\mathbb{K}[A]$ . Si toutes les composantes sont coloriées par des puissances de la variable  $z$ :  $Q_i = z^{n_i}$ , alors  $\langle Q_1, \dots, Q_m \rangle_L$  est égal au crochet de Kauffman de l'entrelacs  $L'$ , où la  $i$ -ème composante de  $L$  a été dupliquée  $n_i$  fois (voir figure 2). Pour des couleurs générales, autres que des monômes, on étend de sorte que le multicrochet soit  $\mathbb{K}[A]$  multilinéaire en les couleurs.

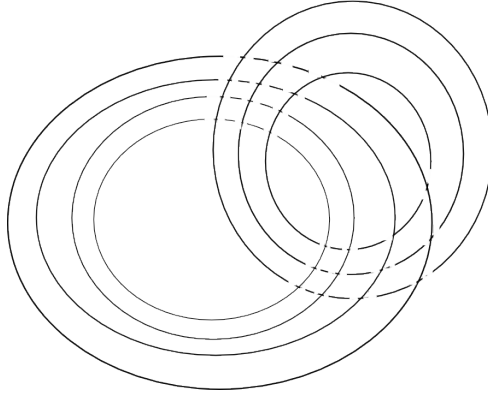


Figure 2: Exemple: entrelacs obtenu à partir d'un entrelacs de Hopf dont les composantes sont coloriées par  $z^4$  et  $z^3$

**Définition:** On dit que  $\omega \in \mathbb{K}[A][z]$  est couleur de Kirby si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{K}[A][z]$ , on a  $\langle x, \omega \rangle_{H_1} = \langle x \rangle_{U_0} \langle \omega \rangle_{U_1}$  et  $\langle \omega \rangle_{U_1} \langle \omega \rangle_{U_{-1}}$  inversible dans  $\mathbb{K}$ . Ici,  $H_1$  désigne un entrelacs de Hopf dont chaque composante a un auto-entrelacement de 1, et  $U_\epsilon$  est le noeud trivial avec auto-entrelacement  $\epsilon$ .

**Théorème** Si  $\omega$  est une couleur de Kirby alors  $\theta(\mathbb{S}^3(L)) = \frac{\langle \omega \dots \omega \rangle_L}{\langle U_1(\omega) \rangle^{b_+} \langle U_{-1}(\omega) \rangle^{b_-}}$  où  $(b_+, b_-)$  est la signature de  $B_L$ , la matrice d'entrelacement de  $L$ , est un invariant des variétés orientées compactes sans bord de dimension 3.

**Théorème[RT]** Si  $A$  est racine de l'unité d'ordre  $2p$  avec  $p$  inversible dans  $\mathbb{K}$  alors il existe une unique couleur de Kirby (à un coefficient multiplicatif près) et donc par la formule précédente, pour tout  $p$ , on dispose d'un invariant des variétés orientées compactes sans bord de dimension 3 noté  $\theta_p(M)$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q}[\zeta_{2p}]$  ( $\zeta_{2p}$  désignant une racine primitive  $2p$ -ème de l'unité)

On nomme ces invariants  $\theta_p(M)$  invariants de Reshetikin-Turaev. Comme on peut le voir ils sont aisément calculables combinatoirement à partir d'une présentation de chirurgie de  $M$ . Il est à noter que plus directement, on peut calculer le carré de leur norme à partir d'une triangulation de  $M$  (c'est la théorie des invariants de Turaev-Viro).

## 1.2 Théorie quantique topologique des champs

L'axiomatique des théories quantiques topologiques de champs cherche à formaliser la notion d'invariants locaux, qu'on peut calculer par "découpage/collage" de variétés. Rappelons brièvement la notion de cobordisme:

**Définition** Un cobordisme orienté  $(M, \Sigma_1, \Sigma_2)$  entre deux surfaces orientées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  est une variété orientée de dimension 3 à bord, telle que  $\partial M = -\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$

Deux cobordismes  $(M, \Sigma_1, \Sigma_2)$  et  $(M', \Sigma_2, \Sigma_3)$  peuvent se composer: on peut en effet recoller  $M$  et  $M'$  le long de  $\Sigma_2$  pour obtenir un cobordisme  $(M'', \Sigma_1, \Sigma_3)$ . On peut ainsi définir la catégorie des cobordismes orientés en dimension  $2+1$ , dont les objets sont les surfaces orientées, et les morphismes entre deux surfaces sont les cobordismes orientés entre ces deux surfaces (à isomorphisme près).

Partant de là, les TQFT (sur un anneau de base  $\mathbf{k}$  commutatif intègre) sont des foncteurs de la catégorie des cobordismes orientés de dimension  $2+1$  vers la catégorie des  $\mathbf{k}$ -modules: à chaque surface orientée  $\Sigma$ , on associe un module  $V(\Sigma)$ , et à chaque cobordisme  $(M, \Sigma_1, \Sigma_2)$  un morphisme  $V(M) : V(\Sigma_1) \rightarrow V(\Sigma_2)$ .

**Définition:** On dit que  $V$  est une TQFT en dimension  $2+1$  sur l'anneau de base  $\mathbf{k}$  si les axiomes suivants sont satisfaits:

1)(*Naturalité*) Si  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  est un difféomorphisme, il induit un isomorphisme  $f_{\sharp} : V(\Sigma) \xrightarrow{\sim} V(\Sigma')$ . De plus, si  $g : (M, \Sigma_0, \Sigma_1) \xrightarrow{\sim} (M', \Sigma'_0, \Sigma'_1)$  est un difféomorphisme entre cobordisme, alors le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma_0) & \xrightarrow{g|_{\Sigma_0}^{\sharp}} & V(\Sigma'_0) \\ V(M) \downarrow & & \downarrow V(M') \\ V(\Sigma_1) & \xrightarrow{g|_{\Sigma_1}^{\sharp}} & V(\Sigma'_1) \end{array}$$

2)(*Fonctorialité*) Si  $(M, \Sigma_0, \Sigma_2)$  est le cobordisme obtenu en recollant  $(M_0, \Sigma_0, \Sigma_1)$  et  $(M_1, \Sigma_1, \Sigma_2)$  le long de  $\Sigma_1$  alors  $V(M) = V(M_1) \circ V(M_0)$

3)(*Normalisation*)  $V([0, 1] \times \Sigma, \Sigma, \Sigma) = id_{V(\Sigma)}$

4)(*Multiplicativité*) Il existe des isomorphismes fonctoriels  $V(\Sigma \sqcup \Sigma') \simeq V(\Sigma) \otimes V(\Sigma')$  et  $V(\emptyset) \simeq \mathbf{k}$ , compatibles avec les isomorphismes  $V((\Sigma \sqcup \Sigma') \sqcup \Sigma'') \simeq V(\Sigma \sqcup (\Sigma' \sqcup \Sigma''))$

5)(*Symétrie*) Pour toutes surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ ,

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma \sqcup \Sigma') & \xrightarrow{\sim} & V(\Sigma' \sqcup \Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(\Sigma) \otimes V(\Sigma') & \xrightarrow{\sim} & V(\Sigma') \otimes V(\Sigma) \end{array}$$

est un diagramme commutatif

Remarquons qu'étant donnée une TQFT  $V$ , si  $M$  est un cobordisme entre  $\emptyset$  et  $\emptyset$ , c'est-à-dire une variété de dimension 3 fermée, alors  $V(M)$  est un morphisme de  $\mathbf{k}$ -module entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathbf{k}$ , et  $V(M)$  est, par la propriété de naturalité, invariant par difféomorphisme. On dit que la TQFT  $V$  étend l'invariant de variété de dimension 3  $V(M)$ .

Une question naturelle est alors de savoir s'il est possible d'étendre les invariants  $\theta_p$  en TQFT. C'est effectivement le cas, à une difficulté près: les invariants  $\theta_p$  contiennent des informations sur la signature de la matrice d'entrelacement d'une présentation de chirurgie de la variété, qui n'est pas une donnée locale. On peut néanmoins contourner cette "anomalie de signature" grâce à la notion de variétés étendues.

Pour  $M$  variété de dimension 3 fixée, sur  $\{W, \partial W = M\}$ , on a une relation d'équivalence  $W \sim W' \iff \text{sign}(W \cup -W') = 0$ , où  $\text{sign}$  désigne la signature d'une variété de dimension 4, qui est un invariant homologique. On définit alors:

**Définition:** Une variété de dimension 3 étendue est une variété de dimension 3 munie d'un entier (qui représente une classe d'équivalence des bordismes avec la même signature)

**Théorème et définition:** Il existe un invariant des 3-variétés étendues  $I_p(M, n)$  défini par:

$$\text{i) } I_p\left(\bigsqcup_i (M_i, n_i)\right) = \prod_i I_p(M_i, n_i)$$

ii) Pour  $M$  connexe,  $I_p(S^3(L), n = \text{sign}(B_L)) = \eta^{1+b_1(M)} \kappa^{\text{sign}(B_L)} \theta_p(S^3(L))$  (où  $\eta$  et  $\kappa$  sont des constantes dépendant uniquement de  $p$ )

iii) Enfin, on peut étendre  $I_p$  aux variétés avec entrelacs (i.e. aux couples  $(M, K)$ ,  $K$  étant un entrelacs dans  $M$ ):  $I_p(S^3(L), K, \text{sign}(B_L)) = \eta \langle \omega_p, \dots, \omega_p, z, \dots, z \rangle_{LUK}$

L'extension aux variétés avec entrelacs permet de mieux exprimer comment  $I_p$  varie par chirurgie (voir [BHMV]), et nous permettra de définir les opérateurs courbes dans la partie suivante. La renormalisation de l'invariant  $\theta_p$  en un invariant des variétés étendues permet alors de construire (voir [BHMV]) une TQFT qui l'étend:

**Théorème:** [BHMV] L'invariant  $I_p$  s'étend en une TQFT  $V_p$  sur la catégorie des cobordismes étendus (de dimension 2+1) avec entrelacs.

Ainsi, à  $\Sigma_g$  une surface de genre  $g$ , on associe  $V_p(\Sigma_g)$ , un  $\mathbb{K}_p$ -espace vectoriel, et à un cobordisme étendu avec entrelacs  $((M, n, K), \Sigma_0, \Sigma_1)$  on associe  $V_p(M) : V_p(\Sigma_0) \rightarrow V_p(\Sigma_1)$ .

Par ailleurs, comme on considère les cobordismes avec entrelacs, la surface  $\Sigma$  peut contenir des points marqués  $p_1, \dots, p_n$ . Dans ce cas, à toute coloration  $c'$  des points marqués (avec les  $c'_i \in \{0, \dots, r-2\}$ ), on associe un espace  $V_r(\Sigma, c')$ .

Les  $V_p(\Sigma_g)$  sont des  $\mathbb{K}_p$ -espaces vectoriels dont on aimerait comprendre la dimension. La formule de Verlinde nous permet de nous ramener à des surfaces de genre inférieur par découpage, par le procédé expliqué ci-dessous.

Considérons  $\gamma$  une courbe fermée simple non homotope à un point dans  $\Sigma$ . On peut élargir la courbe en un ruban  $C$  diffeomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . Le bord de  $\Sigma \setminus C$  est alors composé de deux cercles. On peut refermer la surface en recollant deux disques avec un point marqué de chaque côté, (voir figure 3), on obtient alors une surface  $\check{\Sigma}$ . On pose  $p = 2r$ , on a alors la formule:

$$V_p(\Sigma) = \bigoplus_{i=0}^{r-2} V_p(\check{\Sigma}, i, i)$$

La formule de Verlinde permet, en découplant par rapport à des courbes formant une dé-

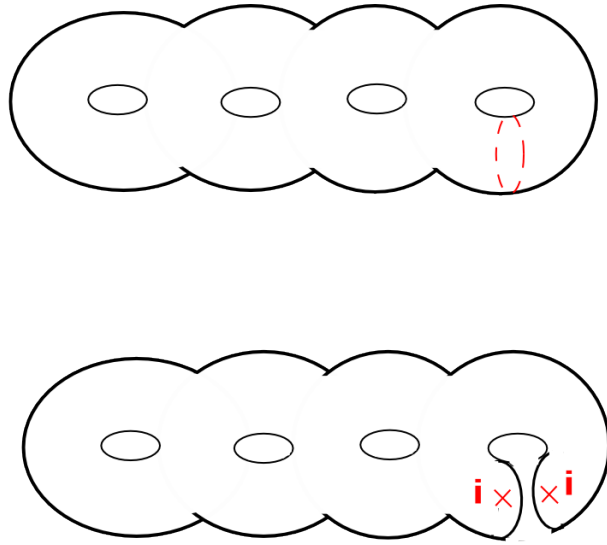


Figure 3: Dessin des surfaces  $\Sigma$  et  $\check{\Sigma}$

composition en pantalons de  $\Sigma$ , de se ramener à une surface de genre 0 contenant 3 points marqués. Or pour une sphère avec trois points marqués  $i, j, k$  on peut montrer que  $V_p(\mathbb{S}^3, i, j, k) = \mathbb{K}_p$  si  $i+j+k \equiv 0 [2]$ , si  $i, j$ , et  $k$  sont dans  $\{0, \dots, r-2\}$ ,  $|i-j| \leq k \leq |i+j|$  et  $i+j+k < 2r-2$ ; dans le cas contraire,  $V_p(\mathbb{S}^3, i, j, k) = 0$ .

Par les considérations précédentes, on peut en déduire une description plus explicite des  $V_p(\Sigma_g)$  (voir [BHMV]): considérons un graphe  $G$  en rubans (les arêtes sont de "largeur" non nulle) trivalent, dont un voisinage régulier est un corps en anse de bord  $\Sigma_g$ . Alors on dit qu'une coloration des arêtes de  $G$  est admissible si elle vérifie:

- i) Les colorations appartiennent à  $\{0, 1, \dots, r-2\}$ , où l'on pose  $p = 2r$ .
- ii) Pour tout sommet dont les arêtes adjacentes sont coloriées par  $i_1, i_2$  et  $i_3$ , on a:
  - a)  $i_1 + i_2 + i_3 \equiv 0[2]$
  - b)  $|i_1 - i_2| \leq i_3 \leq |i_1 + i_2|$

c)  $i_1 + i_2 + i_3 < 2r - 2$

A chaque coloration admissible  $c$ , il est possible d'associer une certaine combinaison linéaire

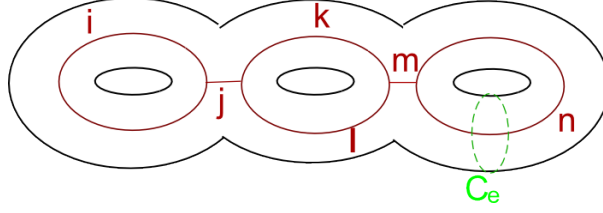


Figure 4: Schéma d'un graphe  $G$  aux arêtes coloriées par  $i, j, k, l, m$  et  $n$ , dans un corps en anse  $H_3$ . L'arête  $e$  est colorié par  $n$ , on a dessiné le cercle  $C_e$

d'entrelacs dans le corps en anse précédent, et donc un vecteur  $\phi_c$  dans  $V_p(\Sigma_g)$ . Lorsque  $c$  parcourt l'ensemble des colorations admissibles, les  $\phi_c$  forment une base de  $V_p(\Sigma_g)$ . De plus, les "règles de fusion" permettent de calculer les morphismes sur les vecteurs de la base  $\phi_c$ , voir [MV].

Lorsque  $\Sigma_g$  contient un ou plusieurs points marqués, on a de même une description d'une base de l'espace  $V_p(\Sigma_g, c')$  en terme de colorations admissibles, pour toute coloration  $c'$  des points marqués.

## 2 Etude asymptotique des opérateurs courbes

### 2.1 Définition et premiers résultats

Considérons à présent une surface  $\Sigma$ , qu'on choisira sans points marqués dans cette partie pour simplifier. Etant donné une courbe  $\gamma$ , on dispose d'un cobordisme avec entrelacs  $(M, K) = (\Sigma \times [0, 1], \gamma \times \{\frac{1}{2}\})$ . A toute courbe  $\gamma$  sur cette surface, on peut associer, d'après la construction présentée au paragraphe précédent, pour tout  $r \in \mathbb{N}$  un opérateur

$$T_r^\gamma : V_{2r}(\Sigma) \rightarrow V_{2r}(\Sigma)$$

Ces opérateurs  $T_r^\gamma$  sont appelés opérateurs courbes. On s'intéresse à leurs propriétés asymptotiques. On fixe un graphe en rubans  $G$  associé à  $\Sigma$  comme au paragraphe précédent, soit  $E$  l'ensemble de ces arêtes. Soit  $U$  l'ensemble des "colorations réelles admissibles" de  $G$ , i.e.  $U$  est l'ensemble des applications  $\tau : E \rightarrow [0, \pi]$  tel que pour tout triplet  $e, f, g$  d'arêtes adjacentes en un sommet de  $G$ , on ait  $\tau_e + \tau_f \leq \tau_g$  et  $\tau_e + \tau_f + \tau_g \leq 2\pi$ .

On s'intéresse alors aux propriétés asymptotiques des coefficients de matrices des opérateurs  $T_r^\gamma$  dans la base des  $\phi_c$ .

**Propriété** Il existe des fonctions lisses  $F_k : V \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $V$  est un voisinage ouvert de  $U \times \{0\}$  dans  $U \times [0, 1]$ , et l'indice  $k$  est une application  $E \rightarrow \mathbb{Z}$ ) tel que pour toute



couleur  $c$  on ait :

$$T_r^\gamma(\phi_c) = \sum_k F_k\left(\frac{c}{r}, \frac{1}{r}\right)\phi_{c+k}$$

On peut établir un lien entre les coefficients  $F_k$  intervenant dans le développement asymptotique ci-dessus et les représentations du groupe fondamental de  $\Sigma$ . Plus précisément, soit  $\mathcal{M}(\Sigma) = \{\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow SU_2\} / \sim$  (où  $\rho \sim \rho'$  si et seulement si  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées), et soit  $f_\gamma$  l'application  $\mathcal{M}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f_\gamma(\rho) = -Tr(\rho(\gamma))$ . On note  $C_e$  le cercle dual à  $e$  dans  $\Sigma$  (voir le schéma précédent)

**Conjecture 1**[MP] Pour toute courbe  $\gamma$  les coefficients  $F_k$  sont récursivement calculables et vérifient les propriétés suivantes:

- 1)  $F_k$  s'annule si le nombre d'intersection géométrique de  $\gamma$  avec la courbe  $C_e$  est strictement inférieur à  $k_e$
- 2)  $F_k(\cdot, 0) : U \rightarrow \mathbb{R}$  est le  $k$ -ème coefficient de Fourier de  $f_\gamma$  relativement à l'action de  $(\mathbb{S}^1)^E$  sur  $\mathcal{M}(\Sigma, t)$  (décrite dans [CM])
- 3) On dispose aussi d'une formule asymptotique au deuxième ordre: posons  $\sigma_\gamma = \sum_k F_k(\tau, \hbar)e^{ik\theta}$  où  $k \in \mathbb{Z}^E$ ,  $\theta \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^E$  et  $k\theta = \sum_{e \in E} k_e \theta_e$ . On dit que  $\sigma_\gamma$  est le " $\psi$ -symbole" de la suite d'opérateurs  $T_r^\gamma$ ). On a le développement asymptotique suivant:

$$\sigma_\gamma = f_\gamma + \left(\frac{1}{2i} \sum_e \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial \theta_e \partial \tau_e}\right) \hbar + o(\hbar)$$

Dans [MP], ces conjectures sont prouvées pour le cas du tore époiné et de la sphère à 4 trous.

Pour résoudre le cas général, on se propose de localiser le problème en utilisant une décomposition en pantalons de la surface  $\Sigma$ , et en faisant des découpages comme au paragraphe précédent. La tâche requiert alors de définir la notion d'opérateur courbe partiel, qui résulte de l'opérateur courbe initial après découpage et agit sur la TQFT du pantalon. Les formes possibles de l'intersection de la courbe  $\gamma$  avec un pantalon peuvent être décrites de façon exhaustive par les coordonnées de Dehn, il faut ensuite faire les calculs d'opérateur courbe partiel dans chacun des cas en utilisant les règles de fusion.

## 2.2 Applications

Les calculs asymptotiques précédents sont à l'origine de plusieurs applications. La première est qu'ils permettent d'établir que les opérateurs courbes  $T_r^\gamma$  sont des "opérateurs de Toeplitz": on peut tout d'abord les réinterpréter comme des opérateurs sur des espaces  $\mathcal{H}_r$  de sections holomorphes de fibrés sur une variété kählérienne  $M$ , et on a des fonctions  $f_r^\gamma$  qui sont  $C^\infty$  sur  $M$  telles que  $T_r^\gamma = T_{f_r^\gamma} = \Pi m_{f_r^\gamma}$  où  $m_{f_r^\gamma}$  désigne la multiplication par

$f_r^\gamma$  et  $\Pi$  est le projecteur orthogonal des sections  $l^2$  sur les sections holomorphes. De plus, on a un développement asymptotique

$$f_r^\gamma = \sum_{n \leq 0} r^{-n} f_{(n)}^\gamma$$

Dans ce cas,  $f_{(0)}^\gamma$  est appelé symbole principal de l'opérateur de Toeplitz  $T_r^\gamma$ , on peut montrer que  $f_{(0)}^\gamma = f_\gamma$ .

Le fait que  $T_r^\gamma$  soit un opérateur de Toeplitz de symbole principal  $f_\gamma$  est déduit de la Conjecture 1 dans [MP] (toujours dans les cas du tore épointé et de la sphère à 4 trous) et on peut espérer pouvoir faire de même dans le cas général.

Ceci peut sembler être un résultat technique, mais certaines propriétés analytiques des opérateurs de Toeplitz (par exemple des propriétés spectrales) peuvent être utiles. En particulier, Andersen dans [An], pour montrer notamment la fidélité asymptotique des  $V_p$  comme représentations du groupe des difféotopies d'une surface, introduit des opérateurs de Toeplitz proches des opérateurs courbes, donc ce travail permettrait de réinterpréter cette preuve.

De façon plus directe, la Conjecture 1 permet de calculer une asymptotique de divers invariants quantiques, par exemple [MP] retrouve une asymptotique des 6j-symboles

Pour finir, nous espérons que l'étude de l'asymptotique des opérateurs courbes pourrait prodiguer des outils pour aborder la conjecture de Witten:

**Conjecture** : Soit  $M$  une variété (compacte orientée) de dimension 3, alors

$$\theta_{2r}(M) \sim \frac{1}{2} e^{-\frac{3i\pi(1+b^1(M))}{4}} \sum_{\rho} e^{2i\pi r CS(\rho)} \tau(M; \rho)^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi \left( \frac{I_\rho}{4} + \frac{\dim(H_\rho^1) + \dim(H_\rho^0)}{8} \right)} r^{\frac{\dim(H_\rho^1) + \dim(H_\rho^0)}{2}}$$

Ici la somme porte sur les classes de conjugaison de représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $SU_2$  (dans un certain nombre de cas, il y en a un nombre fini; autrement on peut interpréter la somme comme une intégrale si l'espace des modules est non-discret),  $b^1(M)$  est le premier nombre de Betti de  $M$ ,  $\tau(M; \rho)$  désigne la torsion de Reidemeister de  $M$  pour la représentation  $\rho$ , les  $H_\rho^i$  sont des groupes d'homologie tordus de  $M$ ,  $CS(\rho)$  désigne l'invariant de Chern-Simons d'une connection plate d'holonomie  $\rho$ , et  $I_\rho$  est un entier, flot spectral d'une certaine famille d'opérateurs.

L'article [CM2] contient des résultats partiels dans cette direction, pour des variétés obtenus par chirurgie sur le noeud de huit; résultats obtenus en exploitant des propriétés asymptotiques d'opérateurs courbes.

## References

- [RT] N.Y. Reshetikhin and V.G. Turaev. *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*. Invent. Math., 92: 547-597, 1991.
- [W] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial* Comm. Math. Phys., 121, vol.3: 351-399, 1989.
- [BHMV] C.BLANCHET, N.HABEGGER, G.MASBAUM and P.VOGEL *Topological quantum field theories derived from the kauffman bracket* Topology Vol. 34, No. 4, pp. 883-927, 1995
- [MV] G. Masbaum and P. Vogel. *3-valent graphs and the Kauffman bracket* Pacific Journal of Mathematics, 164, no.2, 361-381, 1994.
- [Li] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. 76, (1962), 531-540
- [Kir] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* . Inventiones Math. 45, (1978), 35-56.
- [MP] J.Marché, T.Paul, *Toeplitz operators in TQFT via skein theory*
- [CM] L. Charles and J. Marché. *Multicurves and regular functions on the representation variety of a surface in  $SU(2)$*  To be published in Commentarii Math. Helv..
- [An] J. E. Andersen. *Asymptotic faithfulness of the quantum  $SU(n)$  representations of the mapping class groups*. Ann. of Math., 163 vol.1: 347-368, 2006.
- [Jef] L. Jeffrey *Chern-Simons-Witten Invariants of Lens Spaces and Torus Bundles, and the Semiclassical Approximation* Commun. Math. Phys. 147, 563-604 (1992)
- [CM2] L.Charles and J. Marché *Knot asymptotics II, Witten conjecture and irreducible representations*, prépublication