Correction du Partiel d'Intégration, 25/11/09

Exercice 1

a) Pour tout $t \geq 0$, $\lim_{x \to -\infty} t^x = 0$ et $0 \leq \frac{t^x}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \in L^1([1,\infty[, dt)$ pourvu que $x \leq 0$. Par convergence dominée on déduit $\lim_{-\infty} F = 0$.

D'autre part $\lim_{x \to 1} \frac{t^x}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$ avec $\int_1^\infty \frac{t}{1+t^2}\, dt = \infty$. On déduit par Fatou que $\lim_{1^-} F = \infty$.

b) On raisonne par récurrence avec $(HR)_k$: F admet une dérivée d'ordre k donnée par $F^{(k)}(x) = \int_1^\infty \frac{t^x}{1+t^2} \log^k t\, dt$.

$(HR)_0$ est juste la définition de F. Supposons $(HR)_k$. Pour tout $t \in]1,\infty[$, la fonction $x \to \frac{t^x}{1+t^2} \log^k t$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ avec pour dérivée $x \to \frac{t^x}{1+t^2} \log^{k+1} t$. Par ailleurs, pourvu que $x < 1-\varepsilon < 1$, on a $\frac{t^x}{1+t^2} \log^{k+1} t \leq \frac{t^{1-\varepsilon}}{1+t^2} \log^{k+1} t$ qui est une fonction dans $L^1([1,\infty[, dt)$.

Le théorème de dérivation des intégrales à un paramètre nous permet de conclure que $(HR)_{k+1}$ est satisfait.

c) On applique Cauchy-Schwarz à $\int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{t^x}{1+t^2}} \log t\right)\left(\sqrt{\frac{t^x}{1+t^2}}\right) dt$, et on obtient $F'(x)^2 \leq F(x) F''(x)$ grâce aux expressions de (b).

Il découle de b) que $\log F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et a pour dérivée seconde $\frac{F''F - (F')^2}{F^2} \geq 0$, i.e. $\log F$ est convexe.

Exercice 2

a) Si $x \notin Supp(\mu)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(B(x,\varepsilon)) = 0$. On prend un rationnel $r \in]0, \varepsilon/2[$ et un point à coordonnées rationnelles $y \in B(x,r)$, de sorte que $x \in B(y,r)$ et $B(y,r) \subset B(x,\varepsilon)$. Ainsi $\mu(B(y,r)) = 0$.

b) • L'argument de a) montre que le complémentaire de $Supp(\mu)$ est ouvert.

• D'après a), $\mathbb{R}^d \setminus Supp(\mu)$ est inclus dans une union dénombrable de boules $B(y,r)$ avec $\mu(B(y,r)) = 0$. Il s'ensuit que $\mu(\mathbb{R}^d \setminus Supp(\mu)) = 0$.

• Soit F fermé inclus dans $Supp(\mu)$ avec $\mu(Supp(\mu) \setminus F) = 0$. D'après le point précédent $O = \mathbb{R}^d \setminus F$ est un ouvert avec $\mu(O) = 0$ (puisque $O = (\mathbb{R}^d \setminus Supp(\mu)) \cup (Supp(\mu) \setminus F)$. Par définition de $Supp(\mu)$, on a $O \subseteq \mathbb{R}^d \setminus Supp(\mu)$ et donc $F = Supp(\mu)$.

Enfin, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mu = \sum_1^\infty 2^{-n} \delta_{x_n}$ avec $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des points rationnels dans $[0,1]$, on a $\lambda \perp \mu$, mais les supports topologiques de λ et de μ coïncident $(= [0,1])$.

Exercice 3

a) L'application $x \to y^{1/x}$ est continue, donc $x \to f(y^{1/x})$ également. Comme f est bornée et ν finie, le théorème de continuité des intégrales à un paramètre montre que $x \to \int_{\mathbb{R}_+^*} f(y^{1/x})\, \nu(dy)$ est continue.

Si Θ est un ouvert de $\mathbb{R}_+^*$, il existe une suite de fonctions continues f_n avec $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_n \uparrow \mathbb{1}_\Theta$ (prendre par exemple $f_n(y) = (n . dist(y, \Theta^c)) \wedge 1$
Par convergence monotone on a donc

$$\int f_n(y^{1/x})\, \nu(dy) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \mathbb{1}_\Theta (y^{1/x})\, \nu(dy) = \nu(\Theta^x).$$

Ainsi $x \to \nu(\Theta^x)$ est la limite d'une suite de fonctions continues, donc mesurables, et ainsi cette limite est mesurable

b) Si $A, A' \in \mathcal{M}$ avec $A \subseteq A'$, alors $\nu((A' \setminus A)^x) = \nu(A'^x) - \nu(A^x)$ est bien une fonction mesurable en la variable x.

De même, si (A_n) est une suite croissante dans $\mathcal{M}$, alors $\nu((\cup A_n)^x) = \lim_{n \to \infty} \uparrow \nu(A_n^x)$ (par convergence monotone), ce qui établit la mesurabilité de $x \to \nu((\cup A_n)^x)$.

$\mathcal{M}$ est donc une classe monotone qui contient la famille des ouverts de $\mathbb{R}_+^*$ d'après a). Cette dernière est stable par intersections finies et on conclut en appliquant le théorème des classes monotones que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$.

c) Si $A = \phi$, $\nu(\phi^x) = 0$ et on a bien $\mu \odot \nu(\phi) = 0$.

Si (A_n) est une suite de boréliens de $\mathbb{R}_+^*$ deux à deux disjoints et $A = \cup A_n$, alors $\nu(A^x) = \nu(\cup A_n^x) = \sum \nu(A_n^x)$ puisque les boréliens A_n^x sont également deux à deux disjoints. On déduit par convergence monotone ou Fubini-Tonelli que

$$\mu \odot \nu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}_+^*} \nu(A_n^x)\, \mu(dx) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu \odot \nu(A_n).$$

d) F est mesurable car composée de fonctions mesurables.

L'identité $\int_{\mathbb{R}_+^*} f \, d(\mu \odot \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} F \, d(\mu \otimes \nu)$

est satisfaite par définition lorsque $f = \mathbb{1}_A$ est l'indicatrice d'un borélien. Ceci s'étend par linéarité aux fonctions étagées puis par convergence monotone aux fonctions f mesurables positives.