Partiel Intégration & Probabilités - Décembre 07

Exercice 1

(a) $n \ln(1+\frac{f}{n}) \longrightarrow f$ quand $n \to \infty$ et d'autre part

$0 \leq n\ln(1+f/n) \leq f \in L^1(\mu)$. Par convergence dominée on a donc

$\lim_{n\to\infty} I_n = \int f \, d\mu$.

(b) Par le lemme de Fatou, on a $\liminf_{n\to\infty} \int n\ln(1+\frac{f}{n})\, d\mu \geq \int f\, d\mu = \infty$

et donc $I_n \to \infty$.

Remarque On peut aussi vérifier que $n\ln(1+\frac{f}{n})$ croît vers f quand $n \uparrow \infty$, et appliquer, aussi bien pour a) que pour b), le théorème de convergence monotone

Exercice 2

(a) Posons $\frac{1}{p} = \frac{s-t}{r-t}$ et $\frac{1}{q} = \frac{r-s}{r-t}$ de sorte que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

Pour $a, b \geq 0$, on a d'après l'inégalité de Hölder

$$\int f^{a+b} d\mu \leq \left(\int f^{ap} d\mu\right)^{1/p} \left(\int f^{bq} d\mu\right)^{1/q}$$

On choisit $ap = r$ & $bq = t$, i.e. $a = r(s-t)/(r-t)$ et $b = t(r-s)/(r-t)$

Ainsi $a+b = (rs-ts)/(r-t) = s$ et on a donc

$$\int f^s d\mu \leq \left(\int f^r d\mu\right)^{(s-t)/(r-t)} \left(\int f^t d\mu\right)^{(r-s)/(r-t)}.$$

(b) On écrit $f^p \ln f = f^{p/2} \times f^{p/2} \ln f$. Par hypothèse $f^{p/2} \in L^2(\mu)$. D'autre part, pour tout $p' < p < p''$ il existe une constante finie c telle que $|f^{p/2} \ln f| \leq c(f^{p'/2} + f^{p''/2})$. On en déduit que $f^{p/2} \ln f \in L^2(\mu)$, et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Posons ensuite $\phi(p) = \int f^p d\mu$, de sorte que $\ln \phi(p) = p \ln \|f\|_p$. La fonction $p \to f^p(x)$ a pour dérivée $f^p(x) \ln f(x)$. On a déjà observé que pour $p' < p < p''$, $|f^p(x) \ln f(x)| \leq c(f^{p'} + f^{p''}) \in L^1(\mu)$ ce qui permet d'appliquer une première fois le théorème de dérivation sous le signe $\int$. On trouve

$$\phi'(p) = \int f^p \ln f \, d\mu .$$

Le même argument montre que Φ' est dérivable, avec pour dérivée

$$\phi''(p) = \int f^p \ln^2 f \, d\mu .$$

On en déduit que $\ln \phi$ a pour dérivée seconde

$$(\phi'' \phi - \phi'^2)/\phi^2 ,$$

et cette quantité est positive d'après la première partie de la question. Donc $\ln \phi$ est bien une fonction convexe

<u>Remarque</u> On peut également établir cette propriété à partir de l'inégalité de Lyapunov.

<u>Exercice 3</u>

(a) L'application $r \to r^{-1}y$ est continue, donc $r \to f(r^{-1}y)$ également. Comme f est bornée et la mesure ν finie, le théorème de continuité des intégrales à un paramètre s'applique et donne que $r \to \int f(r^{-1}y)\nu(dy)$ est continue.

Si Θ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite de fonctions continues f_n avec $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_n \uparrow \mathbb{1}_\Theta$ (prendre, par exemple, $f_n(y) = [n \operatorname{dist}(y, \Theta^c)] \wedge 1$). Par convergence monotone, on a donc

$$\int f_n(r^{-1}y)\nu(dy) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \mathbb{1}_\Theta(r^{-1}y)\nu(dy) = \nu(r\Theta).$$

Ainsi $r \to \nu(r\Theta)$ est une limite d'une suite de fonctions continues, donc mesurables, et donc cette fonction est mesurable.

(b) Si $A, A' \in \mathcal{M}$ avec $A \subseteq A'$, alors $\nu(r(A' \setminus A)) = \nu(rA') - \nu(rA)$ est bien une fonction mesurable en la variable $r>0$.

De même, si (A_n) est une suite croissante dans $\mathcal{M}$, alors $\nu(r \bigcup A_n) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \nu(rA_n)$ (par convergence monotone), ce qui montre que $r \to \nu(r \bigcup A_n)$ est également mesurable.

$\mathcal{M}$ est donc une classe monotone qui contient d'après (a) la famille des ouverts Θ de $\mathbb{R}^d$. Cette dernière est stable par intersection finie, et donc, d'après le théorème des classes monotones, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(c) Si $A = \emptyset$, $\nu(r\emptyset) = 0$ et on a bien $\mu \odot \nu(\emptyset) = 0$.
Si (A_n) est une suite de Boréliens de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup A_n$, alors $\nu(r \bigcup A_n) = \nu(\bigcup rA_n) = \sum \nu(rA_n)$ (puisque les boréliens rA_n sont également deux à deux disjoints. On déduit (par convergence monotone, ou par le théorème de Fubini-Tonelli) que

$$\mu \odot \nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}_+^*} \nu(rA_n)\,\mu(dr) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \odot \nu(A_n).$$

(d) F est mesurable car composée de fonctions mesurables.
L'identité
$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, d(\mu \odot \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d} F \, d(\mu \otimes \nu)$$
est vérifiée par définition lorsque $f = \mathbb{1}_A$ est l'indicatrice d'un borélien. Ceci s'étend immédiatement par linéarité aux fonctions étagées, puis par convergence monotone aux fonctions f mesurables positives.

(e) En utilisant le fait que l'image de la mesure de Lebesgue λ par la dilatation $x \to r^{-1}x$ est $r^d\lambda$ à la seconde ligne ci-dessous, on trouve par Fubini-Tonelli

$$\int f \, d(\mu \odot \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \mu(dr) \int_{\mathbb{R}^d} \lambda(dy)\, f(r^{-1}y)\, \varphi(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*} \mu(dr)\, r^d \int \lambda(dx)\, f(x)\, \varphi(rx) = \int \lambda(dx)\, f(x) \left(\int \mu(dr)\, r^d \varphi(rx) \right)$$

ce qui montre que $\mu \odot \nu(dx) = \left(\int \mu(dr)\, r^d \varphi(rx) \right) \lambda(dx)$.