Corrigé du Partiel "Intégration" 25/11/2008

Exercice 1

$\sin(t^n)/t^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ si $t \in]0,1[$ et $\left|\dfrac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\right| \leq \dfrac{1}{1+t}$.

Comme $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 < \infty$, on déduit par convergence dominée que $\int_0^1 \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$. D'autre part $|\sin(t^n)| \leq 1$ et $t^{n-1} \to \infty$ quand $n \to \infty$ si $t > 1$. Comme $\int_1^\infty \frac{dt}{t(1+t)} < \infty$, on déduit par convergence dominée que $\int_1^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,dt = \ln 2}$$

$n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(1-x)}\right) \to \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]0,1[$ quand $n \to \infty$.

Or $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \infty$. On déduit du lemme de Fatou que

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} n\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{n(1-x)}\right)dx = \infty, \text{ i.e. } \lim_\infty v_n = \infty.}$$

Exercice 2

(a) Par l'inégalité des accroissements finis, on a pour $a > 1$ $|f(ax) - f(x)| \leq (a-1)\, x\, \varphi(x)$, d'où $\int_0^\infty \left|\frac{f(ax)-f(x)}{x}\right| dx \leq \int_0^\infty (a-1)\varphi(x)\,dx < \infty$.

De même, si $0 < a < 1$, $|f(x) - f(ax)| \leq (1-a)\, x\, \varphi(ax)$ et

$$\int_0^\infty \left|\frac{f(ax)-f(x)}{x}\right| dx \leq (1-a)\int_0^\infty \varphi(ax)\,dx < \infty.$$

(b) Pour chaque $x \in]0,\infty[$, la fonction $a \to \frac{f(ax)-f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0,\infty[$ avec pour dérivée $a \to f'(ax)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $|f'(ax)| \leq \varphi(\varepsilon x)$ pour tout x et $a > \varepsilon$, et comme $\int_0^\infty \varphi(\varepsilon x)\,dx = \varepsilon^{-1}\int_0^\infty \varphi(x)\,dx < \infty$ on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. On trouve que I est dérivable sur $]\varepsilon,\infty[$, avec pour dérivée

$$I'(a) = \int_0^\infty f'(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f'(x)\,dx = \frac{1}{a}\left(f(\infty)-f(0)\right).$$

Comme $I(1)=0$, on conclut que

$$I(a) = I(a) - I(1) = \left(f(\infty)-f(0)\right)\int_1^a \frac{dy}{y} = \left(f(\infty)-f(0)\right)\ln a.$$

(c) Quitte à décomposer $g = g^+ - g^-$, on peut supposer $g \geq 0$.
On a

$$f(ax) - f(x) = \int_x^{ax} g(t)\,dt = x\int_1^a g(sx)\,ds.$$

Supposons de plus $a > 1$. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on trouve

$$I(a) = \int_1^a ds \int_0^\infty g(sx)\,dx = \int_1^a \frac{ds}{s}\int_0^\infty g(y)\,dy = \left(f(\infty)-f(0)\right)\ln a.$$

Un même argument s'applique pour $0 < a \leq 1$. Enfin, par linéarité, on trouve que si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$

$$\boxed{I(a) = \left(\int_0^\infty g(y)\,dy\right)\ln a = \left(f(\infty)-f(0)\right)\ln a}$$

Exercice 3 (a) Si $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^{p,r}$, on a immédiatement $\|af\|_{p,r} = |a|\,\|f\|_{p,r}$. Si $g \in \mathcal{L}^{p,r}$, l'inégalité de Minkowski donne

$$\left(\int_E |f(x,y)+g(x,y)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f(x,y)|^p\mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x,y)|^p\mu(dx)\right)^{1/p}$$

et en appliquant une seconde fois Minkowski (dans $\mathcal{L}^r(F,\nu)$) on trouve bien $\|f+g\|_{p,r} \leq \|f\|_{p,r} + \|g\|_{p,r}$.

Par ailleurs, si $\|f\|_{p,r} = 0$, alors

$$\nu\left(\left\{y \in F : \left(\int_E |f(x,y)|^p \mu(dx)\right)^{r/p} \neq 0\right\}\right) = 0 \quad \text{et donc}$$

$$\int_F \int_E |f(x,y)|^p \mu(dx)\, \nu(dy) = 0$$, ce qui entraîne bien $f(x,y) = 0$ pour $\mu \otimes \nu$ presque tout $(x,y) \in E \times F$.

(b) En appliquant la seconde inégalité de (a) et un argument de récurrence on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{n \leq k} |f_n| \right\|_{p,r} \leq \sum_{n \leq k} \|f_n\|_{p,r} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{p,r} < \infty.$$

On déduit par convergence monotone que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_F \left(\int_E \sum_{n \leq k} |f_n(x,y)|^p \mu(dx)\right)^{r/p} \nu(dy) < \infty, \text{ i.e.}$$

$$\int_F \left(\int_E \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x,y)|^p \mu(dx)\right)^{r/p} \nu(dy) < \infty.$$

Ceci ne peut être satisfait que si $\mu \otimes \nu(A^c) = 0$.

En appliquant toujours la seconde inégalité de (a) on a pour tout $k \in \mathbb{N}$
$\left\| \sum_{n=1}^k f_n \right\|_{p,r} \leq \sum_{n=1}^k \|f_n\|_{p,r}$, puis par le lemme de Fatou

$$\int_F \left(\int_E \left|\sum_{n=1}^\infty f_n(x,y)\right|^p \mu(dx)\right)^{r/p} \nu(dy) \leq \liminf_{k \to \infty} \left(\sum_{n=1}^k \|f_n\|_{p,r}\right)^r$$

et finalement $\boxed{\|g\|_{p,r} \leq \sum \|f_n\|_{p,r}.}$

(c) On a $g - \sum_{i \leq n} f_i = \sum_{i > n} f_i$ et d'après (b)

$$\left\| g - \sum_{i \leq n} f_i \right\|_{p,r} \leq \sum_{i > n} \|f_i\|_{p,r} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On conclut que $\mathcal{L}^{p,r}$ est un espace vectoriel dans lequel toute série normalement convergente, converge, et donc l'espace quotient $L^{p,r}$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,r}$.

(Comme pour les espaces $\mathcal{L}^p$ - L^p, on quotiente par la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g$ $\mu \otimes \nu$-presque partout.)