Examen FIMFA

Intégration et Probabilités (28 Janvier 2009)

Sans documents ni calculette

Exercice 1.

L'objet de cet exercice est de donner un exemple d'ensemble borélien B de $\mathbb{R}^2$ dont le complémentaire a une mesure de Lebesgue nulle, et tel que B ne contienne aucun pavé borélien $A \times A'$ de mesure de Lebesgue strictement positive.

On notera λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 celle sur $\mathbb{R}^2$.

(a) On considère un borélien $N \subset \mathbb{R}$ avec $\lambda_1(N) = 0$ et

$$B = \{(y, y') \in \mathbb{R}^2 : y' - y \notin N\}.$$

Vérifier que B est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et que la mesure de Lebesgue de son complémentaire est nulle, i.e. $\lambda_2(\mathbb{R}^2 \backslash B) = 0$.

(b) (Question de cours) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction translatée $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_a(x) = f(x + a)$.

Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda_1)$ alors f_a converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda_1)$ quand a tend vers 0. On pourra établir d'abord le résultat lorsque f est une fonction continue à support compact, puis passer au cas général par approximation.

(c) Soient A et A' deux boréliens de $\mathbb{R}$, avec $\lambda_1(A) < \infty$ et $\lambda_1(A') < \infty$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A'}(x + y) \mathbf{1}_A(y) \lambda_1(dy)\,.$$

Montrer que la fonction g est continue, et que si $g(x) > 0$, alors il existe $y \in A$ et $y' \in A'$ tels que $x = y' - y$.

(d) On suppose N est dense dans $\mathbb{R}$; par exemple on peut prendre pour N l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Conclure que si $A \times A' \subset B$, alors $\lambda_2(A \times A') = 0$.

Exercice 2.

Soit μ une mesure finie sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$. On considère une fonction $f \in L^\infty(\mu)$ avec $\mu(\{|f| > 0\}) > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int |f|^n d\mu\,.$$

(a) Justifier l'inégalité suivante

$$u_n \leq (u_{n+1})^{n/(n+1)} \mu(E)^{1/(n+1)}\,,$$

puis montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \|f\|_\infty \,.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $g_x : E \to [0,\infty]$ la fonction définie par

$$g_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} |xf(y)|^n \,, \qquad y \in E \,.$$

Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ que l'on précisera tel que

$$|x| < r \Longrightarrow g_x \in L^1(\mu) \Longrightarrow |x| \leq r \,.$$

Exercice 3.

Soit Z une v.a. à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la loi de Z est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

(a) On écrit $Z = X + \mathrm{i}Y$, avec X et Y à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminer la loi de X. Les variables X et Y sont elles indépendantes?

(b) On pose $R = |Z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(Z)$. Montrer que R et θ sont des v.a. indépendantes, déterminer leurs lois respectives.

(c) Déterminer la fonction de répartition de la variable $\frac{X^2}{X^2+Y^2}$.

Exercice 4.

Dans tout cet exercice, on travaille avec un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on se donne une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. $X, X_1, \ldots$. On suppose $X \in L^2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{E}(X) = 0$, et on pose

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2)\,.$$

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$, on s'intéresse à la série

$$S_n^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} i^{-\alpha} X_i \,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Montrer que si $\alpha > 1/2$, alors $S_n^{(\alpha)}$ converge dans $L^2(\mathbb{P})$.

[Indication : on pourra penser au critère de Cauchy.]

(b) On note Φ la fonction caractéristique de X. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon > 0$ tel que

$$|\xi| \leq x_\varepsilon \implies \left| \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \ln\Phi(\xi) \right| \leq \varepsilon|\xi|^2 \,.$$

On rappelle que $1 + 2^{-1} + \ldots + n^{-1} \sim \ln n$. En déduire que la suite

$$\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}} \,, \qquad n \geq 2$$

converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.