Corrigé de l'examen d'Intégration & Probabilités du 28 Janvier 2009

Exo 1 (a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(y,y') = y'-y$ est continue donc borélienne

$B = \phi^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus N)$ est borélien puisque $\mathbb{R}^2 \setminus N$ l'est.

Par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\lambda_2(B^c) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{y'-y \in N\}} \lambda_1(dy)\lambda_1(dy') = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(y+N)\,\lambda_1(dy)$$

Par invariance de la mesure de Lebesgue par translation $\lambda_1(y+N) = 0$, et donc $\lambda_2(B^c) = 0$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}_K$ (espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$), disons $\mathrm{Supp}\, f \subseteq [-k,k]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x+a) \to f(x)$ quand $a \to 0$ et $|f(x+a)| \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}_{[-k-1,k+1]}$ pourvu que $|a| \leq 1$. Par convergence dominée on a bien que $f_a \to f$ dans L^1 quand $a \to 0$. Passons au cas général. Si $f \in L^1$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}_K$ telle que $\|f-\tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon$ (car $\mathcal{C}_K$ est dense dans L^1). D'après ce qui précède, on peut trouver $a_\varepsilon > 0$ tel que $\|\tilde{f} - \tilde{f}_a\|_1 \leq \varepsilon$, et par invariance de la mesure de Lebesgue par translation on a aussi $\|f_a - \tilde{f}_a\|_1 \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire (Minkovski) on a bien

$$\forall a < a_\varepsilon \quad \|f-f_a\|_1 \leq \|f-\tilde{f}\|_1 + \|\tilde{f}-\tilde{f}_a\|_1 + \|\tilde{f}_a - f_a\|_1 \leq 3\varepsilon$$

(c)
$$|g(x) - g(x+a)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{A'}(x+y) - \mathbb{1}_{A'}(x+a+y)|\,\mathbb{1}_A(y)\,\lambda_1(dy)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{A'}(x+y) - \mathbb{1}_{A'}(x+a+y)|\,\lambda_1(dy)$$
$$= \|\mathbb{1}_{x+A'} - \mathbb{1}_{x+a+A'}\|_1 \longrightarrow 0 \text{ qd } a \to 0 \text{ d'après (b)}$$

Si $g(x) > 0$, il existe y tq $\mathbb{1}_{A'}(x+y)\,\mathbb{1}_A(y) > 0$, i.e. $\exists y' \in A'$ tq $x = y'-y$ & $y \in A$.

(d) Supposons $\lambda_2(A \times A') > 0$. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on aura que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\lambda_1(dx) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A'}(x+y)\,\mathbb{1}_A(y)\,\lambda_1(dx)\,\lambda_1(dy) = \lambda_1(A)\,\lambda_1(A') > 0$$

(en utilisant une fois de plus l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue)
D'après (c), il existera un intervalle ouvert $I \neq \emptyset$ tel que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Or I contient nécessairement un point $x' \in N$ et donc, toujours d'après (c) $\exists y \in A$ et $y' \in A'$ tels que $y'-y = x' \in N$, ce qui est contradictoire.

Exo 2 (a) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder

$$\int_E |f|^n \times 1\, d\mu \leq \left(\int_E |f|^{np} d\mu\right)^{1/p} \left(\int_E 1^q d\mu\right)^{1/q} \quad \text{avec } p = \frac{n+1}{n} \text{ et } q = n+1$$

(b) En écrivant $|f|^{n+1} \leq \|f\|_\infty |f|^n$, il vient immédiatement

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \|f\|_\infty \quad , \text{ a fortiori } \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \|f\|_\infty$$

D'autre part, l'inégalité établie en (a) donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \mu(E)^{-\frac{1}{n+1}} \|f\|_{n+1}$$

et on sait que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. Comme $\mu(E)^{-1/(n+1)} \to 1$, on a

$\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \|f\|_\infty$, et la première inégalité permet de conclure.

(c) En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, nous obtenons

$$\int_E g_x(y)\mu(dy) = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n u_n .$$

La question (b) montre que le rayon de convergence de cette série entière est $1/\|f\|_\infty$, et donc pour $1/\|f\|_\infty = r$, on a

$$|x| < r \Rightarrow g_x \in L^1(\mu) \Rightarrow |x| \leq r.$$

Exo 3 (a) La mesure de Lebesgue du disque unité vaut π, donc la loi de Z est $\pi^{-1} \mathbb{1}_{|Z|\leq 1} \lambda_2(dz)$, où λ_2 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

Pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a donc,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{\pi} \iint \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}} f(x)\, dx\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} dx\, f(x)\, 2\sqrt{1-x^2} ,$$

c'est-à-dire que la loi de X a pour densité $\mathbb{1}_{|x|\leq 1} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$.

Par symétrie Y a la même loi que X; et X et Y ne sont pas indépendants car $\mathbb{P}(X > 1/\sqrt{2}, Y > 1/\sqrt{2}) = 0 \neq \mathbb{P}(X > 1/\sqrt{2})\,\mathbb{P}(Y > 1/\sqrt{2})$.

(b) Si $f : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}_+$ est mesurable, le changement de variables en coordonnées polaires donne

$$\mathbb{E}(f(R,\theta)) = \frac{1}{\pi}\int \mathbb{1}_{\{|Z|\leq 1\}} f(|Z|, \operatorname{Arg} z)\, \lambda_2(dz) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 dr\, r \int_0^{2\pi} d\theta\, f(r,\theta)$$

et donc la loi de (R,θ) est $\frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{0\leq r\leq 1} \mathbb{1}_{0\leq\theta\leq 2\pi}\, r\, dr\, d\theta$.

Celle densité s'exprime comme un produit de densités de probabilités, donc les variables R et θ sont indépendantes. Plus précisément la loi de R est $2r\,\mathbb{1}_{0\le r\le 1}\,dr$ et celle de θ $\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{0\le\theta\le 2\pi}\,d\theta$.

c) $X^2/(X^2+Y^2) = \cos^2\theta$, de sorte que la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \mathbb{P}(\cos^2\theta \le x) = \mathbb{P}(|\cos\theta| \le \sqrt{x}) \quad \text{pour } 0\le x\le 1$$
$$= \mathbb{P}(\theta \in [\arccos\sqrt{x}, \pi-\arccos\sqrt{x}] \cup [\arccos\sqrt{x}+\pi, 2\pi-\arccos\sqrt{x}])$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{x}.$$

Exo 4 (a) Comme les variables X_i sont centrées et indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(|S_{n+k}^{(\alpha)} - S_n^{(\alpha)}|^2) = \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i=n+1}^{n+k} i^{-\alpha}X_i\Big)^2\Big) = \sum_{i=n+1}^{n+k} i^{-2\alpha}\,\mathbb{E}(X_i^2)$$
$$= \sigma^2\Big(\sum_{i=n+1}^{n+k} i^{-2\alpha}\Big) \le \sigma^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} i^{-2\alpha}$$

Ce terme tend vers 0 quand $n\to\infty$ dès que $\alpha > 1/2$, ce qui montre que la suite $(S_n^{(\alpha)})$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$. Comme $L^2(\mathbb{P})$ est complet, elle converge.

(b) On sait que $\Phi(\xi) = 1 + i\xi\,\mathbb{E}(X) - \frac{\xi^2}{2}\mathbb{E}(X^2) + o(\xi^2)$ quand $\xi\to 0$.

Par ailleurs $\ln(1-z) = -z + o(|z|)$ quand $|z|\to 0$. Comme $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathbb{E}(X^2)=\sigma^2$, on a

$$\ln\Phi(\xi) = \ln\Big(1-\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 + o(\xi^2)\Big) = -\frac{\xi^2}{2}\sigma^2 + o(\xi^2), \quad \text{c'est-à-dire}$$
$$\lim_{|\xi|\to 0} \Big|\ln\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2\Big|\,|\xi|^{-2} = 0.$$

Les variables X_i étant i.i.d., la fonction caractéristique de $\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}}$ vaut donc

$$\mathbb{E}\Big(\exp i\Big(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n i^{-1/2}X_i\Big)\Big) = \prod_{i=1}^n \Phi\Big(\frac{\xi i^{-1/2}}{\sqrt{\ln n}}\Big)$$
$$= \exp\Big(\sum_{i=1}^n \ln\Big(\Phi\Big(\frac{\xi i^{-1/2}}{\sqrt{\ln n}}\Big)\Big)\Big)$$
$$\sim \exp\Big(-\sum_{i=1}^n\Big(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\xi^2 i^{-1}}{\ln n}\Big)\Big), \quad n\to\infty$$
$$\sim \exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\Big)$$

Ainsi la fonction caractéristique de $S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}$ converge vers celle d'une loi gaussienne centrée de variance σ^2 quand $n\to\infty$, on conclut que $S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$