Examen FIMFA

Intégration et Probabilités (22 Janvier 2010)

Sans documents ni calculette

Exercice 1.

On considère une variable aléatoire réelle ξ; on note $F(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$ sa fonction de répartition. On se donne une suite croissante de d réels, $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_d$, et on introduit le vecteur aléatoire d-dimensionel $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})$ défini par

$$X^{(i)} = \mathbf{1}_{\{\xi \leq t_i\}} = \begin{cases} 1 \text{ si } \xi \leq t_i\,, \\ 0 \text{ si } \xi > t_i\,. \end{cases}$$

(a) Pour tout $1 \leq i \leq j \leq d$, exprimer la moyenne $\mathbb{E}(X^{(i)})$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X^{(i)}, X^{(j)})$ en fonction de F.

(b) On se donne une suite de variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots$ indépendantes et toutes de même loi que ξ, et on pose pour tout entier $n \geq 1$ et $i = 1, \ldots, d$

$$B_n^{(i)} = \sqrt{n} \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\xi_k \leq t_i\}} - F(t_i) \right) .$$

Montrer que le vecteur aléatoire $\mathbf{B}_n = (B_n^{(1)}, \ldots, B_n^{(d)})$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers un vecteur aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 2.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes les deux de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On pose

$$C = \frac{Y}{X} \quad \text{et} \quad T = X^2 + Y^2\,.$$

Déterminer la loi du couple (C, T), et préciser si ces deux variables sont indépendantes ou pas.

Calculer la fonction de répartition de C et celle de T.

Exercice 3.

Soit $p, q \in]1, \infty[$ deux réels conjugués, i.e. $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

(a) Trouver une constante $c(p) < \infty$ telle que pour tout $x > 0$ et toute fonction $g \in L^p([0, \infty[, \mathrm{d}y)$, on ait

$$\int_x^\infty y^{-1} |g(y)| \mathrm{d}y \leq c(p) x^{-1/p} \|g\|_p\,,$$

où $\|g\|_p$ désigne la norme de g dans $L^p(]0, \infty[, \mathrm{d}y)$.

(b) On considère une fonction borélienne $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty |f(x)| x^{-1/p} \mathrm{d}x < \infty$, et on pose pour tout $y > 0$
$$H_f(y) = y^{-1} \int_0^y f(x) \mathrm{d}x \,.$$
Vérifier que pour toute fonction $g \in L^p(]0, \infty[, \mathrm{d}y)$, l'intégrale
$$\langle H_f, g \rangle = \int_0^\infty g(y) H_f(y) \mathrm{d}y$$
est bien définie et qu'on a l'inégalité
$$|\langle H_f, g \rangle| \leq c(p) \|g\|_p \int_0^\infty |f(x)| x^{-1/p} \mathrm{d}x \,.$$

(c) En déduire que $H_f \in L^q(]0, \infty[, \mathrm{d}x)$ et que
$$\|H_f\|_q \leq c(p) \int_0^\infty |f(x)| x^{-1/p} \mathrm{d}x \,.$$

Exercice 4.

(a) Soit μ une mesure finie sur $[-1, 1]$ telle que $\int x \mu(\mathrm{d}x) = 0$. On pose $\mu([-1, 1]) = 2m$, puis pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$f(t) = m(\mathrm{e}^{2t} + 1) - \int \mathrm{e}^{t(x+1)} \mu(\mathrm{d}x) \,.$$
Montrer soigneusement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' vérifie l'identité
$$f'(t) = \int (x + 1) \left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t(x+1)} \right) \mu(\mathrm{d}x) \,.$$

(b) Déduire de (a) que pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) \geq 0$ puis $f(t) \geq 0$. Conclure ensuite qu'on a l'inégalité
$$\int \mathrm{e}^{tx} \mu(\mathrm{d}x) \leq 2m \cosh t \,.$$

(c) On suppose maintenant qu'il existe un réel $t > 0$ pour lequel on a l'égalité
$$\int \mathrm{e}^{tx} \mu(\mathrm{d}x) = 2m \cosh t \,.$$
Montrer que nécessairement
$$\mu(\mathrm{d}x) = m\delta_{-1}(\mathrm{d}x) + m\delta_1(\mathrm{d}x) \,,$$
où δ_a désigne la masse de Dirac au point a (*Indication* : on pourra commencer par vérifier que f' est identiquement nulle sur $[0, t]$).

Exercice 5.

Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de loi uniforme sur $[-1,1]$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(U_k \in \mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\,, \qquad x \in [-1,1]\,.$$

(a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de carré sommable, c'est-à-dire telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Montrer que la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k U_k$$

converge dans $L^2(\mathbb{P})$ vers une variable qu'on notera S_∞.

(b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$

$$F_n(q) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(qa_k)}{qa_k}\,,$$

avec la convention que $\sin(x)/x = 1$ lorsque $x = 0$.

Montrer que $F_n(q)$ a une limite finie quand $n \to \infty$ qu'on notera $F_\infty(q)$, et préciser le lien avec la fonction caractéristique de S_∞.

(c) Réciproquement on considère une suite de réels $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k U_k$$

converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable notée T_∞.

En utilisant des propriétés connues de la fonction caractéristique de T_∞, montrer d'abord que $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$, puis établir que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$.