Examen (Janvier 2007)

Intégration et Probabilités

Sans documents, ni calculette, etc.

Exercice 1.

Soit ν une mesure finie sur $[0,\infty[$; on introduit sa transformée de Laplace $\mathcal{L}_\nu$ et sa transformée de Stieltjes $\mathcal{S}_\nu$ qui sont définies pour tout réel $q \geq 0$ respectivement par

$$\mathcal{L}_\nu(q) = \int_{[0,\infty[} \mathrm{e}^{-qy}\nu(\mathrm{d}y)\ ,\ \mathcal{S}_\nu(q) = \int_{[0,\infty[} \frac{1}{q+y}\nu(\mathrm{d}y)\,.$$

(a) Montrer que le logarithme de la transformée de Laplace est une fonction convexe, c'est-à-dire que pour tout $a \in [0,1]$ et $q, r \geq 0$, on a

$$\ln\left(\mathcal{L}_\nu(aq+(1-a)r)\right) \leq a\ln\left(\mathcal{L}_\nu(q)\right) + (1-a)\ln\left(\mathcal{L}_\nu(r)\right)\ .$$

(b) Montrer que la fonction $y \to y^{-1}$ est ν-intégrable si et seulement si la mesure absolument continue m sur $]0,\infty[$ donnée par $m(\mathrm{d}x) = \mathcal{L}_\nu(x)\mathrm{d}x$ est finie.

Montrer qu'alors $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{L}_m$, puis que le logarithme de la transformée de Stieltjes, $\ln\mathcal{S}_\nu$ est également une fonction convexe.

(c) On rappelle le résultat d'approximation suivant d'une fonction continue par des polynômes, dû à Weierstrass: Supposons que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynôme p à coefficients réels telle que pour tout x dans $[0,1]$, nous ayons $|f(x)-p(x)| < \varepsilon$.

On considère deux mesures finies sur $[0,1]$, μ et μ'. Montrer que si leurs moments entiers coïncident, c'est-à-dire si

$$\int_{[0,1]} x^n\mu(\mathrm{d}x) = \int_{[0,1]} x^n\mu'(\mathrm{d}x) \qquad \text{pour tout } n = 0,1,2,\ldots$$

alors $\mu = \mu'$.

(d) Déduire de (c) que si ν et ν' sont deux mesures finies sur $[0,\infty[$ telles que $\mathcal{L}_\nu(n) = \mathcal{L}_{\nu'}(n)$ pour tout $n = 0,1,2,\ldots$, alors $\nu = \nu'$. [*Indication: on pourra considérer les images des mesures ν et ν' par l'application $x \to \mathrm{e}^{-x}$.*]

(e) Montrer que la transformée de Stieltjes $\mathcal{S}_\nu$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$ et que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ème $\mathcal{S}_\nu^{(k)}$ est donnée par

$$\mathcal{S}_\nu^{(k)}(q) = (-1)^k k! \int_{[0,\infty[} (y+q)^{-(k+1)}\nu(\mathrm{d}y)\,, \qquad q > 0\,.$$

(f) Montrer que si ν et ν' sont deux mesures de probabilités sur $[0,\infty[$ telles que les dérivées de tous ordres de leurs transformées de Stieltjes coïncident en 1, i.e. $\mathcal{S}_\nu^{(k)}(1) = \mathcal{S}_{\nu'}^{(k)}(1)$ pour tous $k = 0,1,2,\ldots$, alors $\nu = \nu'$.

Exercice 2.

Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire $P_{X_n}(\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $x \geq 0$.

(a) Soit $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$. Déterminer la probabilité de l'évènement

$$\{\text{il existe une infinité d'entiers } n \text{ tels que } X_n > f(n)\}$$

en fonction de la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-f(n)\}$.

(b) Montrer que presque-sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geq 1 \,.$$

(c) Montrer que pour chaque $c > 1$, on a presque-sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq c \,.$$

Que peut-on en conclure ?

(d) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1} X_k$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(S_n\right) \sim \log n \qquad \text{quand } n \to \infty$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(S_n) = \sigma^2$$

pour une certaine constante $\sigma^2 > 0$ qu'on ne calculera pas explicitement.

(e) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, montrer que $S_n/\mathbb{E}(S_n)$ converge en probabilités vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

En déduire que $S_n/\log n$ converge en probabilités vers 1.

Exercice 3.

Soient R et θ deux variables aléatoires indépendantes, toutes les deux uniformément réparties sur $[0, 1]$. On pose $X = R\cos(2\pi\theta)$, $Y = R\sin(2\pi\theta)$ et $Z = (X, Y)$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(X^2 + Y^2)$.

(b) Déterminer la densité de la loi de Z sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Ont-elles la même loi? Déduire de (a) les valeurs de $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.

(d) Soient $Z_1, \cdots, Z_n, \cdots$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, toutes de même loi que Z. Etudier la convergence en loi lorsque $n \to \infty$ de la suite

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$$

(on précisera la loi limite s'il y a lieu).