Examen Partiel (Novembre 2006)

Intégration et Probabilités

Avec correction

Exercice 1.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n := \int_0^1 \frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} \mathrm{d}x \,.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

On a d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}$$

et d'autre part,

$$0 \leq \frac{1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} \leq 1 \,, \qquad \forall x \in [0,1] \,,$$

puisque $0 \leq x^{2k} \leq x^k$. *On en déduit par convergence dominée que* I_n *converge vers* $\int_0^1 (1+x)^{-1}\mathrm{d}x = \ln 2$.

(b) On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = -\ln(1-x)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$J_n := \int_{1/2}^1 \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}} \mathrm{d}x \,.$$

Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, *la fonction*

$$f_n(x) \to \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}}$$

est positive sur $[1/2, 1]$ *et quand* $n \to \infty$, $f_n(x)$ *converge pour tout* $x \in [1/2,1]$ *vers* $\frac{x}{(1-x)\ln(1/(1-x))}$. *Or*

$$\int_{1/2}^1 \frac{x}{(1-x)\ln(1/(1-x))} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln(1/x)} \mathrm{d}x = \infty$$

(intégrale de Bertrand), et on déduit du lemme de Fatou que $J_n \to \infty$.

Exercice 2.

On considère l'espace $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\pi_n f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\pi_n f(0) = 0$, et

$$\pi_n f(x) = 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(y)\mathrm{d}y \quad \text{si } k2^{-n} < x \leq (k+1)2^{-n} \text{ pour } k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\,.$$

(a) Établir que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\|\pi_n f\|_1 \leq \|f\|_1\,,$$

puis que pour tout $p \in [1, \infty[$, on a également pour tout $x \in [0,1]$

$$|\pi_n f(x)|^p \leq \pi_n |f|^p(x)$$

et conclure que

$$\|\pi_n f\|_p \leq \|f\|_p\,.$$

On a par l'inégalité triangulaire

$$\int_0^1 |\pi_n f(x)|\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2^n-1} \Big| \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(y)\mathrm{d}y \Big| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |f(y)|\mathrm{d}y = \int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y\,.$$

Ceci montre que $\|\pi_n f\|_1 \leq \|f\|_1$ *. Ensuite l'inégalité de Jensen pour la mesure de probabilité* $2^n\mathrm{d}y$ *sur* $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ *et la fonction convexe* $x \to x^p$ *donnent* $|\pi_n f(x)|^p \leq \pi_n |f|^p(x)$*. Enfin, en appliquant la première inégalité à la fonction* $|f|^p$*, on obtient*

$$\int_0^1 |\pi_n f(x)|^p \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \pi_n |f|^p(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f|^p(x)\mathrm{d}x\,.$$

(b) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$, $\pi_n f$ converge quand $n \to \infty$ vers f dans L^p.

<u>Indication</u>: On pourra dans un premier temps supposer que la fonction f est continue, puis passer au cas général en utilisant une approximation.

Supposons donc d'abord f *continue. Alors pour tout* $x \in [0,1]$*,* $\pi_n f(x)$ *converge quand* $n \to \infty$ *vers* $f(x)$*, et* $|\pi_n f(x)|^p \leq \|f\|_\infty < \infty$*. On déduit par convergence dominée que* $\pi_n f$ *converge quand* $n \to \infty$ *vers* f *dans* L^p*.*

Dans le cas général, on sait d'après le cours que pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe une fonction continue* f_ε *telle que* $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$*. On a alors d'après* (a)

$$\|f - \pi_n f\|_p \leq \|f - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - \pi_n f_\varepsilon\|_p + \|\pi_n(f - f_\varepsilon)\|_p \leq 2\varepsilon + \|f_\varepsilon - \pi_n f_\varepsilon\|_p\,.$$

Or d'après la première partie il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_\varepsilon$*, on a* $\|f_\varepsilon - \pi_n f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$*. On conclut que* $\|f - \pi_n f\|_p \leq 3\varepsilon$*.*

Exercice 3.

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace muni d'une tribu et d'une mesure. On se donne $p \in]0,1[$ et note

$$\mathcal{L}^p = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty\}.$$

(a) Vérifier que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

C'est évident en utilisant l'inégalité $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq |f|^p + |g|^p$.

(b) On définit pour tous $f, g \in \mathcal{L}^p$

$$d_p(f,g) := \int |f-g|^p \mathrm{d}\mu\,.$$

Montrer que pour toutes fonctions $f, g, h \in \mathcal{L}^p$, on a:

i) $d_p(f,g) = 0$ si et seulement si $f = g$ μ-presque partout,

ii) Si $f = f'$ et $g = g'$ μ-presque partout, alors $d_p(f,g) = d_p(f',g')$

iii) $d_p(f,h) \leq d_p(f,g) + d_p(g,h)$.

i) *et* ii) *sont évidents et* iii) *découle à nouveau de l'inégalité*

$$|f-h|^p \leq (|f-g| + |g-h|)^p \leq |f-g|^p + |g-h|^p\,.$$

(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^p$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} d_p(f_{n+1}, f_n) < \infty\,.$$

On veut établir la convergence de la suite (f_n) dans $\mathcal{L}^p$.

i) Montrer que pour toute série numérique absolument convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$, on a

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right|^p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\,.$$

L'inégalité $\left|\sum_{n=1}^N a_n\right|^p \leq \sum_{n=1}^N |a_n|^p$ *est facile pour tout* $N \in \mathbb{N}$. *Quand on fait tendre* N *vers l'infini, la somme de gauche converge vers* $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right|^p$ *puisque la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ *est convergente. La somme de droite croît vers* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p$.

ii) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$ converge pour μ-presque tout $x \in E$.

En appliquant le théorème de convergence monotone on obtient

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|^p \mu(\mathrm{d}x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_p(f_{n+1}, f_n) < \infty,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)-f_{n+1}(x)|^p$ *converge pour* μ*-presque tout* $x \in E$*. En particulier* $|f_n(x)-f_{n+1}(x)|$ *converge vers* 0 μ*-presque tout* $x \in E$*, et pour de tels* $x \in E$*, on a* $|f_n(x)-f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)-f_{n+1}(x)|^p$ *dès que* n *est assez grand. On en déduit que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)-f_{n+1}(x)|$ *converge pour* μ*-presque tout* $x \in E$*.*

iii) En déduire que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x)$ existe pour μ-presque tout $x \in E$ et que

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, f) = 0\,.$$

La question ii) *et l'inégalité triangulaire montrent que pour* μ*-presque tout* $x \in E$*,* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy, et donc converge. Si on note* $f(x)$ *sa limite, alors pour tout entier* n*, on a* $f_n(x) - f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))$ *où la série est absolument convergence. On a alors grâce à* i) *et au théorème de convergence monotone que*

$$\begin{aligned}
\int |f_n(x) - f(x)|^p \mu(\mathrm{d}x) &\leq \int \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)|^p \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \int |f_k(x) - f_{k+1}(x)|^p \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} d_p(f_{k+1}, f_k).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, le terme de droite tend bien vers 0 *quand* $n \to \infty$*.*