Examen FIMFA

Intégration et Probabilités (Janvier 2008)

Sans documents ni calculette

Exercice 1.

Soient β une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ et γ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,\infty[$, dont les lois respectives sont de la forme

$$P_\beta(\mathrm{d}s) = bs(1-s)\mathrm{d}s \quad (0 \le s \le 1) \quad \text{et} \quad P_\gamma(\mathrm{d}t) = c\,t^3 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad (t \ge 0)$$

où b et c sont des constantes.

(a) Calculer b et c.

(b) On suppose que β et γ sont indépendantes. On pose

$$X = \beta\gamma \qquad , \qquad Y = (1-\beta)\gamma\,.$$

Déterminer la loi du couple (X,Y); vérifier que les variables X et Y sont indépendantes et toutes les deux de même loi que l'on précisera en donnant la densité.

Exercice 2.

Soient $U_1, U_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout entier $n \ge 1$, on pose

$$M_n = \max\{1/\sqrt{U_1}, \ldots, 1/\sqrt{U_n}\}\,.$$

(a) Calculer la fonction de répartition de M_n :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(M_n \le x)\,, \qquad \text{pour } x \ge 0\,.$$

Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles M_n a un moment d'ordre p fini, c'est-à-dire telles que $\mathbb{E}(M_n^p) < \infty$.

(b) Montrer que $n^{-1/2}M_n$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition ainsi que la densité.

Exercice 3.

(a) Soit $(X_n : n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge p.s. vers une constante $c \in \mathbb{R}$. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue à support compact.

Montrer que pour toute suite $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires réelles, la suite $f(X_n, Y_n) - f(c, Y_n)$ converge p.s. vers 0.

(b) On suppose de plus que Y_n converge en loi vers une variable Y.

Déduire de (a) que (X_n, Y_n) converge en loi vers (c, Y).

(c) Soit I un intervalle ouvert contenant c et $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue sur $I \times \mathbb{R}$. Soit $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction continue avec $h(c) = 1$ et $h(x) = 0$ si $x \notin I$.

Etudier la limite de $\mathbb{E}(h(X_n)g \circ \Phi(X_n, Y_n))$ pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En déduire que $\Phi(X_n, Y_n)$ converge en loi vers $\Phi(c, Y)$.

(d) Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et toutes de même loi. On suppose que ξ_1 est centrée et a un moment d'ordre 2 fini et strictement positif. Montrer que la suite

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 4.

On se donne $p, q \in]1, \infty[$ deux réels conjugués (i.e. $p^{-1} + q^{-1} = 1$). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesurable muni d'une mesure sigma-finie, et $k : E \times E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (pour la tribu produit $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$). On suppose que

$$\int_E k(x,y)\mu(\mathrm{d}y) \leq 1 \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et } \int_E k(x,y)\mu(\mathrm{d}x) \leq 1 \text{ pour tout } y \in E.$$

(a) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Vérifier que

$$t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha \qquad \text{pour tout } t \geq 0\,.$$

En déduire que pour tout $\lambda > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité

$$ab \leq \frac{1}{p}\lambda^p a^p + \frac{1}{q}\lambda^{-q} b^q\,.$$

[Indication : on pourra prendre $\alpha = p^{-1}$ et $t = \lambda^{p+q} a^p b^{-q}$.]

(b) Montrer que pour $u \in L^p(\mu)$, $v \in L^q(\mu)$, et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_{E\times E} k(x,y)|u(y)v(x)|\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y) \leq \frac{1}{p}\lambda^p ||u||_p^p + \frac{1}{q}\lambda^{-q}||v||_q^q\,,$$

puis, en choisissant λ de façon adéquate que

$$\int_{E\times E} k(x,y)|u(y)v(x)|\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y) \leq ||u||_p ||v||_q\,.$$

(c) On pose pour $u \in L^p(\mu)$

$$Ku(x) = \int_E k(x,y)u(y)\mu(\mathrm{d}y)\,.$$

Montrer que $Ku \in L^p(\mu)$, et plus précisément que $||Ku||_p \leq ||u||_p$. [Indication : on pourra considérer l'application $\Phi : L^q(\mu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(v) = \int_{E\times E} k(x,y)u(y)v(x)\mu(\mathrm{d}x)\mu(\mathrm{d}y)\,,$$

et vérifier que Φ est une forme linéaire continue sur $L^q(\mu)$.]

(d) Application : soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ la densité d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Déduire de (c) que pour toute fonction $u \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$, on a

$$||f * u||_p \leq ||u||_p\,,$$

où

$$f * u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)u(y)\mathrm{d}y\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

(e) Plus géréralement, soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Pour $u \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$, on pose

$$u * \nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\nu(\mathrm{d}y)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,.$$

Montrer directement que $u * \nu \in L^p(\mathrm{d}x)$ et $||u * \nu||_p \leq ||u||_p$.