Examen du 30 janvier 2012 : corrigé

"Intégration & Probabilités"

Exercice I. (i) (Existence) Quitte à considérer séparément f^+ et f^-, on peut supposer que $f \geq 0$. Soit $\nu := f \bullet \mu$. Considérons $\mu_{\mathscr{D}}$ et $\nu_{\mathscr{D}}$, la restriction à $\mathscr{D}$ de μ et de ν, respectivement. Il s'agit d'un couple de mesures finies sur $(E, \mathscr{D})$ tel que $\nu_{\mathscr{D}} \ll \mu_{\mathscr{D}}$. D'après le théorème de Radon–Nikodym, il existe une fonction $f_{\mathscr{D}}$, $\mathscr{D}$-mesurable, telle que pour tout $A \in \mathscr{D}$, $\int_A f_{\mathscr{D}} \, \mathrm{d}\mu_{\mathscr{D}} = \nu_{\mathscr{D}}(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$, ce qui donne l'existence cherchée.[1]

(Unicité) On a $\int_A f_{\mathscr{D}} \, \mathrm{d}\mu = \int_A \widetilde{f}_{\mathscr{D}} \, \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{D}$. Soit $B := \{x \in E : f_{\mathscr{D}}(x) > \widetilde{f}_{\mathscr{D}}(x)\} \in \mathscr{D}$, alors $\int (f_{\mathscr{D}} - \widetilde{f}_{\mathscr{D}}) \, \mathbf{1}_B \, \mathrm{d}\mu = 0$, donc $(f_{\mathscr{D}} - \widetilde{f}_{\mathscr{D}}) \, \mathbf{1}_B = 0$ p.p. D'où $\mu(B) = 0$, c'est-à-dire, $f_{\mathscr{D}} \leq \widetilde{f}_{\mathscr{D}}$ p.p. De même, $\widetilde{f}_{\mathscr{D}} \leq f_{\mathscr{D}}$ p.p. Par conséquent, $f_{\mathscr{D}} = \widetilde{f}_{\mathscr{D}}$ p.p.

Comme $f_{\mathscr{D}} \, \mathbf{1}_A$ est $\mathscr{D}$-mesurable et intégrable, l'identité $(f \, \mathbf{1}_A)_{\mathscr{D}} = f_{\mathscr{D}} \, \mathbf{1}_A$ p.p. découle de l'unicité de $(f \, \mathbf{1}_A)_{\mathscr{D}}$.

(ii) Comme $g_{\mathscr{D}}$ est une fonction $\mathscr{D}$-mesurable, il suffit de prouver le résultat général suivant : si $f : E \to \mathbb{R}$ est une application et si $F : E \mapsto \mathbb{R}$ est $\sigma(f)$-mesurable ($\sigma(f)$ désignant la plus petite tribu sur E rendant f mesurable), alors il existe une fonction borélienne h telle que $F = h(f)$. Ceci est trivialement vrai par définition si F est une fonction indicatrice, disons $F = \mathbf{1}_A$, avec $A \in \sigma(f)$, car dans ce cas-là, il existe $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $A = f^{-1}(B)$, et il suffit de prendre $h := \mathbf{1}_B$. Le reste de l'argument est de routine : par linéarité, la conclusion reste valable si F est une fonction étagée, et donc valable si F est $\sigma(f)$-mesurable positive (car F s'écrit alors comme limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives), et enfin encore valable si F est $\sigma(f)$-mesurable de signe quelconque (car il suffit de considérer séparément F^+ et F^-).[2]

(iii) Dans la Question (i), on voit clairement que l'application $f \mapsto f_{\mathscr{D}}$ est linéaire : $(f_1+f_2)_{\mathscr{D}} = (f_1)_{\mathscr{D}} + (f_2)_{\mathscr{D}}$ p.p.[3] Donc $g_{\mathscr{D}} + (g^-)_{\mathscr{D}} = (g+g^-)_{\mathscr{D}}$, qui n'est autre que $(g^+)_{\mathscr{D}}$. Or, par définition, $(g^+)_{\mathscr{D}} = g^+$ p.p. (car g^+ est $\mathscr{D}$-mesurable et intégrable), ce qui donne $g_{\mathscr{D}} + (g^-)_{\mathscr{D}} = g^+$ p.p. Par conséquent, en prenant $h^*(u) := u - h(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$, on a $h^*(g^+) = (g^-)_{\mathscr{D}}$ p.p.

(iv) Soit $C := \{x \in E : g(x) \leq 0\} = (g^+)^{-1}(\{0\})$. Alors $C \in \mathscr{D}$, étant l'image réciproque de $\{0\}$ par g^+.

Par (i), $(g \, \mathbf{1}_C)_{\mathscr{D}} = g_{\mathscr{D}} \, \mathbf{1}_C$ p.p. Or, $g \, \mathbf{1}_C = -g^-$, tandis que $g_{\mathscr{D}} \, \mathbf{1}_C = h(g^+) \, \mathbf{1}_C = h(0) \, \mathbf{1}_C$ p.p. (car $h(g^+) = h(0)$ sur C), ce qui implique que $(-g^-)_{\mathscr{D}} = h(0) \, \mathbf{1}_C$ p.p. En particulier, $\int_E (-g^-) \, \mathrm{d}\mu = \int_E h(0) \, \mathbf{1}_C \, \mathrm{d}\mu = h(0) \, \mu(C)$ (car $E \in \mathscr{D}$), ce qui donne $h(0) = -\frac{1}{\mu(C)} \int_E g^- \, \mathrm{d}\mu$.

(v) On a $g_{\mathscr{D}} = h(g^+) = g^+ - h^*(g^+) = g^+ - (g^-)_{\mathscr{D}} = g^+ + (-g^-)_{\mathscr{D}} = g^+ - \frac{\mathbf{1}_C}{\mu(C)} \int_E g^- \, \mathrm{d}\mu$, p.p. $\square$

Exercice II. (A1) Par définition, $|x - g_r(x)| = |x-r| \, \mathbf{1}_{\{x>r\}} + |x+r| \, \mathbf{1}_{\{x<-r\}} \leq |x| \, \mathbf{1}_{\{|x|>r\}}$ car $|x-r| \leq |x|$ si $x > r$ et $|x+r| \leq |x|$ si $x < -r$. En conséquence, $\mathbb{E}[\, |g_r(\eta) - \eta| \,] \leq \mathbb{E}[\, |\eta| \, \mathbf{1}_{\{|\eta|>r\}} \,] \leq \mathbb{E}[\, \frac{|\eta|^2}{r} \mathbf{1}_{\{|\eta|>r\}} \,] \leq \frac{\mathbb{E}(\eta^2)}{r}$.

(A2) Soit $r > 0$. On a $|\mathbb{E}(\beta_n) - \mathbb{E}(\beta)| \leq \mathbb{E}(|g_r(\beta) - \beta|) + \mathbb{E}(|g_r(\beta_n) - \beta_n|) + |\mathbb{E}[g_r(\beta_n) - g_r(\beta)]|$. D'après (A1), $\mathbb{E}[\, |g_r(\beta) - \beta| \,] \leq \frac{\mathbb{E}(\beta^2)}{r}$ et $\mathbb{E}[\, |g_r(\beta_n) - \beta_n| \,] \leq \frac{K}{r}$, où $K := \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(\beta_n^2) < \infty$. Donc $|\mathbb{E}(\beta_n) - \mathbb{E}(\beta)| \leq \frac{\mathbb{E}(\beta^2)+K}{r} + |\mathbb{E}[g_r(\beta_n) - g_r(\beta)]|$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on fixe $r > 0$ tel que $\frac{\mathbb{E}(\beta^2)+K}{r} < \varepsilon$. Comme g_r est continue et bornée tandis que $\beta_n \to \beta$ en loi, on a $\mathbb{E}(g_r(\beta_n)) \to \mathbb{E}(g_r(\beta))$, $n \to \infty$: il existe donc $n_0 < \infty$ tel que $|\mathbb{E}[g_r(\beta_n) - g_r(\beta)]| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. On déduit alors que $|\mathbb{E}(\beta_n) - \mathbb{E}(\beta)| \leq 2\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Autrement dit, $\mathbb{E}(\beta_n) \to \mathbb{E}(\beta)$, $n \to \infty$.

Comme $|\beta_n| \to |\beta|$ en loi, on a également $\mathbb{E}(|\beta_n|) \to \mathbb{E}(|\beta|)$.

(B1) Pour tout $n \geq 1$, par hypothèse et le principe du regroupement par paquets, $(X_1, \cdots, X_n)$ et Y sont indépendantes, donc Z_n et Y sont indépendantes. Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_{Z_n - Y}(\xi) = \Phi_{Z_n}(\xi) \, \Phi_Y(-\xi)$. Rappelons que convergence en loi équivaut à convergence simple des fonctions caractéristiques. Par le théorème central limite, $\Phi_{Z_n}(\xi) \to \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. Donc $\Phi_{Z_n - Y}(\xi) \to \mathrm{e}^{-t^2}$. Autrement dit, $Z_n - Y$ converge en loi vers la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 2)$.

(B2) Il suffit d'appliquer (B1) et (A2) pour voir que $\mathbb{E}(|Z_n - Y|) \to \mathbb{E}(|2^{1/2} Y|) = \frac{2}{\pi^{1/2}}$.

(B3) Rappelons que $U_n \to U$ en loi dans $\mathbb{R}^d$ équivaut à : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \cdot U_n \to \xi \cdot U$ en loi dans $\mathbb{R}$. Soient $(a_1, \cdots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$. On a $\sum_{i=1}^k a_i X_i + b Z_n = \sum_{i=1}^k a_i X_i + b \frac{X_{k+1} + \cdots + X_n}{n^{1/2}} + b \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{n^{1/2}}$.

[1] Bien sûr, on peut directement utiliser la version du théorème de Radon–Nikodym pour les mesures signées.

[2] On constate que h est unique à $g^+(\mu)$-p.p. près : si $\widetilde{h}$ est une fonction satisfaisant les mêmes conditions que h, alors $\widetilde{h} = h$, $g^+(\mu)$-p.p., où $g^+(\mu)$ est la mesure image de μ par g^+.

[3] La présence de "p.p." provient du fait que l'unicité de $f_{\mathscr{D}}$ est au sens p.p.

On fait maintenant $n \to \infty$. Observons que $\sum_{i=1}^k a_i X_i \to \sum_{i=1}^k a_i X_i$ en loi (car rien ne dépend de n), et que $b\frac{X_{k+1}+\cdots+X_n}{n^{1/2}} \to bY$ en loi (théorème central limite). Puisque pour tout n, $\sum_{i=1}^k a_i X_i$ et $b\frac{X_{k+1}+\cdots+X_n}{n^{1/2}}$ sont indépendantes (principe du regroupement par paquets), ainsi que le sont $\sum_{i=1}^k a_i X_i$ et bY. Donc $\sum_{i=1}^k a_i X_i + b\frac{X_{k+1}+\cdots+X_n}{n^{1/2}} \to \sum_{i=1}^k a_i X_i + bY$ en loi (rappel : si $U_n \to U$ en loi, $V_n \to V$ en loi, et si pour tout n, U_n et V_n sont indépendantes, et si U et V sont indépendantes, alors $U_n + V_n \to U + V$ en loi). D'autre part, $b\frac{\sum_{i=1}^k X_i}{n^{1/2}} \to 0$ p.s. Le théorème de Slutsky implique alors que $\sum_{i=1}^k a_i X_i + bZ_n \to \sum_{i=1}^k a_i X_i + bY$ en loi. Ceci étant valable pour tout $(a_1, \cdots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$, on déduit que $(X_1,\, X_2,\, \cdots, X_k,\, Z_n) \to (X_1,\, X_2,\, \cdots, X_k,\, Y)$ en loi.[4]

(B4) Il s'agit, par définition, de prouver que pour tout $k \ge 1$, Z, X_1, $\cdots$, X_k sont indépendantes.

Soit $k \ge 1$. Soit $(a_1, \cdots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Soit $W_n := \sum_{i=1}^k a_i X_i + bZ_n$. Par hypothèse, $W_n \to W := \sum_{i=1}^k a_i X_i + bZ$ en probabilité, a fortiori en loi. Or, d'après la question précédente, $W_n \to \sum_{i=1}^k a_i X_i + bY$ en loi. Donc W et $\sum_{i=1}^k a_i X_i + bY$ ont la même loi, ainsi la même fonction caractéristique : pour tout réel $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_W(\xi) = \Phi_{\sum_{i=1}^k a_i X_i + bY}(\xi) = \Phi_{X_1}(a_1\xi)\cdots\Phi_{X_k}(a_k\xi)\Phi_Y(b\xi)$. En prenant $\xi = 1$, on obtient $\Phi_{(X_1,\cdots,X_k,Z)}(a_1, \cdots, a_k, b) = \Phi_{X_1}(a_1)\cdots\Phi_{X_k}(a_k)\Phi_Y(b)$. Ceci étant valable pour tout $(a_1, \cdots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$, on déduit que X_1, $\cdots$, X_k, Z sont indépendantes (et que $P_Z = \mathscr{N}(0,\, 1)$, ce que l'on sait a priori à l'aide du théorème central limite).

(B5) Par l'inégalité triangulaire, $|Z_n - Z| \le |Z_n - g_r(Z_n)| + |Z - g_r(Z)| + |g_r(Z_n) - g_r(Z)|$. Comme $\mathbb{E}(Z^2) = 1$ (car $P_Z = \mathscr{N}(0,\, 1)$) et $\mathbb{E}(Z_n^2) = 1$, on a $\mathbb{E}(|Z_n - g_r(Z_n)|) \le \frac{1}{r}$ et $\mathbb{E}(|Z - g_r(Z)|) \le \frac{1}{r}$ (d'après (A1)). Donc $\mathbb{E}(|Z_n - Z|) \le \frac{2}{r} + \mathbb{E}(|g_r(Z_n) - g_r(Z)|)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $r > 0$ tel que $\frac{2}{r} < \varepsilon$. La fonction g_r étant continue, on a $g_r(Z_n) \to g_r(Z)$ en probabilité, c'est-à-dire, $g_r(Z_n) - g_r(Z) \to 0$ en probabilité. De plus, $g_r(Z_n) - g_r(Z)$ est bornée (car g_r est bornée sur $\mathbb{R}$). Le théorème de convergence dominée, version convergence en probabilité, nous permet de déduire que $\mathbb{E}(|g_r(Z_n) - g_r(Z)|) \to 0$, $n \to \infty$. Il existe donc $n_0 < \infty$ tel que $\mathbb{E}(|g_r(Z_n) - g_r(Z)|) < \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$, ce qui donne $\mathbb{E}(|Z_n - Z|) < 2\varepsilon$, $\forall n \ge n_0$. En d'autres mots, $Z_n \to Z$ dans L^1.

(B6) D'après (B4), Z est indépendante de $(X_1, \cdots, X_n)$, et donc de Z_n. Comme dans (B1), ceci implique que $Z_n - Z \to \mathscr{N}(0,\, 2)$ en loi, et donc d'après (A2), $\mathbb{E}(|Z_n - Z|) \to \frac{2}{\pi^{1/2}}$, ce qui contredit (B5). C'est, bien sûr, l'hypothèse de convergence en probabilité dans (B4) qui conduit à cette contradiction.

On ne peut, dans le théorème central limite, remplacer convergence en loi par convergence en probabilité. □

Exercice III. (1) Écrivons $a := \inf_{n\ge1} \mathbb{E}(|Y_n|) > 0$. Soit $b > 0$. Il est clair que $\mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|Y_n|>b\}}) + \mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|Y_n|\le b\}}) \le \mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|Y_n|>b\}}) + b$. Par Cauchy–Schwarz, $\mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|Y_n|>b\}}) \le \{\mathbb{E}(Y_n^2)\}^{1/2} \{\mathbb{P}(|Y_n| > b)\}^{1/2} = \{\mathbb{P}(|Y_n| > b)\}^{1/2}$. Donc $\mathbb{E}(|Y_n|) \le \{\mathbb{P}(|Y_n| > b)\}^{1/2} + b$. Par conséquent, $\forall b \in]0,\, a[$, on a $\inf_{n\ge1} \mathbb{P}(|Y_n| > b) \ge (a-b)^2 > 0$.

(2) Par hypothèse, $\sum_n u_n Y_n$ converge p.s. A fortiori, $u_n Y_n \to 0$ p.s., et a fortiori en probabilité.

Si u_n ne tendait pas vers 0, il existerait $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (n_k) tels que $|u_{n_k}| \ge \varepsilon$, $\forall k$. Comme $u_{n_k} Y_{n_k} \to 0$ en probabilité, on aurait $\mathbb{P}(|u_{n_k} Y_{n_k}| > \varepsilon b) \to 0$, $k \to \infty$. Or, $\mathbb{P}(|u_{n_k} Y_{n_k}| > \varepsilon b) \ge \mathbb{P}(|Y_{n_k}| > b)$, on aurait donc $\mathbb{P}(|Y_{n_k}| > b) \to 0$, $k \to \infty$. Contradiction.[5] En conclusion : $u_n \to 0$.

(3) Soit $A_n := \{|u_n Y_n| > 1\}$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{A_n}) \le \{\mathbb{E}(Y_n^2)\}^{1/2} \{\mathbb{P}(A_n)\}^{1/2} = \{\mathbb{P}(A_n)\}^{1/2}$. Par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(Y_n^2 > \frac{1}{u_n^2}) \le u_n^2 \mathbb{E}(Y_n^2) = u_n^2 \to 0$; d'où $\mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{A_n}) \to 0$.

(4) Soit $Z_n := Y_n\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|\le 1\}}$. Puisque $\mathbb{E}(Y_n) = 0$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = -\mathbb{E}(Y_n\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|>1\}})$, et donc $|\mathbb{E}(Z_n)| \le \mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|>1\}})$, qui converge vers 0 d'après la question précédente. Par conséquent, $\mathbb{E}(Z_n) \to 0$.

(5) Par définition, $\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}(|Y_n|) - \mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|>1\}})$. D'après la question (3), $\mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|>1\}}) \to 0$. D'où $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(|Z_n|) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) \ge b \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > b) > 0$, d'après la question (1). Comme $\mathbb{E}(Z_n^2) \ge \{\mathbb{E}(|Z_n|)\}^2$ (Cauchy–Schwarz ou Jensen), ceci entraîne que $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n^2) > 0$.

(6) On applique le théorème de Kolmogorov admis au début de l'énoncé, à $\eta_n := u_n Y_n$, pour voir que $\sum_n \mathrm{Var}(u_n Y_n\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n|\le1\}}) < \infty$, c'est-à-dire $\sum_n u_n^2 \mathrm{Var}(Z_n) < \infty$.

Comme $\mathrm{Var}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \{\mathbb{E}(Z_n)\}^2$, et $\mathbb{E}(Z_n) \to 0$ (voir (4)), il résulte de (5) que $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Z_n) > 0$: il existe donc $c > 0$ et $N < \infty$ tels que $\mathrm{Var}(Z_n) \ge c$, $\forall n \ge N$. Alors $\infty > \sum_{n=N}^\infty u_n^2 \mathrm{Var}(Z_n) \ge c \sum_{n=N}^\infty u_n^2$. D'où $\sum_{n=N}^\infty u_n^2 < \infty$. Par conséquent, $\sum_n u_n^2 < \infty$. □

[4] Alternativement, on peut vérifier que $\Phi_{(X_1,\, X_2,\, \cdots, X_k,\, Z_n)}$ converge simplement vers $\Phi_{(X_1,\, X_2,\, \cdots, X_k,\, Y)}$.

[5] Alternativement, on peut appliquer le lemme de Borel–Cantelli pour obtenir cette contradiction.