FIMFA 1 **Année 2011–2012**

EXAMEN DU 30 JANVIER 2012

"Intégration & Probabilités"

`180 minutes ; sans documents ni calculatrice`

Rappels : • *Si* $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$*, alors* $\int |f| \, \mathbf{1}_{\{|f| \ge x\}} \, \mathrm{d}\mu \to 0$ *quand* $x \to \infty$.
• *Si* $P_X = \mathscr{N}(0, 1)$*, alors* $\Phi_X(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ *et* $\mathbb{E}(|X|) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}$.

On admet : *(Théorème de Kolmogorov) Si* $\eta_1, \eta_2, \cdots$ *sont des variables aléatoires réelles indépendantes telles que* $\sum_n \eta_n$ *converge* p.s.*, alors* $\sum_n \mathrm{Var}(\eta_n \, \mathbf{1}_{\{|\eta_n| \le 1\}}) < \infty$.

EXERCICE I (5 *points*)**.** Soit μ une mesure finie sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{A})$. Soit $g \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ telle que $\mu(\{x \in E : \, g(x) \le 0\}) > 0$.

(i) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ et toute sous-tribu $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$, il existe $f_{\mathscr{D}} \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{D}, \mu)$ tel que $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f_{\mathscr{D}} \, \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{D}$.

Montrer l'unicité de $f_{\mathscr{D}}$ au sens que si $\widetilde{f}_{\mathscr{D}} \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{D}, \mu)$ est tel que $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A \widetilde{f}_{\mathscr{D}} \, \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{D}$, alors $\widetilde{f}_{\mathscr{D}} = f_{\mathscr{D}}$ p.p.

Montrer que pour tout $A \in \mathscr{D}$, on a $(f \, \mathbf{1}_A)_{\mathscr{D}} = f_{\mathscr{D}} \, \mathbf{1}_A$ p.p.

(ii) On prend désormais $\mathscr{D} := \{(g^+)^{-1}(A), \; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$, la plus petite tribu sur E rendant g^+ mesurable, où $g^+(x) := \max\{g(x), 0\}$, $\forall x \in E$.

Montrer qu'il existe une fonction borélienne h sur $\mathbb{R}_+$ telle que $g_{\mathscr{D}} = h(g^+)$ p.p., où $g_{\mathscr{D}}$ est la fonction dans la Question (i) associée à la fonction g et à la sous-tribu $\mathscr{D}$.

(iii) Donner une fonction borélienne h^* sur $\mathbb{R}_+$, en termes de h, telle que $(g^-)_{\mathscr{D}} = h^*(g^+)$ p.p., où $(g^-)_{\mathscr{D}}$ est la fonction dans (i) associée à $g^- := \max\{-g, 0\}$ et à $\mathscr{D}$.

(iv) Montrer que $\{x \in E : \, g(x) \le 0\} \in \mathscr{D}$. Calculer $h(0)$.

(v) Calculer $g_{\mathscr{D}}$.

EXERCICE II (9 *points*)**.**

Partie A. Préparation.

(A1) Soit η une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(\eta^2) < \infty$. Soit $r > 0$ un réel. Définissons la fonction $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_r(x) := x\, \mathbf{1}_{\{|x|\le r\}} + r\, \mathbf{1}_{\{x>r\}} - r\, \mathbf{1}_{\{x<-r\}}.$$

Montrer que $\mathbb{E}(|g_r(\eta) - \eta|) \le \frac{\mathbb{E}(\eta^2)}{r}$.

(A2) Soient β, β_1, β_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles telles que $\beta_n \to \beta$ en loi. On suppose que $\mathbb{E}(\beta^2) + \sup_{n\ge 1} \mathbb{E}(\beta_n^2) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}(\beta_n) \to \mathbb{E}(\beta)$, et que $\mathbb{E}(|\beta_n|) \to \mathbb{E}(|\beta|)$.

Partie B. Soient Y, X_1, X_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles indépendantes, telles pour tout $n \ge 1$, X_n suit la même loi que X_1. On suppose que Y suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$, et que $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$, $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On pose

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/2}}, \qquad n \ge 1.$$

(B1) Montrer que $Z_n - Y$ converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

(B2) Montrer que $\mathbb{E}(|Z_n - Y|)$ converge vers une limite non nulle que l'on identifiera.

(B3) Fixons $k \ge 1$. Montrer que $(X_1, X_2, \cdots, X_k, Z_n)$ converge en loi (en tant que suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$), lorsque $n \to \infty$.

(B4) On suppose désormais que Z_n converge en probabilité vers une limite notée Z. Montrer que les variables aléatoires Z, X_1, X_2, $\cdots$ sont indépendantes.

(B5) Montrer que $\mathbb{E}(|Z_n - Z|) \le \frac{2}{r} + \mathbb{E}(|g_r(Z_n) - g_r(Z)|)$ pour tout $n \ge 1$ et tout réel $r > 0$, où g_r est la fonction définie dans la Question (A1). Montrer que $Z_n \to Z$ dans L^1.

(B6) Conclure.

EXERCICE III (6 *points*)**.** Soient Y_1, Y_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{E}(Y_n^2) = 1$, $\mathbb{E}(Y_n) = 0$, $\forall n \ge 1$ et que $\inf_{k\ge 1} \mathbb{E}(|Y_k|) > 0$. On suppose qu'il existe une suite de réels non nuls $(u_n,\, n \ge 1)$ telle que $\sum_n u_n Y_n$ converge p.s.

(1) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que $\inf_{k\ge 1} \mathbb{P}(|Y_k| > b) > 0$.

(2) Montrer que $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(3) Montrer que $\mathbb{E}(|Y_n|\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n| > 1\}}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(4) Montrer que $\mathbb{E}(Y_n\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n| \le 1\}}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(5) Montrer que $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n^2\, \mathbf{1}_{\{|u_n Y_n| \le 1\}}) > 0$.

(6) Montrer que $\sum_n u_n^2 < \infty$.

- fin -