Déformations géométriques de sous-groupes fermés

Thomas Haettel

17 mars 2009

Présentation du domaine de recherche

Sous la direction de Frédéric Paulin

Introduction

Depuis le Programme d'Erlangen de Félix Klein en 1872, on considère qu'étudier une géométrie revient à étudier les invariants de l'action d'un groupe sur un espace : ainsi, la notion de groupe est placée au cœur de la géométrie. Motivée par des exemples issus de la physique, l'étude des déformations de structures est donc intimement liée à l'étude des déformations de groupes, et l'étude des déformations asymptotiques de structures à celle des déformations asymptotiques de sous-groupes d'un groupe donné. Ceci est facilité par le fait que l'espace des sous-groupes fermés d'un groupe topologique localement compact, muni de la topologie de Chabauty, est compact. On est ainsi assuré, à extraction près, de l'existence d'un sous-groupe limite. Je m'intéresse, dans des cadres variés, à comprendre ces déformations asymptotiques.

1 La topologie de Chabauty

1.1 Définition de la topologie de Chabauty

Soit G un groupe topologique métrisable localement compact, et soit $\mathcal{G}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G. Il existe sur $\mathcal{G}(G)$ une topologie métrisable, appelée topologie de Chabauty, pour laquelle une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes fermés de G converge vers un sous-groupe fermé H de G si et seulement si :

1. Pour tout $x \in H$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G convergeant vers x telle que, pour tout n, nous ayons $x_n \in H_n$.
2. Pour toute suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pour toute suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x telle que $x_{n_k} \in H_{n_k}$ pour tout k, nous avons $x \in H$.

Cette topologie a été introduite par Claude Chabauty en 1950 ([Cha]) afin d'étudier les réseaux de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas particulier, la topologie est intuitive : deux réseaux de $\mathbb{R}^n$ sont proches si et seulement si on peut en trouver des bases qui sont proches. Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agissant transitivement sur l'ensemble des réseaux de $\mathbb{R}^n$, et le stabilisateur du réseau standard $\mathbb{Z}^n$ étant égal à $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, la topologie de Chabauty sur le sous-espace des réseaux de $\mathbb{R}^n$ correspond alors à la topologie quotient de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$.

L'un des principaux intérêts de la topologie de Chabauty est qu'elle fait de $\mathcal{G}(G)$ un espace compact. Cette propriété est élémentaire (voir [Cha], [CEG, Proposition I.3.1.2, p. 59], [Bou, Chap. VIII, §5], [CDP, Proposition 1.7, p. 58]), mais est très utile pour étudier les déformations limites de sous-groupes.

1.2 Calculs explicites d'espaces de sous-groupes fermés

Les calculs explicites d'espaces des sous-groupes fermés $\mathcal{G}(G)$ sont rares, et passent pour l'instant par une explicitation complète de la liste des sous-groupes fermés du groupe G donné, ce qui donne peu d'espoir de calcul lorsque G est un groupe plus compliqué. Voici les premiers exemples ([Har],[BHK]).

Proposition 1.1. *L'application* $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\} \to \mathcal{G}(\mathbb{Z})$ *définie par* $\frac{1}{n} \mapsto n\mathbb{Z}$ *et* $0 \mapsto \{0\}$ *est un homéomorphisme (voir figure 1).*

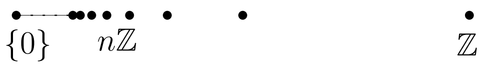

FIGURE 1 – L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$

Remarque. On peut remarquer que les espaces $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{G}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sont homéomorphes.

Proposition 1.2. *L'application* $[0, \infty] \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ *définie par* $0 \mapsto \mathbb{R}$*,* $\alpha \mapsto \alpha\mathbb{Z}$ *et* $\infty \mapsto \{0\}$ *est un homéomorphisme (voir figure 2).*

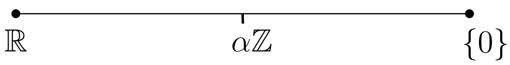

FIGURE 2 – L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R})$

Notons *Aff* le groupe affine de la droite réelle : ce groupe est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$, pour l'action donnée par $x \cdot y = e^x y$.

Proposition 1.3. *L'espace des sous-groupes fermés $\mathcal{G}(Aff)$ du groupe affine Aff de la droite réelle est homéomorphe à un disque fermé auquel on a attaché un segment par l'une de ses extrémités à un point du bord du disque (voir figure 3).*

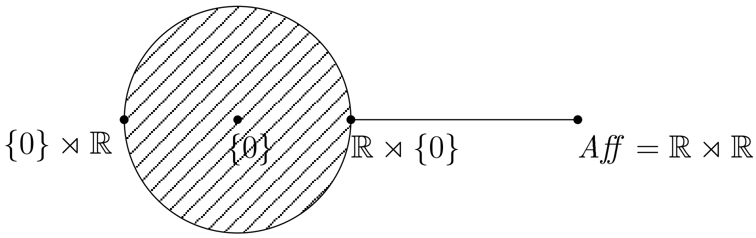

FIGURE 3 – L'espace $\mathcal{G}(\mathit{Aff})$

Le premier calcul non trivial est dû à Pourezza et Hubbard en 1979, qui ont montré le théorème suivant.

Théorème 1.4 (Pourezza - Hubbard [PH])**.** *L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R}^2)$ des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^4$ de dimension 4.*

M. R. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn ont récemment déterminé ([BHK]) l'espace des sous-groupes fermés du groupe de Heisenberg de dimension 3, qui est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ pour l'action unipotente de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $t \cdot (x, y) = (x + ty, y)$. Ce groupe est isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ constitué des matrices triangulaires supérieures strictes avec des 1 sur la diagonale.

1.3 L'espace des sous-groupes fermés du groupe $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

Je me suis attelé à comprendre l'espace des sous-groupes fermés du groupe topologique $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Un sous-groupe fermé « générique » de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ (l'ensemble de ces sous-groupes est un ouvert dense de $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$) est de la forme $H = \mathbb{Z}(\frac{1}{\alpha}, 0) + \mathbb{Z}(\frac{\beta}{\alpha}, n)$, où $\alpha \in]0, \infty[$, $\overline{\beta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Voici comment décrire sommairement la construction de l'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ l'espace des « anneaux hawaïens », réunion d'une infinité dénombrable de cercles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ ayant un point commun et s'accumulant sur ce point. Considérons un cône C_n sur le cercle A_n identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de sorte que la suite des cônes $(C_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ s'accumule sur un segment. Éclatons C_n en chaque point de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, identifié à une partie du bord A_n de C_n. Enroulons enfin le bord éclaté de C_n sur l'espace A, de sorte que le cercle A_p soit parcouru 0 fois si n ne divise pas p et $\phi(\frac{p}{n})$ fois si n divise p (où ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler).

Théorème 1.5 ([Hae1])**.** *L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ est homéomorphe à la réunion des cônes $(C_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ éclatés puis recollés sur l'espace A (voir figure 4).*

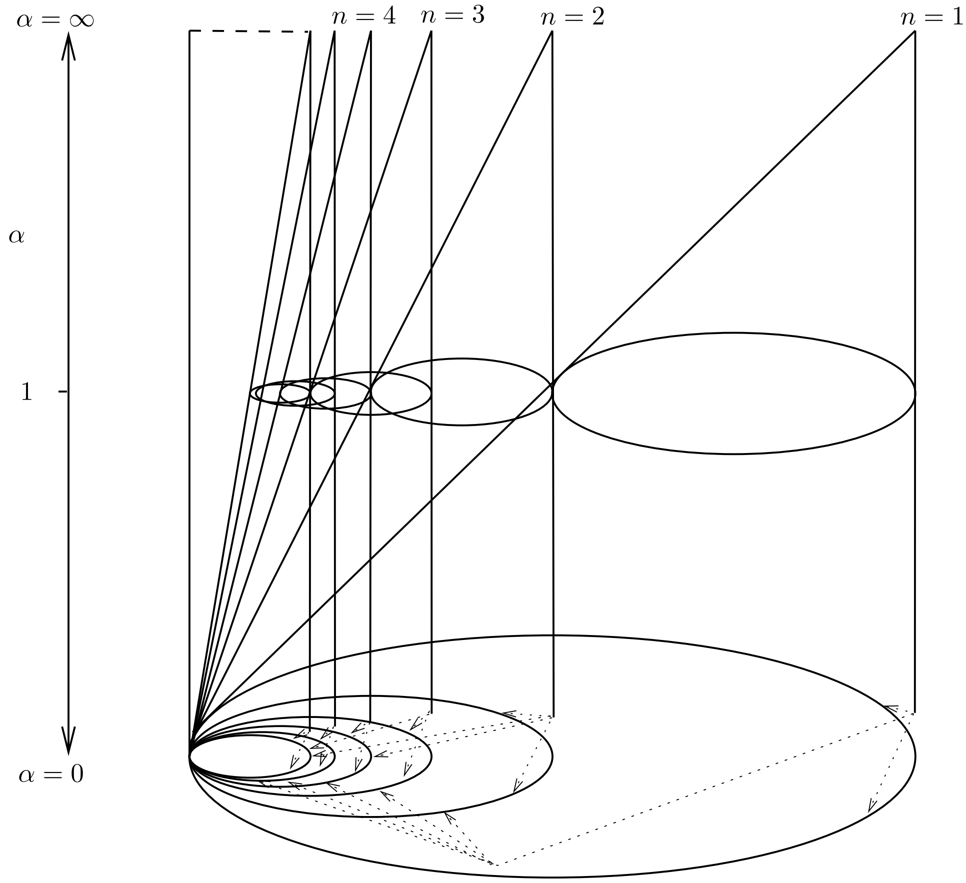

FIGURE 4 – L'espace $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$

Il est surprenant qu'un groupe aussi simple que $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ait un espace des sous-groupes fermés $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ aussi compliqué : par exemple, son groupe fondamental est non dénombrable ([Hae1]).

2 Compactification des espaces symétriques de type non compact

2.1 Espaces symétriques de type non compact

Une variété riemannienne connexe M est appelée un *espace (globalement) symétrique* si tout point p de M est un point fixe isolé d'une isométrie involutive s_p de M ([Hel],[Ebe]).

Exemple. Les sphères $\mathbb{S}^n$, les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ (qui sont les uniques variétés riemanniennes complètes, simplement connexes et de courbure sectionnelle constante -1, à isométrie près) et les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ sont des espaces symétriques, ainsi que leurs produits riemanniens.

Un espace symétrique M est dit *de type non compact* s'il est simplement connexe, si sa courbure sectionnelle est partout négative ou nulle, et si M n'est pas le produit riemannien d'une variété riemannienne M' et d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 1$.

Exemple. Pour $n \geqslant 2$, les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont des espaces symétriques de type non compact car de courbure constante strictement négative : ils ne peuvent en effet pas s'écrire comme produit riemannien avec un espace euclidien $\mathbb{R}^k$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$), car sinon leur courbure s'annulerait. Le produit riemannien de deux espaces symétriques de type non compact est encore de type non compact.

On dit qu'un groupe de Lie est *sans facteur compact* si son algèbre de Lie n'admet pas d'idéal sur lequel la forme de Killing soit définie négative. Une *involution de Cartan* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un automorphisme involutif θ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme de Killing soit définie négative sur $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$ et définie positive sur $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\}$.

La proposition suivante montre que tout espace symétrique de type non compact peut se voir comme un espace homogène, c'est-à-dire comme quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe K.

Proposition 2.1 ([Hel])**.** *Soit M un espace symétrique de type non compact. Alors la composante neutre $G = \mathrm{Isom}_0(M)$ du groupe des isométries de M est un groupe de Lie connexe semi-simple, de centre trivial et sans facteur compact, agissant transitivement sur M. Choisissons un point $x_0 \in M$, et notons K le stabilisateur du point x_0 dans M. Alors l'application suivante est un difféomorphisme*

$$\begin{array}{rcl} G/K & \to & M \\ gK & \mapsto & g \cdot x_0. \end{array}$$

De plus, tout espace homogène G/K est, sous de bonnes hypothèses, un espace symétrique de type non compact, et les constructions de ces deux propositions sont réciproques l'une de l'autre.

Proposition 2.2 ([Hel])**.** *Soient G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini et sans facteur compact, σ une involution de G telle que $d\sigma_e$ soit une involution de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, et K un sous-groupe compact de G tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Alors, pour toute métrique riemannienne G-invariante sur G/K, l'espace G/K est un espace symétrique de type non compact. Si de plus G est de centre trivial, alors le groupe G coïncide avec la composante neutre* $\mathrm{Isom}_0(G/K)$ *du groupe des isométries de l'espace symétrique G/K.*

En résumé, se donner un espace symétrique M (et un point base) revient à se donner un espace homogène G/K (et une métrique G-invariante).

Exemple. Considérons le groupe de Lie semi-simple $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, qui est un sous-groupe compact maximal de G. L'algèbre de Lie de G est l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ des matrices carrées de taille n de trace nulle, et l'algèbre de Lie de K est le sous-espace vectoriel $\mathfrak{k}$ des matrices antisymétriques. La forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ est donnée par $B(X, Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY)$, et l'involution de Cartan $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est donnée par $X \mapsto -{}^tX$. Le groupe G vérifie alors les hypothèses de la proposition précédentes : le quotient G/K est un espace symétrique de type non compact (si on choisit une métrique riemannienne invariante à gauche par G et à droite par K).

2.2 Compactifications d'un espace symétrique

Soit X un espace topologique localement compact. Une *compactification* de X est la donnée d'une paire (K, i), où K est un espace topologique compact et $i : X \to K$ est un plongement (i.e. i réalise un homéomorphisme sur son image) d'image ouverte et dense. On identifie souvent X et $i(X)$ par l'application i. On appelle *bord* de X l'espace $\partial X = K \backslash i(X)$. Si H est un groupe agissant continûment sur X, on dit que c'est une *H-compactification*, ou compactification *H-équivariante*, si l'action de H sur $i(X)$, conjuguée par i de l'action de H sur X, s'étend continûment à K. Cette extension est alors unique.

Exemple. Considérons le modèle du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ du plan hyperbolique réel, et l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ par homographies

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Alors l'ajout du cercle à l'infini $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$-compactification du plan hyperbolique.

2.3 La compactification de Chabauty

Soit X un espace symétrique et soit $G = \mathrm{Isom}_0(X)$ la composante neutre du groupe des isométries de X. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : X &\to \mathcal{G}(G) \\ x &\mapsto G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *L'application ϕ est un plongement, d'image l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de G.*

Supposons de plus que X est un espace symétrique de type non compact. Notons $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ l'adhérence de $\phi(X)$ dans $\mathcal{G}(G)$: l'espace $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est compact. Le couple $(\overline{X}^{\mathcal{G}}, \phi)$ est appelée la *compactification de Chabauty* de l'espace symétrique X. Le groupe G agit sur $\mathcal{G}(G)$ par conjugaison, et l'application ϕ est G-équivariante : si $g \in G$ et $x \in X$, le stabilisateur de $g \cdot x$ dans X est $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1} = g \cdot G_x$. Ainsi, la compactification de Chabauty $\overline{X}^{\mathcal{G}}$ est une G-compactification de X.

2.4 Exemples de convergences de sous-groupes compacts dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$

On connaît exactement les sous-groupes fermés qui apparaissent dans la compactification de Chabauty de l'espace symétrique associé au groupe G (voir [GJT], et [Hae2] pour une preuve n'utilisant pas de mesures). Nous allons en voir des exemples dans le cas particulier $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$.

Posons

$$a_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n^2} \end{pmatrix},$$

où $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors on peut vérifier dans ce cas particulier que la suite de sous-groupes fermés $(a_n \operatorname{SO}(3,\mathbb{R}) a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le sous-groupe fermé

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta & x \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta & y \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(3,\mathbb{R}) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

Posons

$$a'_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

où $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors on peut vérifier dans ce cas particulier que la suite de sous-groupes fermés $(a'_n \operatorname{SO}(3,\mathbb{R}) {a'_n}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le sous-groupe fermé

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & x & z \\ 0 & \pm 1 & y \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(3,\mathbb{R}) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On peut remarquer que ces groupes limites sont de spectre inclus dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$, et qu'ils ne sont pas connexes. L'ensemble des groupes au bord de la compactification de Chabauty de l'espace symétrique $\operatorname{SL}(3,\mathbb{R})/\operatorname{SO}(3,\mathbb{R})$ est constitué des conjugués des trois sous-groupes H, H' et H', où l'on note

$$H'' = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & x & y \\ 0 & \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(3,\mathbb{R}) : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1 \right\}.$$

Dans le cas de $\operatorname{SL}(n,\mathbb{R})$, le bord de la compactification de Chabauty de l'espace symétrique $\operatorname{SL}(n,\mathbb{R})/\operatorname{SO}(n,\mathbb{R})$ est la réunion de $2^{n-1}-1$ orbites de conjugaison par $\operatorname{SL}(n,\mathbb{R})$.

Thomas Haettel
DMA UMR 8553 CNRS
ENS Paris
45 rue d'Ulm
75005 Paris
thomas.haettel@ens.fr

Références

[BHK] M. R. Bridson, P. de la Harpe et V. Kleptsyn, *The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group*, arXiv :0711.3736v1 (2007).

[Bou] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques*, Livre VI (Intégration), Masson-Dunod (1959).

[Cha] C. Chabauty, *Limite d'ensembles et géométrie des nombres*, dans Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 143–151.

[CDP] G. Courtois, F. Dal'Bo et F. Paulin, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Journées mathématiques X-UPS 2007, Les Éditions de l'Ecole Polytechnique (2007).

[CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein et P.L. Green, *Notes on notes of Thurston*, dans *Fundamentals of Hyperbolic Manifolds : Selected Expositions*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series **328** (2006).

[Ebe] P.B. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, Chicago Univ. Press (1996).

[GJT] Y. Guivarc'h, L. Ji et J.C. Taylor, *Compactifications of Symmetric Spaces*, Progress in Math. **156**, Birkhaüser (1998).

[Hae1] T. Haettel, *L'espace des sous-groupes fermés de* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, en préparation.

[Hae2] T. Haettel, *Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non compact*, mémoire de seconde année de mastère (2008).

[Har] P. de la Harpe, *Spaces of closed subgroups of locally compact groups*, Tripode **14**, http ://math.univ-lyon1.fr/~tripode/SurC%28G%29Laius18juin08.pdf (2008).

[Hel] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Grad. Stud. in Math. **34**, Amer. Math. Soc. (1978).

[PH] I. Pourezza et J. Hubbard, *The space of closed subgroups of* $\mathbb{R}^2$, dans Topology **18** (1979), no 2, 143–146.