Fromages suisses et métastabilité

La théorie des modèles des corps valués

Silvain Rideau
sous la direction d'Élisabeth Bouscaren

9 octobre 2011

Table des matières

La théorie des modèles est une branche de la logique mathématique qui a pour but l'étude des structures (notamment des structures algébriques) à travers l'étude de leurs sous-ensembles dits définissables. Elle a de nombreuses applications, en particulier, en géométrie algébrique, en géométrie diophantienne, en géométrie analytique réelle ou en analyse réelle. Je m'intéresserai ici principalement à ses liens avec les corps valués et rappellerai, au fur et à mesure, divers résultats de mathématiques plus « classiques » que ces considérations logiques ont permis de démontrer.

1 Introduction à la théorie des modèles

1.1 Quelques brefs rappels

Commençons par rappeler quelques notions essentielles de théorie des modèles que l'on peut trouver dans les premières pages de n'importe quel livre sur la théorie des modèles, par exemple [Mar02]. Un langage $\mathcal{L}$ est un ensemble de symboles de fonctions et de relations d'une arité donnée. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble M et pour chaque symbole de fonction (resp. de relation) de $\mathcal{L}$ d'une fonction (resp. d'une relation) de la bonne arité, que l'on appelle son interprétation. Un morphisme de structure est alors une fonction qui respecte les interprétations des fonctions et des relations. Par exemple, les corps sont des structures dans le langage des anneaux

$\mathcal{L}_{\mathrm{ann}} := \{+, -, \times, 0, 1\}$ où $+$ $-$ et $\times$ sont des fonction binaires et 0 et 1 sont des fonctions 0-aires, i.e. des constantes.

Toute formule φ écrite à l'aide des symboles de $\mathcal{L}$, de variables et de connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\iff$, $\forall$ et $\exists$ peut donc être interprétée dans $\mathcal{M}$ (à condition d'interpréter les variables qui ne sont pas quantifiée, i.e. libres, par des points de M). Soient $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ une formule dont les variables libres apparaissent parmi les x_i et $\bar{a}$ un n-uplet dans M, on note $\mathcal{M} \vDash \varphi[\bar{a}]$ si $\varphi[\bar{a}]$ est vraie dans $\mathcal{M}$. La formule φ permet donc de définir dans $\mathcal{M}$ un ensemble $\varphi[\mathcal{M}] := \{\bar{a} : \mathcal{M} \vDash \varphi[\bar{a}]\}$, l'ensemble des réalisations de φ dans $\mathcal{M}$. Par exemple, l'ensemble des puissances n-ièmes est défini dans tout groupe (multiplicatif) par la formule $\exists y,\ x = y \times \ldots \times y$. On parlera aussi de formules à paramètres pour une formule de la forme $\varphi[\bar{x}, \bar{m}]$ où $\bar{m}$ est un uplet de M. On dira qu'un point c de M est définissable au dessus de $A \subseteq M$ s'il existe une formule $\varphi[x]$ à paramètres dans A telle que $\varphi[\mathcal{M}] = \{c\}$. On dira qu'il est algébrique au dessus de A s'il existe $\varphi[x]$ à paramètres dans A telle que $\varphi[\mathcal{M}]$ est fini et contient c. Enfin, on dira que A est algébriquement clos s'il contient tous les points qui sont algébriques sur A.

Une théorie T est un ensemble de $\mathcal{L}$-formules sans variables libres ni paramètres (on parle d'énoncés. On dit que $\mathcal{M}$ est un modèle de T, et on le note $\mathcal{M} \vDash T$, si $\mathcal{M}$ satisfait toutes les formules de T. De même, on note $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ la théorie de $\mathcal{M}$ qui est l'ensemble des énoncés vérifiés dans $\mathcal{M}$. Deux $\mathcal{L}$-structures sont dites élémentairement équivalentes si elles ont la même théorie, on le note $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Si un énoncé φ est vrai dans toute modèle d'une théorie T, on dit que T implique φ, ce que l'on note $T \vdash \varphi$. On dira qu'une théorie est complète si tous ses modèles sont élémentairement équivalents. En particulier, une théorie complète implique toute formule ou sa négation. Enfin, si $M \subseteq N$, et que les interprétations des symboles sur $\mathcal{M}$ sont induits par les interprétations dans $\mathcal{N}$, on dira que $\mathcal{M}$ est une sous-structure de $\mathcal{N}$, ce que l'on note $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Si, de plus, tout énoncé à paramètres dans M est vérifié dans $\mathcal{M}$ si et seulement s'il l'est dans $\mathcal{N}$, on dira que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$ (ou $\mathcal{N}$ une extension élémentaire), ce que l'on note $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

1.2 Élimination des quantificateurs et des imaginaires

Lorsqu'on étudie une théorie en particulier, il est utile de savoir exactement comment sont construits les objets définissables. Les « bonnes » théories sont celles qui vérifient les deux propriétés suivantes :

Définition 1.1 :
On dit qu'une théorie T élimine les quantificateurs si pour toute $\mathcal{L}$-formule $\varphi[\bar{x}]$, il existe une formule $\theta[\bar{y}]$ sans quantificateurs telle que $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ et $T \vdash \forall \bar{y}\ \varphi[\bar{x}] \iff \theta[\bar{y}]$.

Définition 1.2 :
On dit qu'une théorie T élimine les imaginaires si pour toute formule $E[\bar{x}, \bar{y}]$ telle que $T \vdash$ « E est une relation d'équivalence », il existe une fonction f définissable dans T (i.e. il existe une formule $\varphi[\bar{x}, \bar{z}]$ telle que $T \vdash$« φ définit une fonction de $\bar{x}$ ») telle que $T \vdash \forall \bar{x}\bar{y}\ E[\bar{x}, \bar{y}] \iff f(\bar{x}) = f(\bar{y})$.

L'élimination des quantificateurs permet de savoir que les ensembles définissables sont générés à partir d'un certain nombre d'atomes par les opérations booléennes (union, intersection et complémentation) et l'élimination des imaginaires permet de savoir que tous les quotients définissables sont, en fait, simplement des ensembles définissables. Dans chacun des cas il y a une méthode canonique pour construire une extension définissable du langage dans laquelle on ait l'élimination voulue. Pour l'élimination des quantificateurs il suffit de rajouter, pour chaque formule sans paramètres, un prédicat que l'on interprète par cette même formule (c'est la Morleyisation), et pour les imaginaires, il suffit de rajouter à tout modèle $\mathcal{M}$ un point par classe d'équivalence définissable et des symboles de fonctions pour toutes les surjections canoniques (c'est la construction $\mathcal{M}^{eq}$ de Shelah).

Si ces constructions permettent de considérer que toute théorie abstraite élimine à la fois les imaginaires et les quantificateurs, pour étudier une théorie précise, ce procédé est complètement contre-productif car il n'informe absolument pas sur la forme des objets définissables. Ce qui nous intéresse vraiment, c'est d'essayer de comprendre quelle est l'extension minimale du langage telle que la théorie vérifie ces deux propriétés. Voyons quelques exemples pour illustrer :

Exemple 1.3 :

- *La théorie des corps algébriquement clos dans le langage des anneaux élimine les quantificateurs. Ce résultat de Tarski est l'équivalent modèle-théorique du théorème de Chevalley qui dit que les ensembles constructibles (i.e. les combinaisons booléennes de fermés de Zariski) sont clos par projection. Cette théorie élimine aussi les imaginaires (voir [Poi83]).*
- *La théorie des corps réels clos* RCF *(i.e. les corps élémentairement équivalents à $\mathbb{R}$) n'élimine pas les quantificateurs car l'ensemble des carrés n'est pas définissable sans quantificateurs, mais c'est le seul problème. En effet, Tarski a aussi démontré que* RCF *admet l'éliminationd des quantificateurs dans l'extension du langage des anneaux avec un prédicat $\leqslant$ définit par $x \leqslant y \iff \exists z\, x - y = z \times z$. Ce théorème a aussi une contrepartie algébrique, le théorème de Tarski-Seidenberg qui énonce que les ensembles semi-algébriques sont clos par projection. Cette théorie (avec l'ordre) élimine aussi les imaginaires.*
- *La théorie des $\mathbb{Z}$-groupes (i.e. les groupes qui ont la même théorie que $\mathbb{Z}$) n'élimine pas les quantificateurs dans le langage des groupes, par contre si on rajoute, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les ensembles de multiples de k, alors la théorie élimine les quantificateurs et les imaginaires (pour ce dernier résultat, voir [Clu03])*

1.3 L'espace des types

Bien que la théorie des modèles, comme je l'ai dit précédemment, soit l'étude des ensembles définissables dans une structure, un de ses principaux outils est de considérer des objets, a priori plus compliqués : les ensembles définissables par une infinité de formules, i.e. les types.

Définition 1.4 (Types) **:**
Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ un ensemble de paramètres et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Un n-type partiel sur A est un ensemble de formules à paramètres dans A consistant (i.e. satisfaisable, potentiellement dans un extension élémentaire de $\mathcal{M}$) dont les variables libres sont parmi $x_1, \dots, x_n$. On dira qu'un type est complet (on pourra aussi parler simplement de type) s'il est maximal au sens de l'inclusion. On note $\mathcal{S}_n(A)$ l'ensemble des n-types (complets) sur A et $\mathcal{S}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \mathcal{S}_n(A)$ l'ensemble des types sur A.

Si $\bar{a}$ est un uplet de $\mathcal{M}$, on note

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) := \{\varphi[\bar{x}]\ \mathcal{L}\text{-formule à paramètres dans } A : \mathcal{N} \vDash \varphi[\bar{a}]\}$$

C'est un n-type au-dessus de A où n est la longueur de $\bar{a}$ que l'on nomme le type de $\bar{a}$. Réciproquement, on dira que $\bar{a}$ est un réalisation de $p \in \mathcal{S}(A)$ si pour tout formule $\varphi[\bar{x}] \in p$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[\bar{a}]$, i.e. $p \subseteq \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$.

On peut munir $\mathcal{S}_n(A)$ d'une topologie engendrée par les ouverts de la forme $|\varphi| := \{p \in \mathcal{S}_n(A) : \varphi \in p\}$. C'est alors un espace totalement discontinu car les éléments de la base d'ouverts sont aussi fermés. En effet, $|\varphi|$ n'est rien d'autre que le complémentaire de $|\neg\varphi|$. Le théorème de compacité, outil fondamental de la théorie des modèles, tire son nom du fait qu'il peut s'exprimer comme suit :

Théorème 1.5 (Compacité pour la logique du premier ordre) **:**

L'espace des n-types sur A est compact.

On en déduit la formulation plus classique que tout ensemble de formules $\Sigma[\bar{x}]$ est satisfaisable (dans une extension élémentaire) si et seulement s'il est finiment satisfaisable (i.e. tout sous-ensemble fini de Σ est satisfaisable). Comme il est évident que satisfaisable implique finiment satisfaisable, il suffit de montrer la réciproque. Supposons que $\Sigma[\bar{x}]$ ne soit pas satisfaisable, il s'en suit alors que $\bigcap_{\varphi\in\Sigma}|\varphi|$ est une intersection vide. En effet si cette intersection contenait un type p, alors ce type contiendrait Σ et comme p est satisfaisable, Σ le serait aussi. Cette intersection de fermée étant vide, on peut en extraire un nombre fini de fermés $|\varphi_i|$ dont l'intersection est toujours vide. Mais alors les φ_i ne sont satisfaisable dans aucune extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$. En effet s'ils l'étaient, on aurait $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ et $c \in N$ tel que pour tout i, $\mathcal{N} \vDash \varphi_i[c]$ et $\mathrm{tp}(c/A)$ serait alors dans $\bigcap_i |\varphi_i| = \varnothing$, ce qui est absurde.

Les types d'une structure peuvent être extrêmement compliqués à comprendre et à manipuler. Les deux définitions qui suivent caractérisent des types plus « raisonnables », avec lesquels il est plus facile de travailler.

Définition 1.6 (Types définissables) **:**

Soit $p[\bar{x}] \in \mathcal{S}_n(A)$*, on dit que* p *est définissable si pour toute* $\mathcal{L}$*-formule* $\varphi[\bar{x},\bar{y}]$*, il existe une* $\mathcal{L}$*-formule* $(d_p\varphi)[\bar{y}]$ *(potentiellement à paramètres) telle que pour tout* $\bar{a} \in A$*, on ait* $\varphi[\bar{x},\bar{a}] \in p$ *si et seulement si* $\mathcal{M} \vDash (d_p\varphi)[\bar{a}]$.

Définition 1.7 (Types invariants) **:**

Soient $p[\bar{x}] \in \mathcal{S}_n(M)$*. Les automorphismes de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ *agissent sur* p *par* $\sigma(p) = \{\varphi[\bar{x},\sigma(\bar{a})] : \varphi[\bar{x},\bar{a}] \in p\}$*. On dit que* p *est* $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$*-invariant si tous les automorphismes de* $\mathcal{M}$ *qui fixent* A *point par point fixent* p *par l'action que l'on vient de définir. Il s'en suit alors (et c'est équivalent) que dans toute extension élémentaire* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{M}$*, l'ensemble des réalisations de* p *est laissé globalement invariant par tout automorphisme de* $\mathcal{N}$ *qui fixe* A.

La condition de définissabilté d'un type, qui est très forte, demande en quelque sorte que l'ensemble des formules qui compose le type soit lui-même un ensemble définissable dans le modèle, ou du moins, formule par formule, l'ensemble des paramètres tels que cette formule est dans le type soit définissable. On peut donc parler du fait d'appartenir au type à l'intérieur de la structure elle-même. La condition d'invariance est un peu plus faible mais assure tout de même que le type est assez canonique au dessus de A. Il est évident qu'un type A-définissable (i.e. les $d_p\varphi$ sont à paramètres dans A) est $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$-invariant. Si $p \in \mathcal{S}_n(A)$ et $q \in \mathcal{S}_n(M)$, on dira que q est une extension $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$-invariante de p si $p \subseteq q$ et q est $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$-invariant.

2 Corps valués

Nous allons maintenant nous intéresser aux corps valués et à ce que la théorie des modèles a pu apporter à leur étude.

Définition 2.1 (Corps valué) **:**

Soient K *un corps et* Γ *un groupe abélien totalement ordonné. Une valuation est une application* $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ *telle que :*

(i) *pour tout* $a \in K$*,* $v(a) = \infty \iff a = 0$ *;*

(ii) *pour tous* $a, b \in K$*,* $v(ab) = v(a) + v(b)$ *;*

(iii) *pour tous* $a, b \in K$*,* $v(a+b) \geqslant \min(v(a), v(b))$ *;*

(iv) pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma < \infty$ *et* $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$.

L'ensemble $\nu(x) \geqslant 0$ définit alors un anneau local $\mathcal{O}_K$ d'idéal maximal $\mathfrak{M}_K$. Dans la suite on notera $k_K = \mathcal{O}_K / \mathfrak{M}_K$ le corps résiduel de K et res : $\mathcal{O}_K \to k_K$ la surjection canonique. On étudie les corps valués dans le langage suivant :

Définition 2.2 ($\mathcal{L}_{\text{div}}$) **:**
Le langage $\mathcal{L}_{\text{div}}$ *est* $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\text{div}\}$ *et* div *est une relation binaire. Dans un corps valué* (K, ν)*, on interprète* $x \operatorname{div} y$ *par* $\nu(x) \leqslant \nu(y)$.

2.1 Les corps valués algébriquement clos

La théorie des corps valués algébriquement clos de valuation non triviale, ACVF est probablement la théorie de corps valué la plus étudiée. En 1956, Robinson a démontré qu'elle élimine les quantificateurs (voir [Rob56]). Holly en a déduit en 1995 une description canonique des ensembles définissables dans ACVF :

Définition 2.3 (Boules et fromage suisse) **:**
Soit (K, ν) *un corps valué. Soit* $a \in K$ *et* $\gamma \in \Gamma_K$*, on définit* $B_{\geqslant\gamma}(a) := \{x \in K : \nu(x - a) \geqslant \gamma\}$ *la boule fermée de rayon* γ *et* $B_{>\gamma}(a) := \{x \in K : \nu(x - a) > \gamma\}$ *la boule ouverte de rayon* γ.
Un fromage suisse de K *est un ensemble de la forme* $b \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} b_i)$ *où* b *et les* b_i *sont des boules (ouvertes ou fermées) de* K*. On dira que deux fromages suisses sont trivialement emboîtés si la boule extérieure de l'un est un trou de l'autre.*

Proposition 2.4 ([Hol95, Théorème 3.26]) **:**
Soit $(K, \nu) \vDash$ ACVF*, tout sous-ensemble définissable de* K *s'écrit de manière unique comme une union finie de fromages suisses non trivialement emboîtés.*

On peut alors facilement en déduire quels sont les types dans ACVF au-dessus d'ensembles de paramètres algébriquement clos.

Définition 2.5 (Généricité) **:**
Soient $(b_i)_{i \in I}$ *une famille de boules* A*-définissables et* $P = \bigcap_i b_i$*. On dit que* $x \in K$ *est générique dans* P *au-dessus de* A *si* $x \in P$ *et* x *n'appartient à aucune sous-boule stricte* A*-définissable de* P.
On note $\alpha_P | A$ *le* A*-type partiel suivant, que l'on appelle le type générique sur* P *au dessus de* A *:*

$$\alpha_P = \{x \in b_i : i \in I\} \cup \{\neg x \in b : b \textit{ est une boule } A\textit{-définissable et } b \subsetneq P\}$$

Proposition 2.6 :
Soit $K \vDash$ ACVF*, tout point de* K *est générique sur une intersection de boules et si* P *est une intersection de boules et* A *un ensemble de paramètres algébriquement clos, alors* α_P *est complet*

Quelques années plus tard, dans [HHM06], Haskell, Hrushovski et Macpherson démontrent qu'il suffit de rajouter des points correspondants aux réseaux, i.e. les sous-$\mathcal{O}_K$-modules libres de rang n de K^n, et pour tout réseau s de rajouter l'ensemble $s / \mathfrak{M} s$ pour que ACVF admettent l'élimination des imaginaires. Dans la suite de leur article [HHM08], ils démontrent de nombreuses propriétés de ACVF : l'existence d'extensions invariantes pour tous les types sur des ensembles de paramètres algébriquement clos, le fait que les types génériques des boules sont définissables...

Une des principales applications de ces travaux est le récent article de Hrushovski et Loeser (voir [HL]), où ils démontrent que l'analytifié de Berkovich de toute variété algébrique quasi-projective peut être assimilé à un ensemble définissable de types et ils en déduisent l'existence d'une rétraction vers un complexe simplicial, en toute dimension.

2.2 Les corps valués p-adiquement clos

À vrai dire la théorie des modèles des corps valués est peu étudiée en toute généralité. Il y en a une sous-classe qui intéresse particulièrement les théoriciens des modèles, et ce depuis le théorème d'Ax-Kochen-Ershov, c'est les corps henséliens.

Définition 2.7 (Corps Hensélien) **:**
Un corps valué (K, v) *est dit Hensélien si pour tout polynôme* $P[X] \in \mathcal{O}_K[X]$ *et tout* $a \in \mathcal{O}_K$ *tel que* $\mathrm{res}(P(a)) = 0$ *et* $\mathrm{res}(P'(a)) \neq 0$*, il existe* $b \in \mathcal{O}$ *tel que* $P(b) = 0$ *et* $\mathrm{res}(a) = \mathrm{res}(b)$.

Théorème 2.8 (Ax-Kochen-Ershov) **:**
Soient K *et* L *deux corps valués henséliens de caractéristique résiduelle nulle (i.e.* $\mathrm{car}(k_K) = \mathrm{car}(k_L) = 0$*). Ils sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs groupes de valeurs sont élémentairement équivalents (dans le langage des groupes) et leurs corps résiduels sont élémentairement équivalents (dans le langage des anneaux).*

Ce théorème a été démontré par Ax-Kochen (et indépendamment par Ershov) en 1965 dans [AK65]. Il était motivé par la démonstration d'une conjecture de Artin qui prévoyait que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et pour tout nombre premier $p \notin X_d$, tout polynôme homogène de degré d dans $\mathbb{Q}_p$ en au moins $d^2 + 1$ variables a une racine non triviale. Il s'est avérée que la conjecture est fausse en tant que telle mais que pour tout d il y a au plus un nombre fini de nombres premiers pour laquelle elle est fausse. Il a fallu attendre jusqu'il y a quelques années pour une preuve purement algébrique de ce résultat.

Bien que le théorème d'Ax-Kochen-Ershov soit un outil puissant, il y a cependant des corps valués très étudiés, en particulier en théorie des nombres, qui ne rentrent pas dans le cadre de ce théorème car leur caractéristique résiduelle n'est pas nulle : pour tout p premier, le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. C'est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique qui à tout rationnel $\frac{a}{b}p^n$ où a et b ne sont pas divisibles par p associe n. C'est un corps Hensélien, et bien que sa caractéristique résiduelle ne soit pas nulle, il vérifie la conclusion du théorème d'Ax-Kochen-Ershov. En effet, tout corps dont le groupe de valeur est un $\mathbb{Z}$-groupe et dont le corps résiduel est $\mathbb{F}_p$ est élémentairement équivalent à $\mathbb{Q}_p$. On dit que de tels corps sont p-adiquement clos, et on note pCF leur théorie.

C'est d'ailleurs la preuve d'Ax et Kochen qui a inspiré à Macintyre, en 1976 (voir [Mac76]), une preuve d'élimination des quantificateurs pour $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathcal{L}_{\mathrm{div}}$ étendu avec les prédicats qui définissent les puissances k-ièmes. Une des applications algébriques de ce résultat est l'article [Den84] de Denef en 1984, dans lequel il démontre (ou redémontre, pour certaines) la rationalité de séries de Poincaré :

Définition 2.9 :
Soit (P_i) *une famille finie de polynômes de* $\mathbb{Q}_p[X_1, \ldots, X_n]$*, on note* $a_n := \#\{x \mod p^n : x \in \mathbb{Z}_p^n \wedge \forall i\ P_i(x) \equiv 0 \mod p^n\}$ *et* $\widetilde{a}_n := \#\{x \mod p^n : x \in \mathbb{Z}_p^n \wedge \forall i\ P_i(x) = 0\}$*. On peut alors définir les deux séries suivantes, dites de Poincaré,* $P(T) = \sum_i a_i T^i$ *et* $\widetilde{P}(T) = \sum_i \widetilde{a}_i T^i$

Théorème 2.10 (Denef) **:**
Les séries P *et* $\widetilde{P}$ *sont rationnelles.*

La preuve consiste à remarquer que les coefficients de ces séries sont les mesures de sous-ensembles définissables de $\mathbb{Q}_p$ et comme, par le théorème de Macintyre, on sait exactement comment sont construits ces ensembles, cela nous donne des indications sur leur mesure. En 1988, Grunewald, Segal et Smith dans [GSS88], ont appliqué ce genre de techniques pour montrer la rationalité de séries de comptage des sous-groupes : si G est un groupe, on note b_n le nombre de sous-groupes d'indice n. Ils ont alors montré que si G est finiment engendré et nilpotent, les b_n sont toujours finis et $\sum_i b_{p^i} T^i$ est rationnelle. Leur preuve procède en deux temps. Tout d'abord, montrer que l'ensemble des sous-groupes de G d'indice une puissance de p est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalences d'une relation d'équivalence définissable E sur un sous-ensemble définissable D de $\mathbb{Q}_p^n$. Et ensuite, trouver une fonction $f : D \to \mathbb{Q}_p$ telle que pour tout $x \in D$, la mesure de la E-classe de x est égale à $v_p(f(x))$. Dans ce cas précis, la relation d'équivalence E est assez simple pour qu'on puisse trouver explicitement une telle fonction f, mais cette méthode atteint ses limites si le E devient trop compliquée, en particulier, si, au lieu de compter les sous-groupes d'indice p^n, on veut compter les caractères complexes irréductibles de dimension p^n.

C'est donc dans le but de montrer la rationalité de telles séries que Hrushovski et Martin (voir [HM08]) se sont attelés à la tâche de démontrer l'élimination des imaginaires dans pCF. Comme tout corps p-adiquement clos se plonge dans un corps algébriquement clos, l'idée est d'utiliser le résultat d'élimination d'imaginaires dans ACVF pour démontrer qu'il suffit de rajouter les même points à un corps p-adiquement clos pour obtenir l'élimination des imaginaires (la preuve de ce théorème est le but de mon mémoire de M2).

3 Stabilité et Métastabilité

Ce qui fait la difficulté de la preuve précédente est qu'aucun type de pCF n'est définissable. L'espace des types est compliqué, en particulier, il est très gros. À l'autre extrême, il y a les théories dites stables dont l'étude a ses racines dans les travaux de Morley sur le théorème de catégoricité [1] et qui est développée par Shelah dans le cadre de la théorie de la classification.

Définition 3.1 (Stabilité) **:**
Soit κ un cardinal infini, une théorie T est κ-stable si pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T et tout ensemble $A \subseteq M$ de cardinal κ, $\mathcal{S}(A)$ est de cardinal κ. On dira que T est stable si elle est κ-stable pour un certain cardinal κ.

Comme le cardinal de $\mathcal{S}(A)$ est au moins le cardinal de A, il s'en suit que la stabilité est une hypothèse de petitesse de l'espace des types. Elle a de nombreuses définitions équivalentes dont la définition historique qui est liée a la présence d'un ordre dans la théorie.

Définition 3.2 (Propriété de l'ordre) **:**
Une formule $\varphi[\bar{x}, \bar{y}]$ a la propriété de l'ordre dans $\mathcal{M}$ s'il existe $(\bar{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\bar{b}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans M tels que $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_i, \bar{b}_j]$ si et seulement si $i < j$.

1. Le théorème de catégoricité s'énonce ainsi : toute théorie dans un langage dénombrable qui a un seul modéle à isomorphisme près d'un certain cardinal non dénombrable a un seul modèle à isomorphisme près de tout cardinal non dénombrable.

Théorème 3.3 :

Soit T *une théorie, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est stable ;*

(ii) Dans tout modèle de T*, aucune formule n'a la propriété de l'ordre ;*

(iii) Tous les types sont définissables.

Une des conséquences principales de l'hypothèse de stabilité est qu'on peut alors définir une notion d'indépendance abstraite au dessus de tout ensemble de paramètres A, notée $\downarrow_A$.

Parmi les exemples les plus habituels de théories stables, il y a (vous vous en seriez peut être douté) les corps algébriquement clos (où la notion abstraite d'indépendance due à la stabilité se trouve être l'indépendance algébrique), les K-espaces vectoriels, où K est un corps fixé (la notion d'indépendance de la stabilité et alors nulle autre que l'indépendance linéaire) et la théorie de l'ensemble infini sans structure. Ces classes de structures vérifient même une propriété encore plus restrictive qui est la forte minimalité : tous les ensembles unaires définissables sont soit finis soit cofinis. Il existe aussi des théories stables non fortement minimales, c'est le cas par exemple des corps séparablement clos non parfaits [2] et des corps différentiellement clos de caractéristique nulle.

Définition 3.4 (Corps différentiel) **:**

Soit K *un corps de caractéristique nulle, une dérivation sur* K *est une fonction* $\delta : K \to K$ *qui est un morphisme de groupe additif et qui vérifie la règle de Leibniz : pour tout* $x, y \in K$, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$. *On définit l'anneau des polynômes différentiels sur* K *par* $K\{X\} = K[(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}]$. *Tout polynôme différentiel peut s'évaluer en un point* x *en remplaçant* $X^{(i)}$ *par* $\delta^i(x)$ *et on définit l'ordre d'un polynôme différentiel comme le* i *maximal tel que* $X^{(i)}$ *apparaisse dans le polynôme.*

On dit que K *est différentiellement clos si pour tout* $f, g \in K\{X\}$ *tel que* g *n'est pas nul et l'ordre de* f *est strictement supérieur à l'ordre de* g*, il existe* $a \in K$ *tel que* $f(a) = 0 \neq g(a)$.

En revanche, toutes les théories classiques où un ordre est sous-jacent sont instables : les corps réels clos, les groupes abéliens divisibles ordonnés, les corps valués algébriquement clos, les corps p-adiquement clos... Toutes les théories que je viens de nommer ont cependant une propriété plus faible que la stabilité, la propriété NIP (not indendance property), qui est de plus en plus étudiée. Il y a aussi bien sûr des théories qui n'ont pas NIP (et qui sont donc instables), et en premier lieu l'arithmétique (i.e. la théorie de $(\mathbb{N}, +, \times)$).

Définition 3.5 (Propriété d'indépendance) **:**

Une formule $\varphi[\bar{x}, \bar{y}]$ *a la propriété d'indépendance dans* $\mathcal{M}$ *si pour tout entier* N *il existe des uplets* $(\bar{a}_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ *et* $(\bar{b}_J)_{J\subseteq[\![0\ldots N]\!]}$ *dans* M *tels que* $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}_i, \bar{b}_J]$ *si et seulement si* $i \in J$.

On dira qu'une théorie a NIP si aucune formule n'a la propriété d'indépendance dans aucun modéle de T.

On peut remarquer que la propriété d'indépendance apparaît aussi en probabilités sous le nom de Vapnik-Chervonenkis-dimension finie.

Comme je l'ai fait remarqué précédemment, les deux théories ACVF et pCF ont NIP, il y a cependant une différence fondamentale entre ces deux théories. L'une, pCF, est irrémédiablement instable, l'autre, par contre, peut être vue comme l'interaction d'une partie stable qui est liée au corps résiduel (qui est un corps algébriquement clos et donc une structure très stable vu qu'elle est fortement minimale) et d'une partie instable qu'est le groupe de valeur (qui est ordonné). On parle dans ces cas-là de métastabilité.

2. C'est d'ailleurs une conjecture toujours ouverte de savoir si tout corps stable est séparablement clos.

Définition 3.6 (St_A) **:**
Un ensemble A*-définissable* X *est dit stablement plongé si pour tout ensemble définissable* Y*,* $X \cap Y$ *est définissable à partir de* A *et de points de* X*. L'ensemble* X *est dit stable si la structure* X *muni d'un prédicat par sous-ensemble* A*-définissable de* X^n *est stable. On note* St_A *la structure qui est l'union disjointe de tous les ensembles* A*-définissables stables et stablement plongés munis de leurs sous-ensembles* A*-définissables.*

Par exemple dans ACVF le corps résiduel k est stable et stablement plongé. Il en est de même de tous les k-espaces vectoriels définissables (et tous les ensembles stables et stablement plongés sont essentiellement de cette forme).

La structure St_A est, en quelque sorte, la partie stable de la structure qui est définissable au dessus de A. On peut vérifier que c'est elle même une structure stable. Si $B \subseteq M$, On note $\mathrm{St}_A(B)$ l'ensemble des points définissables sur B qui sont dans St_A.

Définition 3.7 (Type stablement dominé) **:**
Soit $\bar{c} \in M$*, on dit que* $\mathrm{tp}(\bar{c}/A)$ *est stablement dominé si pour tout* $B \subseteq M$ *tel que* $\mathrm{St}_A(\bar{c}) \downarrow_A \mathrm{St}_A(B)$ *alors* $\mathrm{tp}(B/A\,\mathrm{St}_A(\bar{c})) \Rightarrow \mathrm{tp}(B/Ac)$*, i.e. si* B' *a le même type que* B *au dessus de* $A\,\mathrm{St}_A(\bar{c})$ *alors il a aussi le même type au dessus de* $A\bar{c}$*.*

.

Définition 3.8 (Métastabilité) **:**
Soit Γ *un ensemble définissable de* M *stablement plongé et muni d'un ordre définissable sans paramètres. On dit que* $\mathcal{M}$ *est métastable si :*

(i) Tout type au dessus d'un ensemble de paramètres algébriquement clos a une extension invariante ;

(ii) Pour tout n*, il existe un ensemble* B *qui contient* A *tel que pour tout n-uplet* $\bar{a}$*, le type* $\mathrm{tp}(\bar{a}/B\Gamma(B\bar{a}))$ *est stablement dominé.*

La métastabilité exprime donc que si on ignore la partie instable en la mettant dans les paramètres alors les types sont « contrôlés » par la partie stable de la structure. Le premier exemple de structure métastable est les corps valués algébriquement clos, et la notion de métastabilité a, plus ou moins, été inventée à partir de ces structures (voir [HHM08]). Il y a un autre exemple de théorie qui semble faite pour cette notion de métastabilité : les corps valués différentiellement clos (essentiellement un corps différentiellement clos muni d'une valuation, avec quelques axiomes pour que les deux interagissent bien – voir [Sca00] où Scanlon présente des structures un petit peu plus générales), mais il n'est pas clair que les extensions invariantes existent dans cette théorie.

L'étude de cette dernière théorie, de ses rapports avec la métastabilité et de la métastabilité dans un cadre plus abstrait est la direction dans laquelle semble se diriger ma thèse.

Références

[AK65] James Ax et Simon Kochen. « Diophantine Problems Over Local Fields I ». Dans : *American Journal of Mathematics* 87.3 (1965), p. 605–630.

[Clu03] Raf Cluckers. « Presburger Sets and P-Minimal Fields ». Dans : *The Journal of Symbolic Logic* 68.1 (2003), pp. 153–162.

[Den84] Jan Denef. « The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety ». Dans : *Inventiones Mathematicae* 77 (1984), p. 1–23.

[GSS88] F. J. Grunewald, D. Segal et G. C. Smith. « Subgroups of Finite Index in Nilpotents Groups ». Dans : *Inventiones Mathematicae* 93.1 (1988), p. 185–223.

[HHM06] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson. « Definable Sets in Algebraically Closed Valued Fields : Elimination of Imaginaries ». Dans : *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 597 (2006), p. 175–236.

[HHM08] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson. *Stable Domination and Independance in Algebraically Closed Valued Fields*. Association for Symbolic Logic. Lecture Notes in Logic 30. Cambridge University Press, 2008.

[HL] Ehud Hrushovski et François Loeser. « Non-archimedean tame topology and stably dominated types ». arXiv : 1009.0252.

[HM08] Ehud Hrushovski et Ben Martin. « Zeta Functions from Definable Equivalence Relations ». arXiv : math/0701011. 2008.

[Hol95] Jan E. Holly. « Canonical forms for definable subsets of algebraically closed and real closed valued fields ». Dans : *The Journal of Symbolic Logic* 60.3 (1995), p. 843–860.

[Mac76] Angus Macintyre. « On Definable Subsets of p-Adic Fields ». Dans : *The Journal of Symbolic Logic* 41.3 (1976), p. 605–610.

[Mar02] David Marker. *Model Theory : An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics 217. Springer, 2002.

[Poi83] Bruno Poizat. « Une théorie de Galois imaginaire ». Dans : *The Journal of Symbolic Logic* 48.4 (1983), p. 1151–1170.

[Rob56] Abraham Robinson. *Complete Theories*. Studies in Logic 7. North-Holland Publishing Company, 1956.

[Sca00] Thomas Scanlon. « A model complete theory of valued D-fields ». Dans : *The Journal of Symbolic Logic* 65.4 (2000), p. 1758–1784.