Introduction à un domaine de recherche : les formules de Poisson motiviques

Sous la direction d'Antoine Chambert-Loir

Margaret Bilu

21 octobre 2013

Résumé

L'objectif du présent texte est double : tout d'abord, faire comprendre au lecteur l'usage, devenu classique, de formules de Poisson en théorie des nombres. D'autre part, ce texte cherche à donner une introduction à un nouvel axe de recherche, l'analyse de Fourier motivique, inspirée par l'intégration motivique, qui permettrait de transposer les résultats de théorie des nombres obtenus à l'aide de formules de Poisson à un cadre plus géométrique. Après avoir introduit les notions de théorie des nombres nécessaires et énoncé la formule de Poisson sous une forme assez générale, nous allons expliquer dans quel type de problèmes et dans quelle étape de leur résolution une formule de Poisson a été utile. Ensuite, nous allons passer du côté motivique et faire toutes les constructions nécessaires pour pouvoir énoncer ce qu'on appelle la formule de Poisson motivique. Par souci de complétude, nous avons inclus une brève annexe résumant les notions de géométrie algébrique utilisées.

Table des matières

1 Préliminaires et motivation

Les idèles et adèles, introduits respectivement par Chevalley (1940) et Artin et Whaples (1945) sont un outil extrêmement précieux en théorie des nombres. Un exemple particulièrement flagrant en est donné par les idées spectaculaires mises en jeu dans la thèse de Tate [8]. Il est bien connu que la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},$$

définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, se prolonge de manière méromorphe à tout $\mathbf{C}$ et vérifie une équation fonctionnelle donnant une relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, moyennant quelques facteurs un peu mystérieux faisant intervenir la fonction Γ, qu'on aime souvent écrire sous la forme

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

avec $\xi(s) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$. En théorie analytique des nombres, il existe de nombreuses généralisations de cette fonction zêta, regroupées sous le nom de *fonctions* L, et elles vérifient toutes le même genre d'équation fonctionnelle, donnant des propriétés de méromorphie semblables. Cette équation fonctionnelle pour les fonctions L avait été prouvée par Hecke dans les années 1920 de manière assez technique en utilisant des fonctions thêta. Tate en donne dans sa thèse une nouvelle preuve beaucoup plus conceptuelle, faisant, par un habile transport du problème vers les adèles, apparaître la parenté entre l'équation fonctionnelle cherchée et la formule de Poisson. Plus précisément, il montre que par exemple la fonction ζ ci-dessus (nous allons nous borner à celle-ci par souci de simplicité) provient d'une intégrale de la forme

$$\zeta(f,\chi) = \int_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*} f(x)\chi(x)\mathrm{d}x$$

sur les idèles $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*$ de $\mathbf{Q}$ pour une fonction $f : \mathbf{A}_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{C}$ et $\chi : \mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^* \longrightarrow \mathbf{C}^*$ un quasi-caractère (morphisme de groupes continu) convenables. En utilisant la formule de Poisson entre f et sa transformée de Fourier $\mathscr{F}f$, il prolonge $\zeta(f,\chi)$ à tous les quasi-caractères, détecte les pôles et prouve l'équation

$$\zeta(f,\chi) = \zeta(\mathscr{F}f,\tilde{\chi}), \tag{1}$$

où $\tilde{\chi}$ est un autre quasi-caractère construit à partir de χ. En quittant le cadre adélique et en transposant le tout de nouveau à la fonction zêta du début, il en tire son équation fonctionnelle. Mieux : la fonction f sur les adèles $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$, qui sont inclus dans le produit $\mathbf{R}\times\prod_{p \text{ premier}}\mathbf{Q}_p$ de tous les complétés de $\mathbf{Q}$, se décompose en un produit $\prod_v f_v = f_\infty \prod_{p \text{ premier}} f_p$ de fonctions « locales » f_v sur chaque complété de $\mathbf{Q}$. Chacune admet sa propre transformée de Fourier $\mathscr{F}f_v$, et $\mathscr{F}f = \prod_v \mathscr{F}f_v$. Cela explique plusieurs propriétés de la fonction zêta : tout d'abord, sa décomposition en produit eulérien

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1-p^{-s}\right)^{-1}$$

provient tout droit de cette décomposition de f, et par là de $\zeta(f,s)$, en produit de facteurs « locaux ». De plus, cette décomposition en produit permet de voir (1) comme une égalité entre deux produits, et les facteurs mystérieux de part et d'autre de l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$ évoqués plus haut proviennent simplement des facteurs de part et d'autre de (1) correspondant à f_∞ et $\mathscr{F}f_\infty$.

En résumé, les adèles construisent un ingénieux pont reliant les approches additives (liées à son expression en tant que somme) et multiplicatives (liées à son expression en tant que produit) de la fonction zêta, et des fonctions L en général, rendant les techniques de théorie de Fourier particulièrement adaptées pour étudier ces dernières. Gardant cette motivation en tête nous allons poursuivre par une présentation plus détaillée des adèles d'une part, de la formule de Poisson d'autre part, pour enfin expliquer comment ces mêmes idées interviennent en géométrie diophantienne.

1.1 Corps globaux, adèles et idèles

Valeurs absolues, valuations, complétés Une *valeur absolue* sur un corps F est une application $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbf{R}^+$ multiplicative, nulle seulement en zéro et vérifiant l'inégalité triangulaire. Si elle vérifie en outre l'inégalité plus forte $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$, appelée l'inégalité ultramétrique, on dit qu'elle est non-archimédienne et dans le cas contraire, on dit qu'elle est archimédienne. On dit que deux valeurs absolues $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sur un corps sont *équivalentes* s'il existe $\alpha > 0$ tel que $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^\alpha$. Une valeur absolue définit une topologie sur F, et deux valeurs absolues équivalentes définissent la même topologie. Une classe d'équivalence de valeurs absolues sur F s'appelle une *place*.

Exemples :

1. Prenons $F = \mathbf{Q}$. Pour tout nombre premier p, on définit la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ par

$$\left|p^n\frac{a}{b}\right| = p^{-n}$$

si a et b sont premiers avec p. Un théorème d'Ostrowski dit que toute valeur absolue non-triviale sur $\mathbf{Q}$ est équivalente soit à la valeur absolue usuelle (qui est archimédienne), soit à l'une des valeurs absolues p-adiques (qui sont non-archimédiennes). La topologie définie par la valeur absolue usuelle est bien connue, et $\mathbf{Q}$ se complète en $\mathbf{R}$ par rapport à cette valeur absolue. Pour chaque nombre premier p, la valeur absolue p-adique définit une topologie sur $\mathbf{Q}$ bien différente de cette topologie usuelle : en particulier les puissances de p successives $1, p, p^2, p^3, \ldots$ forment une suite tendant vers zéro. Cela dit, pour cette topologie p-adique $\mathbf{Q}$ n'est pas non plus complet : son complété est appelé $\mathbf{Q}_p$, le corps des nombres p-adiques, et ses éléments sont de la forme

$$\sum_{i \geq -n} a_i p^i,$$

avec $n \in \mathbf{N}$, $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, la norme p-adique faisant converger ce genre de séries. L'adhérence de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}_p$, qui correspond aux éléments pour lesquels $n = 0$, autrement dit, à la boule unité de $\mathbf{Q}_p$ pour la norme p-adique, est appelé l'anneau des entiers p-adiques, et est noté $\mathbf{Z}_p$.

2. Un exemple qui sera essentiel pour nous est celui de $F = k(t)$ pour k un corps. Dans ce cas, par analogie avec le cas $F = \mathbf{Q}$, on voit facilement que pour tout polynôme P irréductible et non constant dans $k[t]$, on peut définir la norme P-adique par

$$\left| P^n \frac{Q}{R} \right|_P = \alpha^n$$

pour $\alpha \in]0, 1[$ un réel arbitraire et Q et R des polynômes premiers avec P. Ainsi, les places de $k(t)$ en correspondance exacte avec les polynômes irréductibles non constants de $k[t]$, à l'exception de la place "infinie" dont un représentant est

$$\left| \frac{Q}{R} \right|_\infty = \alpha^{-\deg Q + \deg R},$$

cette dernière étant une sorte de norme t^{-1}-adique. En particulier, toutes les places sont non-archimédiennes. Le complété de $k(t)$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_P$ est le corps $k((P))$ des séries de Laurent $\sum_{i \geq -n} a_i P^i$ ($a_i \in k$) en P, et son complété par rapport à $|\cdot|_\infty$ est $k((t^{-1}))$. Ainsi, quand nous travaillerons avec des corps de fonctions supposés pour simplifier de la forme $k(t)$, leurs complétés seront tous de la forme $k((t_v))$ pour des variables t_v, v parcourant l'ensemble des places de F.

Corps globaux et anneau des adèles Nous traiterons plus loin de problèmes de géométrie diophantienne, c'est-à-dire de recherche de solutions d'équations polynomiales dans certains corps appelés corps globaux. Pour nous, un corps global, ce sera :

– s'il est de caractéristique nulle, une extension finie de $\mathbf{Q}$, typiquement $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)$. On appelle cela un corps de nombres.
– s'il est de caractéristique $p > 0$, une extension finie d'un corps de fractions rationnelles $\mathbf{F}_q(t)$ pour q une puissance de p. On appelle cela un corps de fonctions (car c'est toujours le corps des fonctions d'une certaine courbe sur $\mathbf{F}_q$).

Au vu de la similitude entre les deux exemples traités ci-dessus, on ne sera pas surpris qu'ils soient tous les deux classés sous cette étiquette. Pour simplifier, prenons simplement $F = \mathbf{Q}$ et supposons que nous avons un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbf{Q}$, dont nous voulons trouver les solutions dans $\mathbf{Q}$. Il est bien connu qu'il est plus simple, du moins algorithmiquement, par des méthodes d'approximation par exemple, de trouver des solutions réelles. Cela est dû au fait que le corps des réels $\mathbf{R}$ est complet alors que $\mathbf{Q}$ ne l'est pas. De même, il est plus facile de trouver des solutions p-adiques, grâce à des techniques semblables utilisant le lemme de Hensel. La construction des adèles prend ses origines dans l'idée de vouloir regrouper dans un objet algébrique unique tous les renseignements sur les solutions éventuelles d'équations dans tous les complétés . On définit l'anneau des adèles $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$ comme le sous-anneau du produit $\mathbf{R} \times \prod_{p \text{ premier}} \mathbf{Q}_p$ donné par

$$\mathbf{A}_\mathbf{Q} = \{(x_\infty, (x_p)_p) |\ x_p \in \mathbf{Z}_p \text{ pour presque tout nombre premier } p\},$$

« presque tout p » signifiant « tous les p sauf un nombre fini ». Cette condition de finitude qu'on impose est garante des bonnes propriétés topologiques de l'anneau $\mathbf{A}_\mathbf{Q}$, et du fait que ce sera l'objet rêvé pour faire fonctionner des produits infinis comme la décomposition $f = \prod_v f_v$ que nous avons évoquée dans le paragraphe motivationnel. Si maintenant $F = k(t)$ pour corps fini k, et qu'on note Σ l'ensemble des ses places, ses complétés s'écrivent d'après l'exemple 2 ci-dessus sous la forme $k((t_v))$, $v \in \Sigma$, et son anneau des adèles se définit par

$$\mathbf{A}_F = \left\{ (x_v)_v \in \prod_{v \in \Sigma} k((t_v)),\ x_v \in k[[t_v]] \text{ pour presque tout } v \right\}.$$

Plus généralement, pour tout corps global F, on peut définir un anneau des adèles $\mathbf{A}_F$, sous-anneau du produit des complétés F_v de F pour toutes les places v de F. C'est un anneau topologique pour la topologie induite par la topologie produit sur $\prod_v F_v$, et en tant que tel, il a deux propriétés essentielles :

1. Il est localement compact, contrairement à l'immense produit $\prod_v F_v$.
2. Le corps F est un sous-anneau discret de $\mathbf{A}_F$ via le morphisme diagonal qui à $x \in F$ associe l'adèle dont toutes les composantes valent x.

Pour comprendre pourquoi ce morphisme diagonal est bien défini, prenons $F = \mathbf{Q}$: l'élément $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ est de norme p-adique inférieure ou égale à 1 pour tous les nombres premiers p ne divisant pas le dénominateur b, donc appartient à $\mathbf{Z}_p$ pour tous les p sauf un nombre fini, ce qui assure que $\frac{a}{b}$ est bien envoyé sur un adèle.

On définit également le groupe des *idèles* $\mathbf{A}_F^*$ comme le groupe multiplicatif formé des adèles inversibles, sous-groupe du produit $\prod_v F_v^*$ des groupes des éléments inversibles de tous les complétés de F. Ce groupe est également localement compact et F^* en est un sous-groupe discret par le même plongement diagonal.

Terminons en remarquant que les propriétés topologiques des adèles et idèles que nous avons citées sont conditionnées par le fait de prendre un corps global : les adèles sur un corps qui n'est pas global se construisent de la même façon, mais sont bien moins sympathiques, et c'est de là que viendront nos difficultés dans la partie motivique de ce mémoire.

1.2 Qu'est-ce qu'une formule de Poisson ?

Soit G un groupe abélien topologique localement compact. Il est bien connu que G est muni d'une mesure de Haar $\mathrm{d}g$, c'est-à-dire d'une mesure de Radon invariante par translation, qui de plus est unique à constante multiplicative strictement positive près. Le dual topologique de G est le groupe $\widehat{G}$ des caractères de G, c'est-à-dire des morphismes continus de G dans le groupe $\mathcal{S}^1$ des complexes de module 1. Si on le munit de la topologie compacte-ouverte, c'est également un groupe abélien topologique localement compact. Pour toute fonction $f \in L^1(G)$ on peut définir la transformée de Fourier de f par rapport à la mesure $\mathrm{d}g$ comme la fonction sur $\hat{G}$ donnée par

$$\mathscr{F}f(\chi) = \int_G f(g)\bar{\chi}(g)\mathrm{d}g$$

pour tout $\chi \in \hat{G}$, $\bar{\chi}$ désignant simplement le conjugué (complexe) de χ.

Maintenant, prenons H un sous-groupe discret de G et munissons G/H de la topologie quotient, pour laquelle il est localement compact. Le groupe H est également muni d'une mesure de Haar, que nous noterons $\mathrm{d}h$. Alors G/H admet une unique mesure de Haar $\mathrm{d}x$ telle que $\mathrm{d}g = \mathrm{d}h\mathrm{d}x$. Le dual $\widehat{G/H}$ de G/H s'identifie naturellement au sous-groupe $H^\perp \subset \widehat{G}$ des caractères de G triviaux (c'est-à-dire égaux à 1) sur H et est naturellement muni d'une mesure de Haar $\mathrm{d}\chi$ duale à la mesure $\mathrm{d}x$. Soit maintenant $f \in L^1(G)$ telle qu'on a également $f \in L^1(H)$ et $\mathscr{F}f \in L^1(H^\perp)$. On a alors la formule de Poisson

$$\int_H f(h)\mathrm{d}h = \int_{H^\perp} \mathscr{F}f(\chi)\mathrm{d}\chi. \tag{2}$$

Dans la plupart des cas où nous allons l'appliquer, on aura G/H compact, ce qui implique $H^\perp$ discret, et on pourra montrer que la mesure sur $H^\perp$ pour laquelle la formule de Poisson est vérifiée est la mesure discrète multipliée par le facteur $\mathrm{vol}(G/H)^{-1}$, où $\mathrm{vol}(G/H)$ désigne le volume donné à G/H par la mesure $\mathrm{d}x$.

Exemples :

1. Commençons par l'exemple bien connu $G = \mathbf{R}$, et $H = \mathbf{Z}$. Les choses sont simplifiées par le fait que $\mathbf{R}$ muni de la mesure de Lebesgue est son propre *dual* : en effet, il est bien connu que les caractères de $\mathbf{R}$ sont exactement ceux de la forme $y \mapsto e^{2i\pi xy}$, autrement dit, nous avons un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{R}} \\ y & \mapsto & (x \mapsto e^{2i\pi xy}) \end{array}$$

par lequel $\mathbf{Z}^{\perp}$ correspond aux y tels que $xy \in \mathbf{Z}$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$, c'est-à-dire aux $y \in \mathbf{Z}$, et est muni de le mesure discrète puisque $\mathrm{vol}(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) = 1$ pour la mesure induite par la mesure de Lebesgue. La transformée de Fourier de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est donc également une fonction définie sur $\mathbf{R}$, et si toutes les conditions d'intégrabilité ci-dessus sont vérifiées, nous avons,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{F} f\,(n)\,.$$

2. Plus généralement, tout groupe additif d'un corps topologique F est isomorphe à son propre dual, et un isomorphisme est obtenu, après choix d'un caractère additif $\psi : F \longrightarrow \mathcal{S}^1$ non-trivial, par

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \widehat{F} \\ y & \mapsto & (x \mapsto \psi(xy)) \end{array} \tag{3}$$

L'exemple ci-dessus correspond au cas $F = \mathbf{R}$ et $\psi(x) = e^{2i\pi x}$. Si F est un corps global, le fait que l'anneau des adèles $\mathbf{A}_F$ soit lié au produit des complétés F_v donne également, en faisant le produit d'isomorphismes de cette sorte pour chaque F_v, un isomorphisme entre $\mathbf{A}_F$ et son dual. De plus, F est un sous-groupe discret de $\mathbf{A}_F$, muni de la mesure discrète, et on peut vérifier que $F^{\perp} = F$, muni de la mesure discrète multipliée par $\mathrm{vol}(\mathbf{A}_F/F)^{-1}$. La formule de Poisson pour une fonction $f : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant les bonnes conditions d'intégrabilité s'écrit alors

$$\sum_{x \in F} f(x) = \mathrm{vol}(\mathbf{A}_F/F)^{-1} \sum_{x \in F} \mathscr{F} f(x).$$

3. Un exemple où le quotient des deux groupes n'est pas compact est donné par $G = \mathbf{A}_F^*$, le groupe des idèles de F, et $H = F^*$. Les choses sont plus délicates ici. Premièrement, on ne sait pas décrire précisément le dual de $\mathbf{A}_F^*$, ni celui de $\mathbf{A}_F^*/F^*$, et deuxièmement, donner la mesure duale paraît compliqué : la formule de Poisson dans le cas général fait donc a priori intervenir trop d'objets inconnus pour être utile. Cependant, il peut être intéressant de l'appliquer à des fonctions bien choisies, par exemple triviales sur un sous-groupe H' de G tel que G/H' soit plus facilement exprimable : le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{A}_F^*$ est un tel sous-groupe.

Fonctions de Schwartz-Bruhat Souvent, en analyse fonctionnelle, plutôt que de travailler avec la classe peu pratique des fonctions satisfaisant les bonnes hypothèses d'intégrabilité pour qu'on puisse faire de l'analyse de Fourier et en particulier appliquer la formule de Poisson, on se contente de l'espace des fonctions de Schwartz, c'est-à-dire des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}$ à décroissance rapide. Nous allons faire de même dans le cadre adélique : chaque fonction $f : \mathbf{A}_F \longrightarrow \mathbf{C}$ s'écrit comme un produit $f = \prod_v f_v$ où chaque f_v est une fonction sur le complété F_v de v. On dit que f_v est une fonction de Schwartz-Bruhat locale si
- f_v est une fonction de Schwartz pour F_v archimédien (c'est-à-dire $F_v = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) ;
- f_v est localement constante et à support compact pour F_v non-archimédien.

Si toutes les fonctions f_v sont des fonctions de Schwartz-Bruhat locales, alors f est appelée fonction de Schwartz-Bruhat globale, et pour une telle fonction, la formule de Poisson sur $\mathbf{A}_F$ est toujours vérifiée.

1.3 Géométrie diophantienne et formules de Poisson

Soit F un corps, qui pour le moment sera un corps de nombres, par exemple $\mathbf{Q}$. La plupart des problèmes de géométrie diophantienne, concernent l'étude de l'ensemble $V(F)$ des points rationnels d'une variété V définie sur F. Si ces derniers sont en nombre fini, il s'agit de les compter, et de les déterminer le plus précisément possible. Mais comment les décrire quantitativement lorsqu'ils sont en nombre infini ? Un outil essentiel introduit à cet effet sont les *hauteurs.* Une hauteur sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$ est une application $H : \mathbf{P}^n(F) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ qui est construite de sorte à ce que pour tout réel B l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{P}^n(F),\ H(x) \leq B\}$$

des points de $\mathbf{P}^n_F$ de hauteur plus petite que B soit fini. Nous ne parlerons pas de la construction générale d'une telle application. Évoquons simplement, en guise d'exemple, le cas $F = \mathbf{Q}$, où H est définie par

$$H((x_0 : \ldots : x_n)) = \max\nolimits_{0 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

où les x_i sont pris entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

Une fois H choisie, cela a donc un sens de définir, pour tout ouvert U de V, les grandeurs

$$N_{U,H}(B) = \#\{x \in U(F),\ H(x) \leq B\},$$

et d'étudier leur comportement asymptotique lorsque B tend vers l'infini. Il se trouve que dans tous les cas où ce dernier a pu être déterminé, ce comportement est de la forme

$$N_{U,H}(B) \sim cB^a (\log B)^b,$$

avec $c > 0$ une constante réelle, $a \in \mathbf{R}_+$ et $b \in \frac{1}{2}\mathbf{N}$ un demi-entier positif ou nul. Cela a conduit Manin a émettre une série de conjectures proposant des interprétations des exposants a et b en fonction de la géométrie de la variété V. Ces dernières ont été vérifiées pour plusieurs classes de variétés, utilisant différentes méthodes. L'une de ces méthodes, l'exploitation de techniques d'analyse harmonique sous la forme de formules de Poisson, a été particulièrement fructueuse dans le cas de variétés contenant un ouvert dense U muni d'une structures de groupe : on peut à cet effet citer les travaux de Batyrev et Tschinkel ([2] et [3]), ainsi que ceux de Chambert-Loir et Tschinkel (par exemple [5]), concernant des variétés toriques ou des compactifications d'espaces affines. L'idée générale est la suivante : on commence par introduire la *fonction zêta des hauteurs*

$$\zeta_{U,H}(s) = \sum_{x \in U(F)} \frac{1}{H(x)^s},$$

définie en les complexes s où la série converge, qui est une sorte de *série génératrice* des $N_{U,H}(B)$. Ainsi, le comportement asymptotique de $N_{U,H}(B)$ quand B tend vers l'infini est relié directement par des théorèmes taubériens au domaine de convergence et aux propriétés de méromorphie de la fonction $\zeta_{U,H}$. Nous n'allons pas rentrer dans les détails ici, mais pour comprendre un peu ce lien, remarquons d'une part que pour tout $s \in \mathbf{C}$, nous avons

$$|\zeta_{U,H}(s)| \leq \sum_{x \in U(F)} \left| \frac{1}{H(x)^s} \right| = \sum_{x \in U(F)} \frac{1}{H(x)^{\mathrm{Re}(s)}},$$

et par conséquent, si $\zeta_{U,H}$ converge en un réel s_0, elle converge pour tous les complexes de partie réelle supérieure à s_0. D'autre part, si $\zeta_{U,H}$ converge en un réel positif s, pour tout réel $B > 0$ nous avons

$$\zeta_{U,H}(s) \geq \sum_{H(x) \leq B} \frac{1}{H(x)^s} \geq \frac{N_{U,H}(B)}{B^s},$$

ce qui nous donne $N_{U,H}(B) = \mathcal{O}(B^s)$ quand B tend vers l'infini et permet donc de voir que domaine de convergence de $\zeta_{U,H}$ ne peut contenir que des réels supérieurs (au sens large si $b = 0$) à l'exposant a ci-dessus.

Il est d'ailleurs important de noter que c'est cette reformulation en termes de fonctions zêta qui permet d'énoncer des conjectures analogues aux conjectures de Manin dans le cas où F n'est plus un corps de nombres, mais un corps global de caractéristique non-nulle, c'est-à-dire une extension finie d'un $\mathbf{F}_q(t)$ pour q une puissance d'un nombre premier. En effet, dans ce dernier cas, les valeurs prises par les fonctions hauteurs sont un peu dispersées, étant *grosso modo* incluses dans le groupe $q^{\mathbf{Z}}$, ce qui interdit de jolies prédictions sur l'asymptotique des points de hauteur bornée (en effet, dès que B dépasse une certaine puissance de q, la valeur de $N_{U,H}(B)$ fait un grand saut, puis reste constante jusqu'à la puissance de q suivante), alors que la définition de la fonction zêta des hauteurs garde tout son sens.

Dans les travaux cités plus haut utilisant la formule de Poisson, il s'agit alors de remarquer que la définition de $\zeta_{U,H}(s)$ comme somme de la fonction $x \mapsto H(x)^{-s}$ sur les éléments du sous-groupe discret $U(F)$ des points $U(\mathbf{A}_F)$ du groupe U à coefficients dans les adèles invite fortement à lui appliquer la formule de Poisson. Pour cela, on prolonge d'abord H en une fonction H_v sur chaque complété $U(F_v)$ de $U(F)$, et on remarque que pour tout $x \in U(F)$, $H(x) = \prod_v H_v(x)$. Cela nous donne une formule toute prête pour prolonger H aux adèles : pour tout point $x = (x_v)_v \in U(\mathbf{A}_F) \subset \prod_v U(F_v)$, on pose simplement

$$H(x) = \prod_v H_v(x_v).$$

A partir de là, de deux choses l'une. Chez Chambert-Loir et Tschinkel ([5]), U est le groupe additif $\mathbf{G}_a^n$, et donc $U(\mathbf{A}_F)$ est simplement $\mathbf{A}_F^n$, autodual de même que $\mathbf{A}_F$, et on peut appliquer la formule de Poisson additive telle qu'elle est énoncée dans l'exemple 2 du paragraphe précédent. Chez Batyrev et Tschinkel

([2], [3]), U est un tore algébrique, et il est donc muni d'une structure multiplicative, ce qui nous place plutôt dans le cadre de l'exemple 3 du paragraphe précédent, les choses étant simplifiées par le fait que H est invariante par le sous-groupe compact maximal de U. Ainsi, dans les deux cas, l'application de la formule de Poisson permet de réécrire la fonction zêta sous une forme qui, avec un peu de travail, fait apparaître ses propriétés de méromorphie, et mène par là à une démonstration des résultats annoncés par Manin.

2 Théorie de Fourier motivique

2.1 Introduction au monde motivique

La géométrie diophantienne étant à l'origine une ramification de la théorie des nombres, les travaux autour des conjectures de Manin se cantonnent la plupart du temps au cas où le corps F est un corps de nombres. Cependant, l'analogie profonde qui existe entre les corps globaux de caractéristique nulle et ceux de caractéristique strictement positive a conduit par exemple D. Bourqui à examiner pour plusieurs types de variétés le cas où F est un corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini k, l'interprétation géométrique du problème dans ce cas étant le comptage de courbes de degré donné sur des variétés. En effet, un point à coordonnées dans $\mathbf{F}_q(t)$ correspond à une courbe, paramétrée par la variable t, et les fonctions hauteurs choisies utilisent le degré de la courbe comme mesure de sa « taille ». De plus, comme nous l'avons dit plus haut, dans ce cas les conjectures de Manin sont énoncées directement en termes de fonctions zêta des hauteurs. Qu'est-ce qui nous empêcherait de franchir une autre barrière, et d'examiner le cas où F est le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps k quelconque, non nécessairement fini (c'est ce qu'on appellera le cadre *motivique*, par rapport au cadre *classique*), avec des fonctions zêta des hauteurs « motiviques » ? A priori, les obstacles sont multiples, voire insurmontables : nous perdons la locale compacité des adèles, ce qui compromet l'existence de mesures bienveillantes, et par là toute la théorie de Fourier. L'idée fondamentale pour construire tout de même quelque chose qui a du sens est née dans les années 90 quand Kontsevich a exposé les grandes lignes de ce que l'on appelle maintenant l'intégration motivique, développée considérablement depuis par J. Denef et F. Loeser. Le premier pas à franchir consiste à abandonner les mesures réelles, et à définir une mesure « motivique », qui prend ses valeurs dans un anneau KVar_k appelé anneau de Grothendieck des variétés. Ce dernier est simplement le groupe abélien libre engendré par toutes les k-variétés, quotienté par certaines relations et muni d'une structure d'anneau appropriée. Plus précisément, on souhaiterait que la mesure $[X]$ d'une k-variété X soit simplement sa classe dans cet anneau, ce qui nous amène, pour avoir une mesure additive et compatible au produit, à définir KVar_k comme le groupe abélien libre sur les k-variétés quotienté par les relations $[X]-[U]-[X-U]$ dès que X est une k-variété et U est un ouvert de X, avec pour produit $[X][Y]=[X\times_k Y]$. Cet anneau sera cependant insuffisant pour construire une théorie de Fourier. En effet, notre but est de donner un sens à des intégrales de la forme

$$\int \varphi(x)\psi(f(x))\mathrm{d}x,$$

pour φ une fonction de Schwartz-Bruhat (terme également à définir !), ψ un caractère additif sur k et $f: F\longrightarrow k$. Il faut donc arriver à transcrire motiviquement cette pondération par ψ. Dans [6], Hrushovski et Kazhdan construisent un anneau de Grothendieck un peu plus sophistiqué en s'inspirant de la notion de somme d'exponentielles importante en théorie analytique des nombres. Il s'agit de sommes de la forme $\sum_{x\in X(k)}\psi(f(x))$ où k est un corps fini, X une variété sur k, f une fonction algébrique sur X et ψ un caractère additif sur k (nécessairement de la forme $x\mapsto e^{\frac{2in\pi}{q}}$ pour n entier et q le cardinal de k, d'où le terme de « somme d'exponentielles »). On cherchera donc dans le paragraphe suivant, par des artifices semblables à ceux utilisés pour KVar_k, à définir un anneau au-dessus d'un corps k quelconque constitué d'objets qui jouit de propriétés similaires à celles des sommes d'exponentielles sur un corps fini. Cela nous fournira une notion de sommation motivique avec pondération par un caractère, et mènera vers la définition d'une intégrale motivique, une fois que nous aurons expliqué ce qu'au juste nous voulons intégrer. Il faut à ce propos remarquer que la théorie d'intégration construite sera incomplète en ce sens que nous n'intégrerons que des analogues des fonctions de Schwartz-Bruhat (ce qui est suffisant pour l'analyse de Fourier).

Pour la construction de la théorie de Fourier motivique, nous suivrons l'article [4], qui contient une présentation de la formule de Poisson plus dépouillée que [6].

2.2 Anneau de Grothendieck des variétés avec exponentielles

Fixons un caractère additif ψ non-trivial sur k et considérons la « somme d'exponentielles »

$$\sum_{x\in X}\psi(f(x)),$$

qui doit être déterminée par le choix de la variété X et du morphisme $f : X \longrightarrow k$. L'anneau des sommes d'exponentielles que nous voulons définir sera donc le groupe abélien libre sur les couples (X, f) pour X une k-variété et $f : X \longrightarrow k$ un k-morphisme, quotienté par certaines relations. Tout d'abord, si U est un ouvert de X et Z la k-variété $X - U$, il est naturel de vouloir pouvoir couper la somme en deux :

$$\sum_{x\in X}\psi(f(x)) = \sum_{x\in U}\psi(f(x)) + \sum_{x\in Z}\psi(f(x)).$$

Nous allons donc quotienter par les relations

$$(X, f) - (U, f_{|U}) - (Z, f_{|Z}) \tag{4}$$

pour tous X, U et f. Par exemple $[\mathbf{P}^1, 0] = [\mathbf{A}^1, 0] + [\{\text{point}\}, 0]$, autrement dit, la droite projective, c'est la droite affine plus un point. Cette propriété vaut parfois à cette construction le nom de « légo de Grothendieck des variétés ». Cela participe d'un principe général que nous aimerions faire marcher dans ce cadre, que nous pourrions baptiser *principe de découpage* : en bref, dès qu'une variété se découpe en des variétés plus petites, on aimerait qu'en un certain sens la somme des classes de ces variétés plus petites soit égale à la classe de la grande.

D'autre part, on souhaiterait pouvoir faire des changements de variable : plus précisément, si $u : Y \longrightarrow X$ est un isomorphisme de k-variétés, on souhaiterait écrire

$$\sum_{x\in X}\psi(f(x)) = \sum_{y\in Y}\psi(f\circ u(x)),$$

ce qui nous amène à quotienter par

$$(X, f) - (Y, f\circ u) \tag{5}$$

pour toutes les k-variétés X et Y isomorphes et tous les isomorphismes $u : Y \longrightarrow X$. Il y a aussi un dernier axiome, essentiel pour faire marcher la théorie de Fourier. Il est en effet bien connu que si k est un corps fini, $\sum_{x\in k}\psi(x) = 0$ si ψ est non-trivial : c'est simplement l'orthogonalité du caractère ψ avec le caractère trivial sur k. Pour forcer cela dans notre construction des sommes d'exponentielles sur k quelconque, nous allons simplement quotienter par

$$(\mathbf{A}^1_k, \mathrm{id}). \tag{6}$$

On peut également munir l'espace obtenu d'une structure d'anneau, inspirée de la multiplication des sommes d'exponentielles : pour avoir

$$\left(\sum_{x\in X}\psi(f(x))\right)\left(\sum_{y\in Y}\psi(g(y))\right) = \sum_{(x,y)\in X\times_k Y}\psi(f(x)+g(y)),$$

on définit, en notant $[X, f]$ la classe de (X, f),

$$[X, f][Y, g] = [X \times_k Y, f\circ \mathrm{pr}_1 + g\circ \mathrm{pr}_2]$$

pour $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X$ la première projection, et $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ la deuxième projection. Le groupe abélien libre sur les couples (X, f) quotienté par les relations (4), (5) et (6) muni de ce produit est appelé *anneau de Grothendieck des variétés avec exponentielles* sur k et est noté $\mathrm{KExpVar}_k$. Chaque k-variété X a une classe privilégiée $[X, 0]$ dans cet anneau, qui en termes de sommes d'exponentielles, s'écrit simplement $[X, 0] = \sum_{x\in X} 1$. L'élément neutre pour la multiplication étant simplement la classe du point, l'identité que nous venons d'écrire donne un certain sens à la phrase « X est somme de ses points » ! Cela n'est rien d'autre qu'une manifestation du *principe de découpage* cité plus haut. De plus, nous allons distinguer un élément important dans cet anneau, la classe $\mathbf{L} = [\mathbf{A}^1_k, 0]$ de la droite affine sur k. Pour ce qui va suivre, nous allons souvent avoir besoin d'inverser cet élément $\mathbf{L}$. On définit donc l'anneau $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k = \mathrm{KExpVar}_k[\mathbf{L}^{-1}]$, localisé de $\mathrm{KExpVar}_k$ en $\mathbf{L}$. C'est dans cet anneau que prendront leurs valeurs les fonctions motiviques que nous allons intégrer.

Anneaux de Grothendieck relatifs et fonctions motiviques Pour définir ce que sera une fonction motivique, on se place, comme souvent en géométrie algébrique, dans un cadre « relatif ». Essayons d'expliquer un peu. Soit X une k-variété. Définir une fonction $X \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ revient à définir une famille de sommes d'exponentielles paramétrée par X, qui provient (après passage au quotient par les relations définissant les sommes exponentielles, et division éventuelle par une puissance de $\mathbf{L}$) d'une famille de variétés munies de morphismes vers $\mathbf{A}^1_k$ paramétrée par X. De plus, puisque nous sommes en train de définir des fonctions destinées à être d'une certaine manière intégrées, le paramétrage ne devrait pas être trop barbare, donc par exemple de nature algébrique. On dira qu'une k-variété Y est une X-variété si on peut la munir d'un morphisme u vers X. Ceci est exactement la formalisation de la notion de famille de variétés paramétrée par X que nous souhaitons. En effet, pour chaque $a \in X$, nous pouvons considérer la fibre $Y_a = u^{-1}(a)$ au-dessus de a, que nous pouvons voir comme une k-variété (donnée par les équations de Y, auxquelles on ajoute l'équation $f(y) = a$). Ainsi, donner $u : Y \longrightarrow X$ revient à donner une famille $(Y_a)_{a\in X}$ variant de manière algébrique. En remplaçant les k-variétés par des X-variétés, on peut construire un anneau $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_X$ avec le même procédé que pour $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Si on prend $Y \longrightarrow X$ une X-variété munie d'un morphisme $h : Y \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$, cela définit une classe $[Y, h] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_X$. D'autre part, pour tout a, la fibre Y_a définit une classe $[Y_a, h_{|Y_a}] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Une fonction motivique sera donc un objet de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k \\ a & \mapsto & \mathbf{L}^{-n}[Y_a, h_{|Y_a}] \end{array}$$

pour une X-variété Y munie de $h : Y \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ et n un entier naturel, et elle est simplement codée par l'élément $\mathbf{L}^{-n}[Y, h] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_X$. Nous avons donc construit un anneau de Grothendieck *relatif*, dont les éléments doivent être pensés comme des fonctions motiviques.

Maintenant que nous avons des fonctions motiviques, il serait fort souhaitable de pouvoir les sommer. Nous avons déjà donné un sens à des sommes d'exponentielles simples $\sum_{a\in X} \psi(f(a))$, qui sont formellement des sommes sur les points d'une variété X d'un caractère lu à travers une application $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$. C'est le cas particulier du cadre que nous sommes en train d'examiner où la famille des variétés paramétrée par X est simplement la famille des points de X, et où donc la fonction correspondante est simplement celle qui à un point a de X associe la classe du point muni de la fonction égale à la valeur de f en ce point. La prochaine étape serait donc de donner un sens à $\sum_{a\in X} \varphi(a)\psi(f(a))$ où φ est une fonction motivique sur X, c'est-à-dire trouver un élément de $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ (puisque c'est là-dedans que nous voulons faire vivre nos sommes et nos intégrales) qui peut être pensé comme un analogue de cette somme. Il existe un morphisme naturel $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_X \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ qui consiste à oublier la structure de X-variété. La classe $\varphi = [Y, h] \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_X$ est ainsi envoyée sur un élément de $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. D'autre part, dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ vivent les éléments $[Y_a, h_{|a}] = \varphi(a)$, donc par le principe de découpage la classe de φ dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ doit être pensée comme la somme $\sum_{a\in X} \varphi(a)$. Si nous voulons de plus pondérer cette somme par un caractère appliqué à travers une application $f : X \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$, il suffit de définir

$$\sum_{a\in X} \varphi(a)\psi(f(a)) := [Y, h][X, f],$$

le produit étant pris dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_X$ puis vu dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$. Autrement dit, on prend la classe dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ du produit point par point de la famille de fibres de Y paramétrée par X munie de h et de la famille de points de X paramétrée par X munie de f.

2.3 Fonctions de Schwartz-Bruhat motiviques et leurs intégrales

Soit k un corps quelconque. Commençons par définir une notion de fonction de Schwartz-Bruhat sur le corps $k((t))$ des séries de Laurent à coefficients dans k. Dans la théorie classique, quand k est fini, c'est une fonction $\varphi : k((t)) \longrightarrow \mathbf{C}$ localement constante à support compact. Il existe donc un entier M tel que φ soit nulle en dehors de $t^M k[[t]]$. De plus, par compacité de $t^M k[[t]]$, il existe un N tel que f soit constante sur $a + t^N k[[t]]$ pour tout $a \in t^M k[[t]]$. Ainsi, φ définit une fonction sur les classes $t^M k[[t]]/t^N k[[t]]$, et réciproquement toute fonction sur ces classes définit une fonction de Schwartz-Bruhat nulle en dehors de $t^M k[[t]]$ et constante sur les $a + t^N k[[t]]$. Dans le cadre motivique où k est quelconque, nous allons utiliser cette correspondance pour contourner l'absence de compacité, en définissant une fonction de Schwartz-Bruhat sur $k((t))$ directement comme une fonction sur $t^M k[[t]]/t^N k[[t]]$ à valeurs dans l'anneau $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ défini précédemment. Pour cela, il suffit de munir $t^M k[[t]]/t^N k[[t]]$ d'une structure de variété, ce qui est très simple puisque cet espace est naturellement identifié à l'espace affine $\mathbf{A}^{N-M}(k) = k^{N-M}$ que nous noterons $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$ via

$$\begin{array}{ccc} t^M k[[t]]/t^N k[[t]] & \longrightarrow & \mathbf{A}_k^{(M,N)} \\ \displaystyle\sum_{i=M}^{N-1} x_i t^i \pmod{t^N} & \mapsto & (x_M, \dots, x_{N-1}). \end{array} \tag{7}$$

Ainsi, une *fonction de Schwartz-Bruhat motivique de niveau* (M, N) sera simplement un élément de l'anneau $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}}$, et l'espace de toutes les fonctions de Schwartz-Bruhat motiviques est l'union (ou plutôt la limite inductive) des $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M,N)}}$ pour tous les entiers M et N. Ce sont ces fonctions-là que nous allons intégrer, et pour définir leur intégrale nous allons encore une fois nous inspirer du cas où k est fini de cardinal q. Alors $t^M k[[t]]/t^N k[[t]]$ est un ensemble fini, et l'intégrale de la fonction $\varphi : k[[t]] \longrightarrow \mathbf{C}$ nulle en dehors de $t^M k[[t]]$ et constante sur les ouverts de la forme $x + t^N k[[t]]$, sera simplement

$$\int_{k((t))} \varphi = \sum_{x \in t^M k[[t]]/t^N k[[t]]} \varphi(x)\mu(x + t^N k[[t]])$$

où μ est la mesure de Haar sur $k[[t]]$. Cette dernière est invariante par translation, donc $\mu(x + t^N k[[t]]) = \mu(t^N k[[t]])$ pour tout $x \in t^M k[[t]]$, et on peut voir facilement que ce volume vaut en fait q^{-N} si on impose $\mu(k[[t]]) = 1$. Ainsi, finalement

$$\int \varphi = q^{-N} \sum_{x \in t^M k[[t]]/t^N k[[t]]} \varphi(x). \tag{8}$$

En conclusion, dans le cas classique, l'intégrale d'une fonction de Schwartz-Bruhat est une somme des valeurs de cette fonction, correctement renormalisée (on peut vérifier que le côté droit de l'égalité ci-dessus ne dépend ni de M, ni de N). Cela explique pourquoi la notion de somme d'exponentielles nous suffira pour définir l'intégrale d'une fonction de Schwartz-Bruhat motivique. Par analogie avec (8), en contournant de nouveau les difficultés liées à l'absence de compacité et en particulier la non-finitude de $t^M k[[t]]/t^N[[t]]$, on définit, pour une fonction de Schwartz-Bruhat motivique φ

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = \mathbf{L}^{-N} \sum_{x \in \mathbf{A}_k^{(M,N)}} \varphi(x) \in \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k.$$

On a simplement remplacé le cardinal q du corps k , qui correspond aussi au nombre de points sur la droite affine $\mathbf{A}_k^1$, par la classe $\mathbf{L}$ de cette même droite affine dans $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, et le rôle de la somme finie sur les classes modulo $t^N k[[t]]$ est maintenant joué par la somme d'exponentielles sur la variété $\mathbf{A}_k^{(M,N)}$. On vérifie aisément que cette définition ne dépend ni de M, ni de N : si on choisit un M plus grand, cela correspond à étendre le domaine de sommation à des valeurs où φ est nulle, ce qui ne modifie pas la somme grâce à la relation (4), et si on remplace N par $N - 1$, cela revient à sommer φ sur « $\mathbf{L}$ fois plus de boules », mais « $\mathbf{L}$ fois plus petites ».

2.4 Transformation de Fourier motivique

La définition de la transformation de Fourier motivique sur $k((t))$ est grandement facilitée par le fait que, comme tout groupe additif d'un corps, le groupe $(k((t)), +)$ est son propre dual. Ainsi, nous n'avons aucun besoin d'introduire d'autres objets motiviques : la transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz-Bruhat sera également une fonction de Schwartz-Bruhat sur $k((t))$. Il suffit pour cela de fixer un isomorphisme entre $k((t))$ et son dual $k((t))$, qui sera de la forme

$$\begin{array}{ccc} k((t)) & \longrightarrow & \widehat{k((t))} \\ y & \mapsto & (x \mapsto \psi(r(xy))) \end{array}$$

où ψ est le caractère additif sur k fixé au début et $r : F \longrightarrow k$ est une application « résidu » dont nous ne détaillerons pas ici la construction, servant à ramener xy dans k. La transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz-Bruhat motivique φ est alors définie par

$$\mathscr{F}\varphi(y) = \int \varphi(x)\psi(r(xy))\mathrm{d}x.$$

2.5 Fonctions de Schwartz-Bruhat globales et formule de Poisson motivique

Fonctions de Schwartz-Bruhat globales Nous venons de définir une notion de fonction de Schwartz-Bruhat sur $k((t))$. Soit maintenant F le corps des fonctions d'une courbe, $F = k(t)$ pour simplifier. Alors ses complétés F_v sont de la forme $k((t_v))$, et la construction que nous avons faite peut s'effectuer, définissant une fonction de Schwartz-Bruhat sur F_v comme un élément d'un certain $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\mathbf{A}_k^{(M_v,N_v)}}$. On définit alors une fonction de Schwartz-Bruhat globale comme une fonction $\prod_{s\in S}\mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)} \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ pour un ensemble fini de places S et des entiers $M_s, N_s, s \in S$, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{E}xp\mathscr{M}_{\prod_{s\in S}\mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}}$. Ainsi, nos fonctions de Schwartz-Bruhat motiviques ne dépendront que d'un nombre fini de places, la raison en étant que le produit $\prod_{s\in S}\mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)}$ n'est pas une k-variété si S est infini, et la considération de fonctions sur ce dernier sort par conséquent du cadre de nos constructions. La transformée de Fourier d'une telle fonction se définit sans peine comme produit des transformées de ses composantes locales.

Sommation sur les points du corps F Il nous reste à régler une dernière chose, qui est d'expliquer comment sommer une fonction de Schwartz-Bruhat sur les points de F. A priori, F n'étant pas une k-variété, cela n'entre pas dans le cadre de nos constructions. Cependant, F est tout de même une union de k-variétés, et toute fonction de Schwartz-Bruhat est nulle en dehors de l'une d'elles. En effet, en renvoyant à l'annexe de géométrie algébrique pour les détails, nous pouvons écrire F comme l'union des k-espaces vectoriels $L(D)$ de dimension finie, pour D parcourant l'ensemble des diviseurs sur la courbe dont F est le corps des fonctions. Une fonction de Schwartz-Bruhat $\varphi : \prod_{s\in S}\mathbf{A}_k^{(M_s,N_s)} \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$ provient, pour tout s, d'une fonction du type $\prod_{s\in S} t^{M_s}k[[t_s]] \longrightarrow \mathscr{E}xp\mathscr{M}_k$, nulle en dehors de ce domaine de définition. Or l'intersection de F avec $\prod_{s\in S} t^{M_s}k[[t_s]]$ est précisément $L(D)$, avec D le diviseur $-\sum_{s\in S} M_s[s]$. Ainsi, φ est nulle en dehors de $L(D)$, et nous pouvons poser

$$\sum_{x\in F}\varphi(x) = \sum_{x\in L(D)}\varphi(x),$$

le côté droit étant bien défini parce que $L(D)$ est un k-espace vectoriel, et ne dépend pas du choix de D.

Formule de Poisson Nous pouvons enfin énoncer la formule de Poisson motivique, telle qu'elle apparaît dans [4].

Théorème 2.1 *(Formule de Poisson motivique) Soit F le corps de fonctions d'une courbe C projective lisse sur k et φ une fonction de Schwartz-Bruhat globale sur les adèles $\mathbf{A}_F$. Alors*

$$\sum_{x\in F}\varphi(x) = \mathbf{L}^{1-g}\sum_{y\in F}\mathscr{F}\varphi(y),$$

où g est le genre de la courbe C.

Parlons un peu de la preuve. Dans le cadre classique, Tate dans sa thèse [8] en donne une preuve reposant sur la locale compacité, et éclaire ensuite grandement la nature géométrique de ce résultat en en déduisant le théorème de Riemann-Roch sur les courbes au-dessus d'un corps fini. Dans ce cadre motivique, ce lien solide entre la formule de Poisson et le theorème de Riemann-Roch est conservé, mais l'absence de locale compacité fait que la preuve de la formule de Poisson part au contraire du théorème de Riemann-Roch en inversant en quelque sorte l'argument de Tate.

3 Conclusion et directions de recherche futures

Nous avons décrit la construction d'une transformation de Fourier « motivique » et la démonstration d'une formule de Poisson pour cette transformée de Fourier, qui a déjà connu une première application dans l'article [4] où elle a été utilisée pour démontrer la rationalité de certaines fonctions zêta des hauteurs motiviques, par analogie avec les techniques mises en jeu dans [5] dans le cadre classique. Cependant, cela ne fait qu'effleurer quelques aspects de ce qu'on espère pouvoir faire. En particulier, la formule de Poisson que nous avons présentée n'est valable que pour des fonctions dépendant d'un nombre fini de places de l'anneau des adèles $\mathbf{A}_F$, ce qui limite d'ailleurs le résultat de [4] aux points entiers plutôt que rationnels. Une autre piste de recherche serait d'essayer de donner un sens à une transformée de Fourier multiplicative (c'est-à-dire sur les idèles $\mathbf{A}_F^*$ plutôt que sur les adèles, utilisant des caractères multiplicatifs plutôt que additifs), qui pourrait mener vers un analogue motivique des travaux [2] et [3] de Batyrev et Tschinkel. Une difficulté de taille pour faire cela est bien entendu la compréhension du dual de $\mathbf{A}_F^*$ qui, comme nous l'avons vu, posait déjà un problème dans le cadre classique. Dans tous les cas, là où dans le cadre classique une formule de Poisson générale unifie toutes les formules de Poisson, qu'elles soient additives et multiplicatives, les formules de Poisson motiviques doivent, du moins pour le moment, être établies une à une, possiblement en utilisant des objets de natures très différentes.

Annexe : rapide survol de certaines notions de géométrie algébrique

Soit F un corps. Rappelons que pour tout entier naturel n, l'espace affine $\mathbf{A}^n(F)$ est l'ensemble F^n, et l'espace projectif $\mathbf{P}^n(F)$ est défini par $\mathbf{P}^n(F) = F^{n+1} - \{0\} \big/ F - \{0\}$. Un élément de $\mathbf{P}^n_F$ est donné par ses coordonnées homogènes $(x_0 : \ldots : x_n)$, et une variété algébrique projective X est l'ensemble des points de $\mathbf{P}^n(F)$ dont les coordonnées homogènes satisfont un certain nombre d'équations polynomiales homogènes $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Si $n = 2$, on appelle cela une courbe algébrique. On appelle *points rationnels* de la variété X les points de X à coordonnées dans F, autrement dit, les solutions dans F de ces équations polynomiales. Un F-morphisme entre deux variétés X et Y est une application polynomiale (c'est-à-dire de composantes polynomiales), d'image incluse dans Y. Le corps des fonctions $F(X)$ de la variété X est le corps des fractions rationnelles sur cette variété, autrement dit, le corps des fonctions qui s'écrivent $\frac{f(x_0,\ldots,x_n)}{g(x_0,\ldots,x_n)}$ avec f et g des polynômes homogènes et de même degré. Par exemple le corps des fonctions de $\mathbf{P}^1(F)$ est tout simplement isomorphe à $F(t)$, et plus généralement, le corps des fonctions d'une courbe algébrique projective sur F sera un corps de degré de transcendance 1 sur F.

Soit C une courbe projective sur F algébriquement clos. Le groupe $\mathrm{Div}(C)$ des *diviseurs* de C est défini comme le groupe abélien libre sur les points de C. Un diviseur D sur C est donc une combinaison linéaire entière finie $D = \sum n_P[P]$ de points de C, et on appelle *degré* de D et on note $\deg(D)$ la somme $\sum_P n_P$ de ses coefficients. Chaque fraction rationnelle f sur C a un certain nombre (fini) de pôles et de zéros, et on peut coder cela par un diviseur sur la courbe : $\mathrm{div} f = \sum_{\text{zéros}} m_P[P] - \sum_{\text{pôles}} n_Q[Q]$ où les m_P sont les multiplicités des zéros, et les n_Q les multiplicités des pôles. Une combinaison linéaire de fonctions ayant un zéro de multiplicité supérieure ou égale à m_P en P a aussi un zéro en P, de multiplicité au moins m_P. De même, une combinaison linéaire de fonctions ayant un pôle de multiplicité inférieure à n_P en P, ne peut avoir qu'un pôle de multiplicité inférieure ou égale à n_P. Autrement dit, pou tout diviseur D l'espace

$$L(D) = \{0\} \cup \{f \in F(x),\ \mathrm{div}(f) \geq -D\}$$

des fonctions à certains zéros imposés et certains pôles autorisés est un espace vectoriel, où on note $D_1 \geq D_2$ pour deux diviseurs D_1 et D_2 si et seulement si $D_1 - D_2$ est à coefficients positifs ou nuls. Cet espace vectoriel est de plus de dimension finie $l(D)$, et la détermination de cette dimension est un problème important en géométrie algébrique. Le théorème de Riemann-Roch la met en relation avec la dimension d'un autre espace de cette forme :

Théorème 3.1 *(Théorème de Riemann-Roch) Il existe un diviseur K sur C, appelé le diviseur canonique de C, tel que pour tout diviseur D,*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g,$$

où g est un invariant géométrique de la courbe appelé le genre.

Cette dualité qu'on voit apparaître entre D et $K-D$ est en fait de même nature que la dualité apparaissant dans la formule de Poisson, et le théorème de Riemann-Roch est une composante essentielle de la preuve de la formule de Poisson motivique.

Références

[1] V.V. Batyrev & Y.I. Manin - "Sur le nombre de points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques", Math. Ann. 286 (1990), 27-43

[2] V.V. Batyrev & Y. Tschinkel - "Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori", Internat. Math. Res. Notices 12 (1995), 591-635

[3] V.V. Batyrev & Y. Tschinkel - "Manin's conjecture for toric varieties", J. Algebraic Geom. 7 (1998), n°1, 3220-3239

[4] A. Chambert-Loir & F. Loeser - "Motivic height zeta functions", *arXiv :1302.2077.*

[5] A. Chambert-Loir & Y. Tschinkel - "On the distribution of points of bounded height on equivariant compactifications of vector groups", Invent. Math. 148 (2002), 421-452

[6] E. Hrushovski & D. Kazhdan - "Motivic Poisson summation", *Mosc. Math. J.* **9** (2009), no.3, 569-623.

[7] E. Peyre -"Points de hauteur bornée et géométrie des variétés [d'après Y. Manin et al.]", Séminaire Bourbaki n°891, p. 323-344, 2001

[8] J. Tate - "Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions" in *Algebraic number theory*, J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, eds., London Academic Press (1967), pp. 305-347,