

Interaction des échelles atomiques et continues  
dans la dynamique d'un milieu: application aux  
systèmes économiques

Relu Adrian Iuga

7 décembre 2009

encadré par Charles Lehalle

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Principe des MFG</b>	<b>4</b>
2.1	Un exemple : A quelle heure commence la réunion . . . . .	5
2.1.1	Presentation du problème . . . . .	5
2.1.2	Résolution . . . . .	6
2.2	Une variante du problème . . . . .	7
2.3	Commentaires . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Application des MFG à la formation des prix</b>	<b>9</b>
3.1	Introduction . . . . .	9
3.2	L'échelle macroscopique . . . . .	11
3.3	L'échelle microscopique . . . . .	13
3.4	Simulation . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>14</b>

# 1 Introduction

Traditionnellement, deux approches apparemment distinctes ont été utilisées pour modéliser la dynamique d'un milieu de grande taille. La première est l'approche continue, sous la forme d'équations différentielles partielles décrivant la dynamique du système. Cette approche est très efficace, notamment dans le cadre de la mécanique des fluides; elle implique souvent un petit nombre de paramètres, mais elle devient inadéquate pour des problèmes dans lesquels les processus détaillés atomiques affectent le comportement macroscopique du système. La deuxième approche, atomique, vise à décrire la dynamique de chaque particule (atome ou encore agent) et leurs interactions. Cette approche peut, en principe, modéliser avec précision le milieu sous-jacent mais elle est souvent très complexe et consommatrice en temps de simulation.

Récemment, une autre voie a été explorée qui couple les approches atomique et continue. L'idée principale est d'utiliser la modélisation atomique à des endroits où l'effet de l'échelle atomique n'est pas representable dans un cadre continu et la démarche continue ailleurs. La principale difficulté réside dans "le matching" entre les régions atomique et continues ([9], [10] et [11]).

Le problème devient plus compliqué quand on quitte la modélisation des *systèmes physiques*, pour s'intéresser à la modélisation des systèmes, où au niveau microscopique, les agents prennent des décisions dans un contexte d'interactions stratégiques. Dans la vie courante, ces agents seront probablement des économistes, des sociologues ou même des ingénieurs d'urbanisation. L'approche continue classique est celle du contrôle stochastique ([1] et [2]). Une nouvelle théorie née en 2006 grâce à Jean-Michel Lasry et Pierre-Louis Lions ([3], [4], [5], [6]), dite "jeux à champ moyen" (MFG ou Mean Field Game) qui modélise un système avec un nombre continuum<sup>1</sup> d'agents rationnels. Le principe des MFG est le mécanisme "avant/arrière" : la dynamique est décrite avec l'aide de deux EDP, une équation "avant" de type Kolmogorov qui décrit le déplacement des agents dans leur espace d'état :

$$\text{(Kolmogorov)} \quad \nabla \cdot (m \nabla u) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta m$$

et une équation "arrière" de type Hamilton-Jacobi-Belman qui décrit comment chaque agent déduit son comportement de son anticipation rationnelle des états futurs :

$$\text{(Hamilton-Jacobi-Belman)} \quad \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \rho u = -g(x, m)$$

---

<sup>1</sup>ayant la puissance du continu

Les agents anticipent la dynamique de la communauté et donc l'évolution du système. À partir de cette anticipation, ils utilisent un raisonnement "arrière" décrit par l'équation de Hamilton-Jacobi-Belman. Ainsi les actions individuelles peuvent être branchées sur l'équation "avant" (l'équation de Kolmogorov) pour connaître la dynamique réelle de la communauté.

Il existe deux approches discrètes pour modéliser un système où les agents ont une fonction "valeur" à maximiser, l'une reposant sur une optimisation à court terme (*i*), la seconde sur une optimisation à moyen terme (*ii*) :

- (*i*) il s'agit d'une approche statistique du type "zéro intelligence". Reconnaissant les limites de la cognition humaine, les économistes ont exploré de plus en plus de modèles où les agents ont une rationalité limitée. C'est aussi la direction prise par les mathématiciens : ils proposent des modèles qui prédisent des lois quantitatives concernant des propriétés différentes du système [7].
- (*ii*) la seconde approche discrète repose sur la théorie des jeux : les agents décident de leur stratégie en fonction du choix des autres. L'idée est d'observer l'évolution du système vers un point d'équilibre - l'équilibre de Nash. Cette approche a fait l'objet d'études approfondies par les mathématiciens, en particulier pour un nombre continu d'agents [8].

Le couplage des deux approches, continue et discrète, présente un réel intérêt, à l'instar des avancées observées dans l'étude de *systèmes physiques*. Dans ce document on montre une tentative de couplage des deux approches : la dynamique théorique macroscopique du système est décrite avec une approche de type MFG et, conditionnellement à cette vue, l'évolution microscopique du système est décrite avec une approche de type "zéro intelligence" ; **le modèle discret poursuit le modèle continu.**

## 2 Principe des MFG

La théorie de jeux à champs moyen est une branche de la théorie de jeux. C'est donc un ensemble de concepts, d'outils mathématiques, des théorèmes, des méthodes de simulations et des algorithmes qui, comme toute la théorie des jeux, sont destinés à aider les spécialistes à modéliser des systèmes où les agents prennent des décisions dans un contexte d'interactions stratégiques.

Les MFG se proposent d'étudier la limite d'une classe large de jeux à  $N$ - joueurs lorsque  $N$  tend vers infini. Comme les stratégies interpersonnelles complexes ne peuvent pas être mises en oeuvre par les joueurs quand  $N \rightarrow \infty$ , on ne considère que le cas où chaque joueur est progressivement perdu dans la foule dans les yeux des autres joueurs lorsque le nombre de

joueurs augmente. Plus précisément, les MFG étudient la classe de jeux où les joueurs de même nature peuvent être échangés sans modifier le jeu : une forme où rien ne dépend de l'individu. Cette hypothèse est particulièrement appropriée dans la modélisation d'applications quand il y a un grand nombre de joueurs.

Pour pouvoir profiter de la puissance du calcul différentiel, on considère qu'il y a un continuum de joueurs. Cette approche n'est pas nouvelle dans la littérature et a été largement utilisées depuis l'article de Robert Aumann ([14]) sur l'équilibre général dans un jeu avec un nombre infini de joueurs.

## 2.1 Un exemple : A quelle heure commence la réunion

### 2.1.1 Présentation du problème

Pour mieux comprendre le fonctionnement des MFG, on montre un exemple simple partant de la question : à quelle heure commence une réunion ?

Dans la réalité, quand une réunion est prévue pour un certain temps  $t$ , très souvent elle ne commence que plusieurs minutes après l'heure prévue. La vraie heure  $T$  de début de la séance dépend de la dynamique de l'arrivée de ses participants. Si une règle fixe le début de la réunion au moment où un certain quorum est atteint, cette règle institue une forme d'interaction stratégique entre les agents. On suppose qu'il y a un nombre continu d'agents. Les agents sont rationnels et comprennent la situation. Plus précisément, toutes les données concernant le problème sont connues par tous les participants à la réunion.

Trois moments seront importantes dans ce modèle :

- $t$  - l'heure à laquelle la réunion est prévue
- $\tau^i$  - le temps auquel chaque agent  $i$  voudrait arriver compte tenu du problème. On suppose que l'agent  $i$  arrive à  $\tilde{\tau}^i = \tau^i + \sigma^i \epsilon^i$ , où  $\epsilon^i$  est un bruit normal  $\mathcal{N}(0, 1)$  spécifique à l'agent  $i$  et  $\sigma^i$  est une constante positive. Plus précisément,  $\tau^i$  est une variable contrôlée par l'agent  $i$  et  $\sigma^i \epsilon^i$  est une incertitude de l'agent  $i$ . Ces incertitudes et leurs intensités diffèrent dans la population d'agents en fonction de la distance parcourue pour arriver à la réunion. On note  $m_0$  la distribution de  $\sigma^i$  dans la population.
- $T$  - l'heure quand la réunion commence

Pour décider à quelle heure arriver, ou au moins à quelle heure il aura l'intention d'arriver  $\tau^i$ , chaque agent va optimiser son coût qui, pour simplifier le problème, comporte trois composantes :

1. un coût (dû à la réputation ) de retardement par rapport à l'heure

prévue pour le début de la réunion,  $t$  :

$$c_1(t, T, \tilde{\tau}) = \alpha[\tilde{\tau} - t]_+$$

2. un coût (dû à des désagréments personnels) de retardement par rapport à l'heure de commencement de la réunion,  $T$  :

$$c_2(t, T, \tilde{\tau}) = \beta[\tilde{\tau} - T]_+$$

3. un coût pour le temps perdu avant que la réunion ne commence :

$$c_3(t, T, \tilde{\tau}) = \gamma[T - \tilde{\tau}]_+$$

On note  $c(t, T, \tilde{\tau})$  la somme de ces trois composantes, qui est une fonction convexe de  $\tilde{\tau}$ .

### 2.1.2 Résolution

Chaque agent essaye de minimiser l'espérance de son coût total. Similaire à l'équilibre de Nash, chaque agent optimise son coût en supposant  $T$  connu et  $T$  sera ajusté en fonction des stratégies de chaque participant. Pour l'agent  $i$  le problème est donc :

$$\tau = \arg \min_x \mathbb{E}[c(t, T, x)], \quad \tilde{x} = x^i + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i$$

On appelle  $T$  le champ moyen. Le but est de montrer un point fixe  $T$ , c'est-à-dire de montrer que l'optimisation de chaque agent, en supposant  $T$  connu, engendre entièrement la réalisation de  $T$ .

Pour montrer que cet équilibre existe, on doit regarder plus précisément le comportement individuel.

**Proposition 2.1.** *Le temps optimal  $\tau^i$  de chaque agent est déterminé de manière unique par l'équation :*

$$\alpha N\left(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i}\right) + (\beta + \gamma)N\left(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i}\right) = \gamma$$

où  $N$  est la fonction de distribution d'une loi normale réduite.

Donc, à l'aide de l'équation précédente on déduit  $\tau^i$  en fonction de  $(t, T, \sigma^i)$  et donc la dynamique d'arrivée des agents. Considérons  $m_0$  la distribution des  $\sigma^i$ . Par la loi de grand nombre, cette distribution est transportée par l'application  $\sigma^i \rightarrow \tilde{\tau}^i$ .

On note  $F$  la fonction (déterministe) de distribution des "vraies" arrivées des agents. C'est naturel d'établir le règle pour le commencement de la réunion en fonction de  $F$ . Un exemple est le suivant : la réunion commence après l'heure  $t$  et seulement quand une proportion  $\theta$  des participants sont arrivés.

On commence par une valeur de  $T$  et on obtient les stratégies optimales des agents  $(\tau^i(\cdot, T))_i$ . Ces stratégies optimaels sont des ciblés, les temps d'arrivées de chaque personne est bruité : on obtient ainsi  $(\tilde{\tau}^i(\cdot, T))_i$ . Par la loi des grandes nombres et par l'hypothèse d'indépendance des incertitudes, ces temps d'arrivées sont distribués d'après  $F$ , qui est determinist, et  $T$  est déduit à partir de  $F$  par le règle  $T^*(F)$ . Pour résumer :

$$T^{**} : T \rightarrow (\tau^i(\cdot, T))_i \rightarrow (\tilde{\tau}^i(\cdot, T))_i \rightarrow F = F(\cdot, T) \rightarrow T^*(F)$$

**Proposition 2.2.** *Si 0 n'appartien pas au support de  $m_0$ ,  $T^{**}$  est une contraction de  $[t, +\infty[$ , et alors il existe une unique solution  $T$  à ce problème.*

## 2.2 Une variante du problème

Il existe plusieurs façons d'enrichir ce modèle. On présente un modèle "géographique" : les agents sont répartis dans des endroits différents et doivent se déplacer où la réunion a lieu.

Ainsi, supposons que les agents sont distribués sur la partie négative de la ligne d'après une fonction de distribution  $m_0$  (de support compact et telle que  $m_0(0) = 0$ ) et qu'ils doivent se déplacer en 0, où la réunion a lieu. On suppose que la dynamique de l'agent  $i$ , qui se déplace vers 0, est décrite par le processus :  $dX_t^i = a_t^i + \sigma dW_t^i$ , où le drift  $a$  est contrôlé en contrepartie d'un coût quadratique  $\frac{1}{2}a^2$  (ici  $\sigma$  est le même pour tous). Chaque agent sera donc confronter au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{a(\cdot)} \mathbb{E} \left[ c(t, T, \tilde{\tau}^i) + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}^i} a^2(t) dt \right]$$

où  $X_0^i = x_0$ ,  $dX_t^i = a_t^i + \sigma dW_t^i$  et le temps d'arrivé en 0 est donné par  $\tilde{\tau}^i = \min\{q \mid X_t^s = 0\}$ .

Pour chercher un équilibre, comme dans le problème précédent, on raisonne à un  $T$  donné et l'optimisation de chaque agent est donné par un raisonnement de type contrôle stochastique. On obtient ainsi une équation de Hamilton Jacobi :

$$(HJB) \quad \partial_t u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0$$

La condition limite s'écrit d'une manière simple :  $u(\tau, 0) = c(t, T, \tau)$ ,  $\forall \tau$ , qui correspond au coût total pour arriver à la réunion (on suppose que la fonction  $c$  a la même forme et on impose de plus qu'elle soit deux fois différentiable). L'équation de Hamilton-Jacobi donne une fonction  $u$  de Bellman et donc indique le comportement optimal des agents pour un  $T$  fixe. Cette équation est la même pour tous les agents car ils ont le même critère d'optimisation et diffère seulement dans leur point de départ. De plus la solution est Markovienne, le drfit  $a(s, x) = -\partial_x u(s, x)$  et donc dépend juste de point de départ  $x$  et de temps  $s$ .

La loi de grand nombre donne la distribution  $m$  des agents à l'aide d'une équation de Kolmogorov. La distribution correspond à la distribution des participants qui ne sont pas encore arrivés en 0 et alors  $m$  perd de la masse :

$$(Kolmogorov) \quad \partial_t m + \partial_x((\partial_x u)m) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m$$

avec  $m(0, \cdot) = m_0(\cdot)$  est fixé au debut et on impose  $m(\cdot, 0) = 0$ .

Dans ce contexte, le débit qui atteint 0 est  $s \rightarrow -\partial_x m(s, 0)$ . Donc la fonction de distribution  $F$  des arrivées des agents est définie par :

$$F(s) = - \int_0^s \partial_x m(v, 0) dv$$

Et après  $T$  est calculé par le règle d'avant (par exemple  $\theta = 90\%$ ), mais on impose qu'il soit dans l'intervale  $[t, T_{\max}]$ , c'est-à-dire :

$$T = \begin{cases} t, & \text{si } F^{-1}(\theta) \leq t \\ T_{\max}, & \text{si } F^{-1}(T_{\max}) \leq \theta \\ F^{-1}(\theta), & \text{autrement} \end{cases}$$

On peut montrer qu'il existe au moins un point d'équilibre  $T$ , mais on ne peut pas assurer l'unicité.

### 2.3 Commentaires

Cet exemple est un exemple typique d'un jeu à champs moyen en temps continu et le mécanisme est souvent le même. Premièrement les agents anticipent ce que sera la dynamique de la communauté et donc d'anticiper  $m$ . Dans l'exemple précédent, les informations pertinentes ont été capturés par  $T$  qui est une fonction de  $m$ , de façon qu'ils anticipent  $m$  avant d'anticiper  $T$ . A partir de cet anticipation, les agent utilise un raisonnement "arriere" décrit par l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman. Puis, à partir de cette équation, les actions individuelles peuvent être "branchés" sur l'équation "avant" (l'équation de Kolmogorov) pour connaître la dynamique réelle de la communauté,



déduite des comportements individuels. Enfin, l'hypothèse des anticipations rationnelles suppose qu'il doit y avoir cohérence entre le  $m$  anticipé et le  $m$  actuel. Ce mécanisme "avant/arrière" est le coeur de la théorie des jeux à chapms moyens.

### 3 Application des MFG à la formation des prix

#### 3.1 Introduction

L'évolution des prix dans un marché financier est le résultat de l'interaction des ordres d'achat et de vente au cours d'un processus assez complexe dont voici une simple description :

- les participants peuvent sou-mettre des ordres sur le marché pour déclarer leur intention d'achat ou de vente
- si un ordre d'achat (ou de vente), correspond à un ordre de vente (ou d'achat) déjà existant, ils se compensent instantanément : c'est ce qu'on appelle un "matching". Une transaction a lieu et les deux ordres sont retirés du carnet d'ordre du marché (LOB pour Limit Order Book). Si l'ordre émis entraîne un "matching", il est appelé un *ordre de marché* (ou *market order*)
- s'il n'entraîne pas de "matching", c'est-à-dire si son prix ne correspond pas à un ordre existant, il est appelé un *ordre limite* (ou *limit order*). Il ne donne donc pas lieu à une transaction immédiate et par conséquence reste dans le LOB

Les ordres limites d'achat ou de vente s'accumulent dans le carnet d'ordre tandis que tout ordre de marché engendre des transactions qui éliminent des ordres limites. Un ordre limite peut aussi être retiré du LOB en étant annulé, ceci peut se produire à tout moment ; c'est un *ordre d'annulation* (ou *cancel order*). Un tel mécanisme divise naturellement le LOB dans deux parties disjointes : les acheteurs (côté *bid*) en des prix plus petits et les vendeurs (côté *ask*) avec des prix plus grands. Le plus bas prix de vente proposé à tout instant est appelé *best ask*,  $a(t)$ , et le plus haut prix d'achat est appelé *best bid*,  $b(t)$ . Le *spread bid-ask*,  $\psi(t) = a(t) - b(t)$ , représente l'écart entre les meilleurs prix de vente et respectivement achat, et le *mid-price* au temps  $t$  est noté  $p_m(t) = \frac{b(t)+a(t)}{2}$ . Les meilleurs prix (best ask et best bid) peuvent changer quand de nouveaux ordres de marché arrivent ou quand d'anciens ordres sont annulés.

Jusqu'à présent, l'approche des mathématiciens est du type "zéro intelligence" ([7]) : simuler des lois pour le bid, l'ask, le spread, etc. Par exemple, l'un des premiers modèles suppose qu'il existe deux types d'agents qui envoient des ordres après un processus de Poisson : les agents impatient qui placent des ordres poursuivits d'une transaction immédiate d'après un pro-



FIG. 1 – carnet d'ordre

cessus de Poisson d'intensité  $\mu$  de volume par minute ; et des agent patient qui placent des ordre limit qui arrive de manière aléatoire dans l'espace et dans le temps. Les ordres limits d'achat (vente) arrive de manière indépendnet à une distance  $d$  de best bid (best ask) après une loi exponentielle de paramètre  $\lambda(d)$ . Les ordres limits (d'achat ou de vente) arrivent aléatoirement après un processus de poisson d'intensité  $\alpha$ . La tailles des ordres est supposée toujours constante,  $v$ . Un ordre limit peut être annuler selon un processus de Poisson, analogue à la désintégration radioactive, avec une intensité constante  $\theta$ . Les paramètres sont estimés par des méthodes classiques. Des modèles plus compliqués ont été proposés jusqu'à present mais l'approche reste la même.

Un modèle "zéro intelligence" se concentre sur quelques caractéristiques du marché choisies antérieurement (par exemple le temps d'arrivé des ordres, la taille des ordres d'arrivée, etc.). Lorsque la simulation est faite, on retrouve ces caractéristiques, mais on ne trouve pas nécessairement d'autres caractéristiques importantes du marché. Par exemple, nous ne trouvons pas la concavité bien établie de la fonction de l'impact des prix. On devrait trouver la dependence entre le prix et le type d'ordre qui, dans un véritable marché, sont fortement corrélés en temps.

Cette approche est purement phénoménologique, les mécanismes du marché sont considérés comme des systèmes physiques et par conséquent on ne tient pas compte de la dimension économique, à savoir le mécanisme "rationnel" de décision. Ce sont pourtant ces processus de décision qui sous-tendent et expliquent la dynamique des carnets d'ordres et par voie de conséquence l'évolution des prix.

On propose ici un modèle à deux echelles pour simuler la dynamique d'un carnet d'ordre :

- un processus de décision à niveau macroscopique qui décrit la vue

- dynamique théorique des agents du prix
- une échelle microscopique, similaire avec le modèle “zéro intelligence”, qui en fonction de la vue théorique du prix et conditionnellement au LOB current décrit la dynamique du LOB

### 3.2 L'échelle macroscopique

On considère tout d'abord séparément les acheteurs de titres (le côté bid) et les vendeurs de titres (le côté ask). Pour pouvoir profiter de la puissance du calcul différentiel, nous allons considérer qu'il y a un grand nombre d'agents à l'achat et à la vente et modéliser les carnets d'ordres au bid et à l'ask de manière continue. Ainsi, introduisons pour le bid et l'ask deux densités  $m_B$  et  $m_A$  qui vont représenter la distribution des ordres au bid et à l'ask. Plus précisément,  $m_B(t, p)dp$  (resp.  $m_A(t, p)dp$ ) représente le nombre d'ordres au bid (resp. à l'ask) entre  $p$  et  $p + dp$ . On suppose aussi que les densités vérifient  $\forall t, m_B(t, p^*(t)) = m_A(t, p^*(t)) = 0$ . Dans ce contexte  $p^*(t)$  représente le prix de marché à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le prix auquel se font les transactions entre les acheteurs et les vendeurs.

Prenons un agent anonyme  $i$  quelconque ayant un ordre au prix  $p^i$  dans le carnet, au bid par exemple, c'est-à-dire qu'il souhaite acheter un titre au prix  $p^i$ . Cet agent va pouvoir modifier sa position dans le carnet et nous présentons la dynamique de son ordre dans le carnet par le processus suivant :

$$dp_t^i = r_t^i dt + \sigma dW_t^i$$

Cette dynamique des ordres permet, du fait de la loi des grands nombres d'écrire une dynamique des densités  $m_B$  et  $m_A$ . Il s'agit pour l'instant d'une dynamique de type transport et l'on peut écrire deux équations de type Kolmogorov :

$$\partial_t m_b(t, p) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{pp}^2 m_b(t, p) + \partial_p (r_b(t, p) m_b(t, p)) = 0$$

$$\partial_t m_a(t, p) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{pp}^2 m_a(t, p) + \partial_p (r_a(t, p) m_a(t, p)) = 0$$

où  $r_b(t, p)$  et  $r_a(t, p)$  représentent les fonctions de contrôle associées au bid et à l'ask respectivement.

Chaque transaction à l'achat correspondant de fait à une transaction à la vente, il existe un lien entre le comportement local des densités  $m_B(t; \cdot)$  et  $m_A(t; \cdot)$  autour de  $p^*(t)$ . Ce lien correspond à un équilibre entre le flux de demande  $j_B(t, p^*(t))dt$  et le flux de l'offre  $j_A(t, p^*(t))dt$ . Par définition :

$$j_B(t, p)dt = \mathbb{P}(X_{t+dt} > p, X_t < p) - \mathbb{P}(X_{t+dt} < p, X_t > p)$$

où  $X_t$  représente un ordre quelconque au bid.

Ainsi on obtient facilement que l'équilibre offre/demande s'écrit fort simplement en égalisant (en valeur absolue) les pentes des densités au prix de marché :

$$-\partial_p m_B(t, p^*(t)) = \partial_p m_A(t, p^*(t))$$

Cette égalité en valeur absolue des pentes permet de réécrire le problème plus simplement sans distinguer entre le bid et l'ask mais en considérant les ordres de manière algébrique, un ordre d'achat étant associé à une valeur positive, un ordre de vente étant quant à lui associé à une valeur négative. Cette approche permet d'avoir une seule et unique fonction à étudier qui sera régulière à la jonction entre le bid et l'ask. Introduisons en effet la fonction  $m$  qui sera centrale dans la suite et définissons-la par :

$$m(t, p) = \begin{cases} m_A(t, p), & \text{if } p \geq p^* \\ -m_B(t, p), & \text{if } p < p^* \end{cases}$$

Cette fonction synthétise les deux carnets d'ordre, à l'achat et à la vente et permet de n'avoir qu'un objet d'étude. De plus, le prix de marché  $p(t)$  est donné par l'intersection - hors les bords du domaine - de  $m(t; \cdot)$  avec l'axe des abscisses.

Les dynamiques de  $m_A$  et  $m_B$  permettent d'écrire la dynamique de  $m$  :

$$\partial_t m(t, p) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{pp}^2 m(t, p) + \partial_p (r(t, p)m(t, p)) = 0$$

$$\text{où } r(t, p) = \begin{cases} r_a(t, p), & \text{if } p \geq p^* \\ r_b(t, p), & \text{if } p < p^* \end{cases}$$

En raison de l'achat et la vente de titres le LOB modélisé ci-dessus perd du poids, après une exécution des ordres au prix  $p^*$  fait disparaissent du carnet des deux côtés du LOB. Ce modèle requies l'introduction des ordres. Si quelqu'un achete un nombres de titres (côté offre), il est tout à fait normal de qu'il le réintroduit côté demande. Dans la mesure où on connaît le volume instantané qui est échangé, il faut donc réintroduire une quantité d'ordres équivalente à ce volume dans les carnets d'ordre. Si l'on considère les densités  $m_B$  et  $m_A$  ou plus simplement  $m$ , on doit rajouter des termes de source dans l'équation.

Les termes de source que nous rajoutons vont pour l'instant être purement exogènes : pour chaque ordre exécuté à l'achat, on va tirer dans  $[p^*, p_{\max}]$  un prix de réintroduction à la vente et, symétriquement, pour chaque ordre exécuté à la vente, on va tirer dans  $[p_{\min}, p^*]$  un prix de réintroduction à l'achat. Ces tirages se font selon des densités de probabilités que l'on notera  $p \rightarrow g(p^*, p)$  et  $p \rightarrow h(p^*, p)$  pour la réintroduction au bid et à l'ask respectivement (on suppose donc que le support de  $g$  est à "gauche"

de  $p^*$  et que le support de  $h$  est à "droite" de  $p^*$ ). L'EDP s'écrit alors de la manière suivante :

$$\partial_t m(t, p) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{pp}^2 m(t, p) + \partial_p (r(t, p)m(t, p)) = -\frac{\sigma^2}{2} \partial_p m(t, p^*) \left( g(p^*(t), p) - h(p^*(t), p) \right)$$

Les EDP considérées jusqu'à présent laissent inconnues ou plutôt non spécifiées les fonctions  $g$  et  $h$ . Pour spécifier  $h$  (et  $g$  de la même manière) on peut supposer que deux effets sont présents qui décident du choix de la réinsertion d'un ordre plus ou moins loin du prix actuel d'équilibre. Un agent qui vient d'acheter pour faire un profit en revendant va se placer dans le carnet à la vente et ce pour maximiser son profit. Toutefois, il peut vouloir réaliser relativement rapidement sa plus-value et va donc placer son ordre de telle sorte qu'il n'y ait pas trop d'ordres à la vente qui doivent être exécutés préalablement à l'exécution du sien. Chaque agent va donc réinsérer un ordre en  $\bar{p}_A$  en maximisant une expression du type :

$$\bar{p}_A(t, \beta) \in \text{Argmax}_p \left[ p + \beta \int_{p^*(t)}^p m(t, \pi) d\pi \right]$$

où  $\beta$  donne l'importance relative du second effet sur le premier.

Le modèle introduit, pour l'instant, est un modèle continuum d'agents. Ainsi, les aléas tels qu'ils sont modélisés ne sont que microscopiques et, du fait de la loi des grands nombres, les dynamiques de  $m$  est déterministes. En pratique, sauf à considérer un modèle mal spécifié, la plupart de nos modèles convergent en fait vers une solution stationnaire qui est le plus souvent aisé à déterminer. Cette convergence vers un équilibre stationnaire peut être commentée de deux manières différentes. C'est évidemment un point négatif quant à la modélisation puisque l'on souhaite modéliser des marchés qui évoluent sans cesse. C'est cependant une très bonne propriété pour adjoindre au modèle un ou des aléas macroscopiques puisqu'alors le système va se comporter comme un système stable qui est sans cesse soumis à un déséquilibre aléatoire.

### 3.3 L'échelle microscopique

Au niveau microscopique on note  $p_m = \frac{a(t)+b(t)}{2}$  le mid-price à l'instant  $t$ ,  $v_b(t)$  le volume d'actions au best bid à l'instant  $t$  (resp.  $v_a(t)$ ) et la pente "microscopique" du prix  $l_m(t) = \frac{v_b(t)+v_a(t)}{b(t)-a(t)}$ . On note aussi  $\Delta p(t) = p^*(t) - p_m(t)$  et  $\Delta l(t) = l_M(t) - l_m(t)$ .

L'évolution du système à l'échelle microscopique est décrite par un modèle de type "zéro intelligence" :

– on considère un modèle log-normale :

$$\log(V, \psi, \sigma, N) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

où

1. le volume cumulé pendant la période  $\delta t$ ,  $V$
  2. le nombre de transactions ayant eu lieu pendant  $\delta t$ ,  $N$
  3. le spread moyen par transaction,  $\psi$
  4. la volatilité Garman-Klass à 10 minutes,  $\sigma$
- conditionnellement à  $\Delta p$  et  $\Delta l$ , on décide le type du prochain ordre (market order, limit order ou cancel order), de quelle côté du carnet on va envoyer cet ordre (ask ou bid) et à quel intervalle de temps
  - on calcule la loi conditionnelle du couple  $(V, \psi)$  en sachant  $\sigma$  (donné par le modèle MFG) et  $N \approx \frac{1}{\delta t}$
  - si le type d'ordre est market ou cancel, conditionnellement à  $\psi$ , on décide à quel prix on envoie l'ordre sur le marché

### 3.4 Simulation

Pour bien illustrer la démarche on montre, d'abord des simulations où il n'y a pas vraiment un modèle continu de type MFG à l'échelle macroscopique, juste un prix constant.

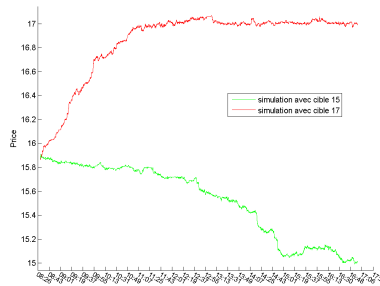


FIG. 2 – Simulation avec un prix cible constant

On remarque que les deux trajectoires ont l'allure d'une trajectoire de prix et qu'elles se rapprochent du prix cible puis elle varient autour de ce prix.

On observe que le prix simulé "suit" la trajectoire du modèle continu, et qu'il existe un petit décalage entre les deux courbes.

## 4 Conclusions et perspectives

Les approches discrètes, "zéro intelligence" et théorie de jeux, ne sont pas suffisantes pour la modélisation d'un système avec des agents rationnels : la

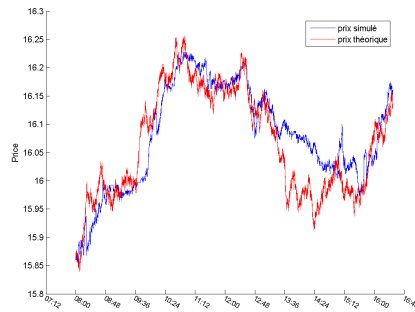


FIG. 3 – Simulation avec un prix qui “suit” une trajectoire de prix théorique (en rouge)

première sous-estime la rationalité des agents et la deuxième a un pouvoir plutôt descriptif en regardant le point d’équilibre. Les *systemes économiques* offrent souvent des exemples où la dynamique varie localement à un niveau microscopique (le cas de la formation des prix) et, dans ce cas, l’approche continue est insuffisante.

On a vu dans ce document une tentative de couplage de deux échelles : **le modèle discret poursuit le modèle continu**. Le problème devient compliqué quand on essaie de boucler, de faire évoluer concomitamment les deux modèles. Est-il possible de coupler les MFG avec “zéro intelligence”, c’est-à-dire de faire en sorte que le modèle MFG prenne en compte des éléments de la dynamique atomique ? **Le modèle discret influence le modèle continu**. Quel est le support théorique qui permettra ce couplage ? Du point de vue MFG, le couplage apportera une perturbation du système. Sous quelles conditions (fonction de la nature et l’amplitude des perturbations) la solution des MFG, perturbée par des variations atomiques, reste la même ?

## Références

- [1] P.L. Lions, *Optimal control of diffusion process an Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, 1983, Comm. P.D.E, 8, Part I, 1101-1134, Part II, 1229-1276
- [2] H. Pham, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, Springer, 2005
- [3] J.M. Lasry et P.L. Lions *Jeux à champs moyen i. la cas stationnnaire*, C.R. Acad. Sci. Paris, 343(9), 2006
- [4] J.M. Lasry et P.L. Lions *Jeux à champs moyen ii. horizon fini et contrôle optimal*, C.R. Acad. Sci. Paris, 343(10), 2006
- [5] J.M. Lasry et P.L. Lions *Mean Field Games*, Japanese Journal Of Mathematics, 2(1), Mar. 2007
- [6] O. Guéant *Mean Field Games and applications to economics*, PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 2009
- [7] J.D. Farmer, P. patelli et I.I. Zovko *The Predictive Power of Zero Intelligence in Financial Markets*, PNAS, 102(6) 2254-2259, Feb. 2005
- [8] G. Carmona *Nash Equilibria of Games with a Continuum of Players*, 2005
- [9] D.D. Vvedensky *Multiscale modelling of nanostructures*, J. Phys. Condens. Matter, 16 : R1537-R1576, 2004
- [10] H.S. Park et W.K. Liu *An introduction and tutorial of multiple-scale analysis in solids*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193 : 1733-1772, 2004
- [11] W. Curtin et R. Miller *Atomistic/continuum coupling methods in multi-scale materi- als modeling*, Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering, 11 : R33-R68, 2003
- [12] O. Guéant, R.A. Iuga et C.A. Lehalle *From zero intelligence to MFG*, en préparation
- [13] M. Avellaneda et S. Stoikov *High-frequency trading in a limit order book*, Quantitative Finance, 8(3) : 217-224, 2008
- [14] R. Aumann *Markets with a continuum of traders*, Econometrica, 32(1/2), 1964