# Espaces principaux homogènes localement triviaux

David Jarossay

sous la direction de Philippe Gille

5 octobre 2011

On commence par rappeler quelques notions générales de géométrie algébrique ; puis on introduit la notion de torseur, ou espace principal homogène. Enfin, on présente certaines conjectures, et résultats en direction de ces conjectures, qui concernent la trivialité locale de certains torseurs.

## 1 Introduction

### 1.1 Variétés algébriques

**Définition.** Soit $k$ un corps algébriquement clos. Une variété algébrique affine sur $k$ est une partie $X$ de $k^n$ définie par un ensemble fini d'équations polynomiales, c'est-à-dire : $X = \{x = (x_1, ..., x_n) \in k^n / \forall i \in \{1, ..., r\}, P_i(x) = 0\}$, où $P_i \in k[X_1, ..., X_n]$, $i = 1, ..., r$. Si $I$ est l'idéal de $k[X_1, ..., X_n]$ engendré par les $P_i$, alors on a aussi $X = \{x \in k^n / \forall P \in I, P(x) = 0\}$, et on note $X = V(I)$.

(- Remarque : une partie définie par un ensemble infini d'équations polynomiales peut en fait être définie par un nombre fini d'équations, cela découle du fait que $k[X_1, ..., X_n]$ est noethérien.)
- On montre que ces parties sont les parties fermées pour une topologie sur $k^n$, qu'on appelle la topologie de Zariski. Les variétés algébriques affines sont alors elles-mêmes munies de la topologie induite par la topologie de Zariski sur $k^n$.
- A toute variété $V(I)$ on peut associer son anneau de fonctions régulières, $k[X_1, ..., X_n]/I$.
- Un morphisme $V(I) \to V(J)$ de variétés affines, où $V(I) \subset k^n$, $V(J) \subset k^m$, est une application polynomiale $k^n \to k^m$ qui envoie $V(I)$ dans $V(J)$.
- Un groupe algébrique est une variété algébrique $G$ munie d'une structure de groupe compatible à la structure algébrique, c'est-à-dire que la multiplication $G \times G \to G$ et l'inverse $G \to G$ sont des morphismes de variétés. Un tel groupe peut s'écrire comme un sous-groupe du groupe algébrique $\mathrm{GL}_n(k)$ (ce n'est pas toujours le cas dans un cadre plus général). Un groupe algébrique $G$ agit de manière algébrique sur une variété $V$ si l'application $G \times V \to V$ qui définit l'action est un morphisme de variétés algébriques.

Il existe beaucoup d'autres variétés algébriques ; par exemple, les variétés projectives sont des parties de $\mathbb{P}^n_k$, définies par des équations polynomiales homogènes ; et les fonctions régulières sont alors des fonctions polynomiales homogènes. Toute variété algébrique est recouverte par des ouverts isomorphes à des variétés algébriques affines.

### 1.2 Schémas

La notion de schéma (qui généralise les variétés algébriques) donne un cadre général et unifié, qui permet de traiter beaucoup de questions difficiles à traiter ou même à formuler si on se limite au cadre des variétés algébriques. Cette notion permet entre autres traiter des équations polynomiales à coefficients dans des anneaux quelconques (auquel cas il n'y a pas de correspondance entre points des variétés et idéaux maximaux des anneaux de polynômes aussi claire que dans le cas d'un corps algébriquement clos) ; de formaliser des questions liées aux multiplicités des équations, ou concernant des variétés dépendant d'un paramètre... On ne définit pas ici les schémas, mais on signale que :
- A tout anneau $A$ correspond un "schéma affine", dont l'ensemble sous-jacent est $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des idéaux premiers de $A$, tel que $A$ est l'anneau des fonctions sur le schéma. La donnée de ce schéma est alors équivalente à la donnée de l'anneau $A$.
- Tout schéma X admet un recouvrement ouvert $(U_i)$ tel que les $U_i$ sont isomorphes à des schémas affines.
- De même que les variétés sont définies sur un corps de base, les schémas seront définis sur un schéma de base $S$. Formellement, un schéma sur $S$ (ou un $S$-schéma) est un schéma $X$ muni d'un morphisme (le morphisme "structural") de schémas $f : X \to S$. Si un système d'équations polynomiales est à coefficients dans un anneau de base A, le schéma qui s'en déduit est alors muni d'un morphisme vers le schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ associé à $A$.
- Si $S$ est un schéma, qu'on prend comme schéma de base, on a de plus une notion de "schéma en groupes" sur $S$, et une notion d'action d'un $S$-schéma en groupes sur un $S$-schéma.

## 2 Espaces principaux homogènes

Un ensemble $X$ sur lequel un groupe $G$ agit est appelé espace principal homogène sous $G$ si l'action de $G$ est libre et transitive. Ceci équivaut à dire que l'application $X \times G \to X \times X$, $(x, g) \mapsto (x, x.g)$ est une bijection. Grâce à cette formulation, la condition se transpose naturellement au cadre des $S$-schémas : en disant que, si $X$ est un $S$-schéma et $G$ un $S$-schéma en groupes qui agit sur $X$, le morphisme $X \times_S G \to X \times_S X$ défini par $(x, g) \mapsto (x, x.g)$ est un isomorphisme de $S$-schémas.

Mais il existe aussi la notion de fibré principal en topologie, et c'est cette notion dont a été construit l'analogue dans le cadre des $S$-schémas, (le schéma de base $S$ étant l'analogue de la base du fibré en topologie). Un fibré principal est localement trivial, i.e. localement isomorphe au fibré principal trivial dont l'action du groupe $G$ est définie par l'action de $G$ sur lui-même par translation. Transporter l'idée de trivialité locale dans ce cadre algébrique pour en tirer une bonne définition des torseurs était difficile, car beaucoup d'objets qui, intuitivement, devaient nécessairement être des torseurs n'étaient pas localement triviaux. La solution à ce problème a consisté à exiger qu'un torseur soit localement trivial pour une "topologie" (quelquechose d'un peu plus général qu'une topologie) "plus fine" que la topologie usuelle.

### 2.1 Topologies de Grothendieck

Une topologie sur un ensemble $X$ peut être vue de la manière suivante : un ouvert $U$ de $X$ est une immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ ; l'intersection de deux ouverts $U_i$ et $U_j$ est l'immersion ouverte $U_i \times_X U_j \hookrightarrow X$ ;

un recouvrement ouvert $(U_i)$ de $X$ est une famille d'immersions ouvertes $(f_i : U_i \hookrightarrow X)$ dont la réunion des images est $X$ tout entier ; enfin, la topologie est la donnée de tous les recouvrements. On peut alors remplacer "immersion ouverte" par d'autres classes $E$ d'applications continues ; il se trouve que dans le cadre des schémas, en procédant ainsi pour $E$ certaines classes bien particulières de morphismes de schémas, on obtient une notion de "E-topologie" qu'il est effectivement légitime d'appeler topologie.

Soit $E$, une des trois classes de morphismes de schémas suivantes : les immersions ouvertes (E = (Zar)), les morphismes étales (E = (ét)), les morphismes plats localement de présentation finie (E = (fl)). (Les morphismes étales jouent un rôle un peu analogue aux difféomorphismes locaux en géométrie différentielle. Les morphismes plats de schémas généralisent les morphismes plats d'anneaux. Toute immersion ouverte est un morphisme étale, tout morphisme étale est plat et localement de présentation finie). Alors :

1) Dans les trois cas, $E$ est stable par composition et changement de base, ce qui assure que si $U_i \hookrightarrow X$ et $U_j \hookrightarrow X$ sont dans $E$, alors $U_i \times_X U_j \hookrightarrow X$ est encore dans $E$. De plus, $E$ contient tous les isomorphismes, de sorte que tout isomorphisme de $X$ définisse un recouvrement (à un seul ouvert) de $X$.

2) Les appellations "E-recouvrement", "E-topologie" etc. permettent d'exprimer d'une manière parlante et d'axiomatiser un ensemble de résultats appelé la descente fidèlement plate. On obtient ainsi des résultats comme : des objets définis sur les "ouverts" d'un "recouvrement" se "recollent" ssi ils sont compatibles sur les "intersections" (produits fibrés) ; ou encore : une propriété d'un morphisme est vraie ssi elle est vraie sur un "recouvrement" (elle est donc "locale pour la E-topologie"). Cela justifie la terminologie de $E$-topologie. Ces résultats de la descente (voir par exemple le début de [Rom]) sont spécifiques aux morphismes plats tandis que les conditions de 1) sont vraies pour toutes les classes $E$ usuelles de morphismes.

**Définition** Soit $S$ un schéma. Soit $Y$ un schéma sur $S$. Un $E$-recouvrement de $Y$ est une famille de morphismes de $E$ $(g_i : U_i \to Y)_{i \in I}$ tel que $\cup g_i(U_i) = Y$. La $E$-topologie est la donnée de tous les $E$-recouvrements. (Remarque : avec les hypothèses faites sur $E$, les $g_i(U_i)$ ci-dessus sont toujours des ouverts de Zariski de $S$.) On parle alors de topologie étale (E = (ét)), de topologie fppf (E = (fl)).

Les notions de faisceaux de groupes abéliens et de cohomologie des faisceaux se généralisent à ce cadre (voir [Mil]). Dans la suite, on aura seulement besoin de l'ensemble $H^1$ défini via des cocycles, mais pour un groupe non abélien a priori.

## 2.2 Définition des espaces principaux homogènes

Soit $S$ un schéma. Tous les $S$-schémas considérés sont supposés plats et localement de présentation finie. Soit $X$ un $S$-schéma, et $G$ un $S$-schéma en groupes qui agit sur $X$.

**Définition.** On dit que $X$ est un torseur sur $S$ sous $G$ si :
$(i)$ Le morphisme $X \times_S G \to X \times_S X$ défini sur les points par $(x, g) \mapsto (x, x.g)$ est un isomorphisme de $S$-schémas
$(ii)$ $X$ est localement trivial pour la topologie fppf, c'est-à-dire localement isomorphe, en tant que $S$-schéma muni d'une action de $G$, à $G$ muni de l'action de $G$ par translation.

Dans le cas où le groupe est lisse (et ce sera toujours le cas dans la suite), on peut se contenter de considérer la topologie étale :

**Proposition.** Si $G$ est lisse, alors tout $G$-torseur est localement trivial pour la topologie étale sur $X$.

- Dans le cas cas du groupe $GL_n$, les torseurs s'identifient aux fibrés vectoriels de rang $n$, et ils sont localement triviaux pour la topologie de Zariski.
- Mais pour beaucoup de groupes usuels, comme par exemple des groupes orthogonaux, les torseurs ne sont plus localement triviaux pour la topologie de Zariski.
- Il existe un analogue, en géométrie algébrique, des revêtements finis en topologie, ce sont les "revêtements finis étales" ; on a aussi une notion de revêtement fini étale galoisien. De plus, si $S$ est un schéma connexe, à tout groupe fini $\Gamma$, on peut associer un $S$-schéma en groupes dit "constant", $\Gamma_S$ ; alors, les $\Gamma_S$-torseurs sur $S$ s'identifient aux revêtements finis étales galoisiens de $S$ de groupe de Galois $\Gamma$ (voir [Sza]).

### 2.3 Lien avec la cohomologie

Pour simplifier, on se limite au cas où tous les schémas sont affines, ce qui sera le cas dans la partie 3 (dans ce cas, tous les "faisceaux torseurs" sont représentables par des schémas ; voir [Mil III.4] pour l'énoncé général). Si $G$ est un $S$-schéma en groupes, $E$ une classe de morphismes comme ci-dessus pour tout $U$ "ouvert" de $S$ pour la $E$-topologie on note $G(U) = \mathrm{Hom}_S(U, G)$ (qui est un groupe car $G$ est un $S$-schéma en groupes). On fixe et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un $E$-recouvrement de $S$.

**Définition.** $(i)$ Un 1-cocycle pour $\mathcal{U}$ à valeurs dans $G$ est une famille $(g_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$, $g_{ij} \in G(U_{ij})$ telle que $\forall i, j, k \in I$, $g_{ij}|_{U_{ijk}}.g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}$. On note $Z^1(\mathcal{U}/S, G)$ l'ensemble de ces 1-cocyles.
$(ii)$ Deux cocycles $g = (g_{ij})$ et $g' = (g'_{ij})$ sont cohomologues s'il existe une famille $(h_i)_{i \in I}$, $h_i \in G(U_i)$, telle que $\forall i, j \in I$, $g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}}.g_{ij}.h_j|_{U_{ij}}^{-1}$. Cela définit une relation d'équivalence, et l'ensemble quotient est noté $\check{H}^1(\mathcal{U}/S, G)$.
$(iii)$ La limite $\varinjlim \check{H}^1(\mathcal{U}/S, G)$ sur tous les $E$-recouvrements $\mathcal{U}$ est notée $\check{H}^1(S, G)$. C'est un ensemble pointé où 0 est l'image des classes de cocycles $g$ tels que $g_{ij} = 1$ pour tous $i, j \in I$.

**Proposition.** Soit $S$ un schéma affine, soit $G$ un $S$-schéma en groupes affine. Alors l'ensemble des classes d'isomorphismes de torseurs sur $S$ sous $G$ est en bijection canonique avec $\check{H}^1_{fppf}(S, G)$. Si, de plus, $G$ est lisse, alors on a aussi une telle bijection en remplaçant $\check{H}^1_{fppf}(S, G)$ par $\check{H}^1_{\acute{e}t}(S, G)$. Ce sont des bijections d'ensembles pointés, i.e. elles font correspondre la classe d'isomorphisme du torseur trivial avec $0 \in H^1$.

Dans la partie 3, tous les schémas seront affines et tous les groupes seront lisses, de sorte qu'on pourra appliquer la dernière assertion ci-dessus.

## 3 Deux conjectures sur les espaces principaux homogènes

### 3.1 Enoncés et des conjectures et des théorèmes

On a donc vu que tout torseur est localement trivial pour la topologie fppf, mais pas a priori pour la topologie de Zariski. Les conjectures suivantes portent sur la trivialité locale de torseurs mais, cette fois, pour la topologie de Zariski (le titre de ce texte fait référence à cette trivialité locale-ci). La première conjecture est dûe à Serre et Grothendieck, et la deuxième est dûe à Grothendieck :

**Conjecture 1** Soit $k$ un corps algébriquement clos. Soient $X$, une variété algébrique intègre et lisse sur $k$, $G$ un groupe algébrique, réductif et connexe sur $k$. Alors tout espace principal homogène sur $X$ sous $G$ qui admet une section rationnelle (c'est-à-dire définie sur un ouvert) est partout localement trivial pour la topologie de Zariski.

**Conjecture 2** Soient $A$ un anneau local régulier, et $G$ un $A$-schéma en groupes réductif. Tout espace principal homogène sur $\mathrm{Spec}(A)$ sous $G$ qui est trivial au point générique de $\mathrm{Spec}(A)$ est trivial. En d'autres termes, l'application d'ensembles de cohomologie étale $H^1_{ét}(A,G) \to H^1_{ét}(K,G_K)$, où $K = \mathrm{Frac}(A)$, a un noyau trivial.

On peut montrer que la conjecture 2 implique la conjecture 1 (en prenant, pour l'anneau local régulier, l'anneau local en un point d'une variété lisse, et en utilisant la propriété "$P_1$" évoquée plus loin), mais elle est, en même temps, beaucoup plus générale, car la situation n'est pas a priori définie sur un certain corps de base. Aujourd'hui, la conjecture 2 est toujours ouverte, tandis que la conjecture 1 a été montrée en 1990 par Jean-Louis Colliot-Thélène et Manuel Ojanguren ([CTO]). Ils ont montré plus précisément les résultats suivants :

Soit $k$ un corps, et soit $G$ un $k$-groupe linéaire lisse. On considère $G_{réd}$, le quotient de $G$ par son radical unipotent, $G^0_{réd}$ la composante neutre de $G_{réd}$, $G_{dér} = [G^0_{réd}, G^0_{réd}]$, et $G_{sc}$ le revêtement universel de $G_{dér}$. $G_{sc}$ s'écrit comme un produit sur $k$ de $k$-groupes presque-$k$-simples. Appelons $(*)$ la condition que les groupes presque $k$-simples ci-dessus sont isotropes. On a :

**Théorème 1** Soit $k$ un corps infini. Soient $A$ un anneau local d'une variété lisse sur un corps $L$ contenant $k$, $K = \mathrm{Frac}(A)$, $G$ un $k$-groupe algébrique linéaire lisse, réductif si $k$ est non parfait, et vérifiant $(*)$. Alors $\mathrm{Ker}(H^1_{ét}(A,G_A) \to H^1_{ét}(K,G_K)) = \{0\}$.

**Théorème 2** Soit $k$ un corps parfait infini. Soient $A$ un anneau local d'une variété lisse sur $k$, $K = \mathrm{Frac}(A)$, et $G$ un $k$-groupe algébrique linéaire lisse. Alors $\mathrm{Ker}(H^1_{ét}(A,G_A) \to H^1_{ét}(K,G_K)) = \{0\}$.

Avant ces résultats, plusieurs cas bien plus particuliers avaient été traités. Ils faisaient intervenir soit une hypothèse plus particulière sur le groupe $G$, soit une hypothèse de petite dimension (dimension 1 ou 2) sur l'anneau $A$. Ces théorèmes-ci sont les premiers résultats réellement généraux sur ces conjectures. Toutefois, dans ces deux énoncés, une restriction est que le schéma en groupes $G_A$ provient d'un schéma en groupes sur $k$ par changement de base. Récemment, en 2009, des résultats plus généraux ont été montrés par I. Panin, A. Stavrova, et N. Vavilov ([PSV]).

## 3.2 Principe de la démonstration des théorèmes 1 et 2

**Principe de la preuve du théorème 1 :** On rappelle que la catégorie des ensembles pointés est la catégorie dont les objets sont les couples $(X,x)$, où $X$ est un ensemble et $x$ un élément (l'élément "distingué") de $X$, les morphismes $(X,x) \to (Y,y)$ sont les applications $X \to Y$ qui envoient $x$ sur $y$. Pour simplifier, les éléments distingués sont tous notés 0. Le noyau d'un morphisme est alors l'ensemble des éléments de $X$ s'envoyant sur 0. Il contient toujours 0 et il est dit trivial s'il est réduit au singleton $\{0\}$ (ce qui n'équivaut pas à l'injectivité du morphisme). Ici, on considère le foncteur $H^1_{ét}(.,G)$, de la catégorie des $k$-algèbres commutatives vers celle des ensembles pointés, qui à $A$ associe l'ensemble de cohomologie étale $H^1_{ét}(A, G_A)$ ($G_A = G \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(A)$).

**Théorème.** Soient $k$ un corps infini et $F$ un foncteur de la catégorie des $k$-algèbres commutatives vers la catégorie des ensembles pointés. Supposons que $F$ vérifie les propriétés suivantes :
($P_1$) $F$ commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux à morphismes de transition plats, (i.e. l'application canonique $\varinjlim_{i\in I} F(A_i) \to F(\varinjlim_{i\in I} A_i)$ est bijective pour tout système inductif filtrant $(A_i)_{i\in I}$ d'anneaux à morphismes de transition plats).
($P_2$) Pour tout corps $L$ contenant $k$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche $F(L[t_1, ..., t_n]) \to F(L(t_1, ..., t_n))$ a un noyau trivial.
($P_3$) Pour tout diagramme de $k$-algèbres
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \longrightarrow & B_f \end{array}$$
avec $A \to B$ une inclusion plate et de type fini d'anneaux noethériens intègres et $f$ non nul dans $A$, tel que la flèche induite $A/Af \to B/Bf$ soit un isomorphisme (un tel diagramme sera appelé diagramme de recollement), la flèche induite $\mathrm{Ker}(F(A) \to F(A_f)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(F(B) \to F(B_f))$ est une surjection.
Alors, pour tout corps $L$ contenant $k$ et toute $L$-algèbre locale $A$ essentiellement lisse i.e. qui est l'anneau local d'une variété algébrique lisse sur $L$), l'application $F(A) \to F(K_A)$ induite par l'inclusion de $A$ dans son corps des fractions $K_A$ a un noyau trivial.

Ce théorème est inspiré de méthodes existant en $K$-théorie, où des questions analogues existent à propos d'applications de la forme $F(A) \to F(K_A)$ (mais avec des foncteurs $F$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens).
Pour montrer ce théorème, on commence par se ramener au cas où $A$ est l'anneau local en un point fermé d'un espace affine, puis on montre la proposition plus générale suivante, par récurrence sur $d$ (et le théorème s'obtient ensuite en prenant $n = 0$) :

**Proposition** Soit $d \in \mathbb{N}$. Soit $F$ un foncteur vérifiant les propriétés ($P_1$), ($P_2$) et ($P_3$). Alors pour tout corps infini $L$, si $A = L[x_1, ..., x_d]_{\mathfrak{m}}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $L[x_1, ..., x_d]$, et $K_A = \mathrm{Frac}(A)$ alors, pour tout $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$, l'application $F(A[t_1, ..., t_n]) \to F(K_A(t_1, ..., t_n))$ a un noyau trivial.

Ainsi, le théorème 1 se ramène donc aux propriétés $P_1$, $P_2$ et $P_3$ dans le cas particulier du foncteur $H^1_{ét}(., G)$.

**Principe de la preuve du théorème 2 :** La démonstration du théorème 2 est plus subtile, car la propriété $P_2$ n'est pas vérifiée dans ce cadre et on ne peut pas appliquer le théorème ci-dessus. Toutefois, $P_2$ reste vraie en dimension 1 ; le théorème 2 se prouve alors par récurrence sur la dimension de $A$ où, pour l'hérédité, on doit faire intervenir des anneaux de dimension 1 pour appliquer $P_2$. On peut le faire grâce à l'hypothèse que le corps est parfait (en utilisant le théorème de l'élément primitif, on construit des systèmes générateurs particuliers de certains idéaux...) et grâce au résultat suivant :

**Théorème** Soit $k$ un corps et $B$ une $k$-algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Supposons que l'inclusion de $k$ dans $B/\mathfrak{n}$ est un isomorphisme. Soit $g \in B[t]$ un polynôme unitaire. Soit $G$ un $k$-groupe algébrique linéaire lisse et $E$ un torseur sur $\mathrm{Spec}(B[t])$ sous $G$, trivial sur $\mathrm{Spec}(B[t]_g)$. Alors $E$ est le changement de base d'un torseur sur $\mathrm{Spec}(B)$.

### 3.3 Les propriétés $P_1$, $P_2$ et $P_3$

**Reformulation de $P_1$, $P_2$ et $P_3$ dans le cas de $H^1_{ét}(.,G)$ :**
($P_1$) $H^1_{ét}(.,G)$ commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux à morphismes de transition plats, (i.e. l'application canonique $\varinjlim_{i\in I} H^1((A_i,G) \to H^1(\varinjlim_{i\in I} A_i, G)$ est bijective pour tout système inductif filtrant $(A_i)_{i\in I}$ d'anneaux à morphismes de transition plats).
($P_2$) Pour tout corps $L$ contenant $k$ et tout $n \in \mathbb{N}$, tout torseur sur $\mathbb{A}^n_L$ sous $G$ qui est trivial au point générique de $\mathbb{A}^n_L$ est trivial.
($P_3$) Pour tout diagramme de $k$-algèbres $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \longrightarrow & B_f \end{array}$ avec $A \to B$ une inclusion plate et de type fini d'anneaux noethériens intègres et $f$ non nul dans $A$, tel que la flèche induite $A/Af \to B/Bf$ soit un isomorphisme (un tel diagramme sera appelé diagramme de recollement), tout torseur sur $\mathrm{Spec}(B)$ sous $G$ dont la restriction à l'ouvert $D(f)$ est trivial est l'image d'un torseur sur $\mathrm{Spec}(A)$ sous $G$ dont la restriction à $D(f)$ est triviale.

$P_1$ **: $H^1$ commute aux limites projectives de schémas** C'est est la plus simple à montrer des trois propriétés. Dans [SGA4] elle est énoncée sans démonstration (exposé VII, remarque 5.14) dans un cadre beaucoup plus général ; et on peut en trouver une preuve dans [Mar].
Si $A$ est un anneau, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, l'anneau local du schéma $\mathrm{Spec}(A)$ au point $\mathfrak{p}$ est $A_\mathfrak{p} = \varinjlim_{f\notin\mathfrak{p}} A_f$ (pour tout $f \notin \mathfrak{p}$, $A_f$ est l'anneau correspondant à l'ouvert $D(f)$ de $\mathrm{Spec}(A)$ qui contient $\mathfrak{p}$). La propriété $P_1$ s'applique ; on obtient que si un torseur sur le schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est trivial au point $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire correspond à 0 dans $H^1(A_p, G \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A_p)))$, alors il est trivial sur un certain voisinage ouvert de $\mathfrak{p}$. (C'est essentiellement grâce à cela que la conjecture 2 implique la conjecture 1). Puisque tout schéma admet un recouvrement ouvert par des ouverts affines, on a plus généralement que si un torseur est trivial en un point d'un schéma alors il est trivial sur un voisinage ouvert de ce point.

$P_2$ **: torseurs génériquement triviaux sur des espaces affines** C'est la plus profonde des trois propriétés ; c'est seulement dans celle-là qu'intervient l'hypothèse d'isotropie $(*)$ ; c'est même seulement dans celle-là qu'intervient que le groupe est réductif. Plus précisément, $(*)$ intervient via le théorème suivant, dû à Raghunathan ([Rag]) :

**Théorème.** Soit $G$ un groupe lisse, connexe et réductif sur un corps $k$ et soit $k_s$ la clôture séparable de $k$. Si G vérifie l'hypothèse d'isotropie $(I)$, alors tout $G$-torseur sur $\mathbb{A}^d_k$ qui devient trivial sur $\mathbb{A}^d_{k_s}$, et qui est trivial en un point $k$-rationnel, est trivial.

Comme on l'a dit plus haut, en dimension 1, en revanche, la propriété $P_2$ ne nécessite pas $(*)$ ; on a plus précisément :

**Théorème.** Soient $k$ un corps, $G$ un groupe algébrique lisse réductif et connexe sur $k$. Alors l'application $H^1_{ét}(k[t], G) \to H^1_{ét}(k(t), G)$ a un noyau trivial.

Il existe des contre-exemples (voir par exemple [OS]) montrant qu'en dimension supérieure $P_2$ devient fausse si on enlève l'hypothèse $(*)$ (même en dimension 2) ; il y a donc là une limite de la méthode, elle ne semble pas pouvoir se passer de l'hypothèse $(*)$.

$P_3$ **: une propriété de descente des torseurs** Soit $G$ un $k$-schéma en groupes affine et plat. Notons, pour $R$ une $k$-algèbre commutative, $E_R$ la catégorie opposée de la catégorie des torseurs sur Spec($R$) sous $G_R$. Alors, avec les hypothèses de ($P_3$) on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_A & \longrightarrow & E_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{A_s} & \longrightarrow & E_{B_{f(s)}} \end{array}$$

Pour que $\mathrm{Ker}(H^1_{ét}(A,G) \to H^1_{ét}(A_s,G)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(H^1_{ét}(B,G) \to H^1_{ét}(B_{f(s)},G))$ soit surjective, il suffit que le carré ci-dessus soit un "carré cartésien" de foncteurs, i.e. que $E_A$ soit équivalente au "produit fibré" de $E_B$ et $E_{A_s}$ au-dessus de $E_{B_{f(s)}}$ (voir [Bas], p.9 pour les définitions formelles). On montre que c'est le cas d'abord en remplaçant $E_R$ par la catégorie plus simple $M_R$ des modules sur l'anneau $R$ ; ensuite, les équivalences de catégories obtenues stabilisent toutes les sous-catégories usuelles (un des deux sens est évident et l'autre sens découle des permanences de propriétés par descente fidèlement plate), en particulier la sous-catégorie $E(R)$.

La notion de module (ou de faisceau de modules) sur un schéma généralise celle de module sur un anneau. Les modules quasi-cohérents sont un type particulier de module ; sur un schéma affine Spec($A$), un module quasi-cohérent s'identifie à un module sur l'anneau $A$ ; sur un schéma quelconque $X$, la restriction d'un tel module à tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ s'identifie à un module sur $A$. On rappelle aussi qu'morphisme fidèlement plat de schémas est un morphisme plat et surjectif. On peut maintenant énoncer le théorème de D. Ferrand et M. Raynaud ([FR], appendice, proposition 4.2) qui constitue l'essentiel de la preuve de $P_3$ :

**Théorème.** Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$ deux schémas affines, $f : X' \to X$ un morphisme de schémas, $Y$ un sous-schéma fermé de $X$, $Y'$ l'image réciproque de $Y$ dans $X'$. On suppose que $f$ est fidèlement plat, que $f$ induit un isomorphisme $Y \simeq Y'$, et que l'idéal $I$ définissant $Y$ est de type fini. Notons $U = X - Y$, $U' = X' - Y'$, $j : U \to X$ $j' : U' \to X'$ les immersions ouvertes, $g : U' \to U$ la restriction de $f$ à $U'$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xrightarrow[j]{} & X \end{array}$$

Enfin, notons $M(S)$ la catégorie des $O_S$-modules quasi-cohérents pour tout schéma $S$. Alors le carré

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{j^*} & M(U) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ M(X') & \xrightarrow[j'^*]{} & M(U') \end{array}$$

est cartésien.

S. M. Bhatwadekar prouve aussi un théorème analogue ([Bha], theorem 2.4), avec des hypothèses bien plus particulières sur les schémas, mais sans supposer f fidèlement plat ni même plat ; L. Moret-Bailly a montré que le théorème de Bhatwadekar découle en fait de celui de Ferrand et Raynaud. Toutefois, le cadre du théorème de Bhatwadekar est plus proche de l'application aux torseurs et donne des conditions suffisantes concrètes à l'application de ce théorème.

**Remerciements**

Je remercie Philippe Gille, pour la disponibilité et la patience avec lesquelles il m'a guidé dans ce travail.

## Références

[Bas] H. Bass, *Algebraic K-theory*, New York, Benjamin, (1968).

[Bha] S. M. Bhatwadekar, *Analytic isomorphisms and category of finitely generated modules*, Comm. in Algebra, 16 (1988), p.1949-1958.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren, *Espaces principaux homogènes localement triviaux*, I.H.E.S. Publ. Math. 75 (1992), 97-122.

[FR] D. Ferrand, M. Raynaud, *Fibres formelles d'un anneau local noethérien* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4 série, 3 (1970), 295-311.

[Hart] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer- Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Mil] J. Milne, *Etale cohomology*, Princeton University Press, 1980

[OS] M. Ojanguren, R. Sridharan, *Cancellation of Azumaya algebras*, Journal of algebra **18**, p.501-505 (1971)

[PSV] I.Panin, A.Stavrova, N.Vavilov, *On Grothendieck-Serre's conjecture concerning principal G-bundles over reductive group schemes : I* (2009)

[Rag] M. S. Raghunathan, *Principal bundles on affine space and bundles on the projective line* Math. Annalen, **285** (1989), p.309-332.

[Rom] M. Romagny, *A straight way to algebraic stacks*, notes de séminaire

[SGA4] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S, 1963-1964, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier*, Lecture Notes in Math. **269**(t.1), **270**(t.2), **305** (t.3). Springer-Verlag.

[Sza] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **117**, Cambridge University Press (2009)