

# Structures de régularité et renormalisation de l'équation KPZ

Introduction au domaine de recherche

Henri Elad Altman

sous la direction de Lorenzo Zambotti

Octobre 2015

## Résumé

La théorie des structures de régularité a été inventée par Martin Hairer en 2013, afin de donner un cadre mathématique permettant de donner un sens rigoureux à une grande classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) semilinéaires mal posées, et de les résoudre. Le but de ce mémoire est de présenter les articulations majeures de cette théorie, en exposant les idées et les théorèmes essentiels sur lesquels elle repose. L'exemple de la renormalisation de (KPZ), étudié pendant mon stage de M2, est donné à titre d'illustration.

Le mémoire est organisé comme suit : on expose d'abord un bref historique des théories utilisées jusqu'à présent pour résoudre des EDPS semilinéaires mal posées (Section 1), puis on esquisse la méthodologie générale de la théorie des structures de régularité (Section 2). On introduit ensuite les concepts centraux de la théorie (Section 3). Les trois dernières sections exposent les trois grandes étapes de la résolution d'une EDPS mal posée (avec une étape algébrique, une étape analytique, puis une étape probabiliste).

## Remerciements

Je tiens à remercier Lorenzo Zambotti, qui a gentiment accepté de diriger mon stage de recherche de M2, pour sa patience et pour le temps précieux qu'il m'a accordé. Un grand merci également à Nicolas Curien, qui m'a aidé à trouver ce stage

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Qu'est-ce qu'une EDPS mal posée ? . . . . .	2
1.2	Exemples d'EDPS mal posées . . . . .	2
1.3	Approches passées et présentes pour la résolution d'EDPS mal posées . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Théorie des structures de régularité : idée et méthodologie générale</b>	<b>4</b>
2.1	Idée fondamentale de la théorie : développement local de solutions . . . . .	4
2.2	Méthodologie générale . . . . .	5
2.3	Exemple de résultat . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Structures de régularités et modèles</b>	<b>5</b>
3.1	Propriétés algébriques des développements de Taylor . . . . .	5
3.2	Définition d'une structure de régularité . . . . .	6
3.3	Un exemple : la structure de régularité polynomiale . . . . .	6
3.4	Modèles pour une structure de régularité . . . . .	6
3.5	Un exemple : le modèle polynomial . . . . .	7

<b>4</b>	<b>Prédistributions et théorème de reconstruction</b>	<b>8</b>
4.1	Prédistributions . . . . .	8
4.2	Enoncé du théorème de reconstruction . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Problème de point fixe associé à une EDP parabolique semi-linéaire</b>	<b>10</b>
5.1	Construction de l'espace de modèles . . . . .	10
5.2	Sous-criticalité . . . . .	10
5.3	Construction du groupe de structure . . . . .	11
5.4	Point fixe abstrait . . . . .	11
5.5	Résolution du problème de point fixe . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Renormalisation</b>	<b>12</b>
6.1	Procédé général . . . . .	12
6.2	Exemple : la renormalisation de l'équation KPZ . . . . .	14
6.3	Question ouverte : structures de régularité et temps locaux . . . . .	16

# 1 Introduction

## 1.1 Qu'est-ce qu'une EDPS mal posée ?

Considérons une EDPS du type :

$$\partial_t u = \Delta u + F(u, \nabla u, \xi) \tag{1}$$

où :

- $F$  est une fonction *non linéaire* de  $u$  et des dérivées d'ordre 1 de  $u$ .
- $\xi$  est une distribution *très irrégulière*, par exemple un bruit blanc gaussien

Cette EDPS est dite mal posée si la régularité attendue d'une solution  $u$  n'est pas suffisante pour que l'expression  $F(u, \nabla u, \xi)$  soit bien définie.

Concrètement, si deux distributions  $u$  et  $v$  ne sont pas assez régulières, leur produit n'est pas bien défini, comme l'exprime le théorème suivant (cf [4], Prop 4.14) :

**Théorème 1.** *Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . La multiplication classique  $(f, g) \rightarrow fg$  s'étend en une application bilinéaire continue  $\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta \rightarrow \mathcal{C}^{\alpha \wedge \beta}$  si  $\alpha + \beta > 0$ . De plus, si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , cette condition est nécessaire.*

Ici les espaces  $\mathcal{C}^\alpha$  sont une généralisation pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  des espaces  $\mathcal{C}^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) (cf. Définition 2.1 ci-dessous). Par conséquent, comme  $F$  est non linéaire, si  $u$  est une distribution trop irrégulière, il peut arriver que  $F(u, \nabla u, \xi)$  soit mal posée. Les théories classiques de résolution d'EDP ne permettent alors pas de donner un sens rigoureux aux solutions de l'équation (1).

## 1.2 Exemples d'EDPS mal posées

Elles proviennent principalement de domaines de la physique (physique statistique, mécanique quantique) décrivant des systèmes microscopiques. Des exemples sont :

- l'équation KPZ, en dimension  $d = 1 + 1$  (1 dimension temporelle, 1 dimension spatiale), donnée par

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \xi \tag{2}$$

Cette équation a été introduite en 1986 par M. Kardar, G. Parisi et Y-C. Zhang pour modéliser l'évolution d'une interface croissante (cf [5]). De telles interfaces apparaissent souvent en physique statistique (par exemple dans le modèle d'Ising) entre deux régions

dont l'une est plus stable que l'autre. Dans le cas de l'équation ci-dessus, l'interface est décrite par la courbe

$$C_t = \{(x, h(t, x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

qui évolue de manière croissante : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \rightarrow h(t, x)$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ . Le terme  $\xi$  représente un bruit blanc en espace-temps ou, de manière informelle, un processus gaussien de fonction de covariance donnée par :

$$\mathbb{E}\xi(t, x)\xi(s, y) = \delta(t - s)\delta(x - y)$$

où  $\delta$  représente la fonction de Dirac.

- l'équation  $\Phi_3^4$ , en dimension  $d = 1 + 3$ , et donnée par :

$$\partial_t \Phi = \Delta \Phi + \Phi^3 + \xi$$

où  $\xi$  est un bruit blanc gaussien en espace-temps. L'intérêt de cette équation réside dans sa mesure invariante, qui joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs

- l'équation du modèle d'Anderson parabolique, en dimension  $d = 1 + 2$ , et donnée par :

$$\partial_t u = \Delta u + \xi u$$

où  $\xi$  est un bruit blanc gaussien en espace. Cette équation décrit le mouvement d'une particule dans un environnement aléatoire.

### 1.3 Approches passées et présentes pour la résolution d'EDPS mal posées

Les EDPS considérées ci-dessus provenant de la physique, on cherche une notion de solution qui soit compatible avec la nature physique des problèmes considérés. Dans le cas de (KPZ), l'approche la plus utilisée pour parler de solution consiste historiquement à considérer l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\partial_t Z = \partial_x^2 Z + Z\xi$$

Cette équation est bien posée au sens d'Itô, avec une solution  $Z$  à valeurs strictement positives. De plus, si l'on pose  $h = \log(Z)$ , alors, en utilisant les formules de dérivations usuelles, on constate que, formellement,  $h$  vérifie l'équation (2). Ce processus  $h$  s'appelle la solution Cole-Hopf de (KPZ). Cette méthode de résolution, proposée par L. Bertini et G. Giacomin en 1997 (cf [1]), a l'inconvénient de reposer sur un changement de variable non rigoureux (le terme d'Itô est ignoré). De plus, elle n'existe que pour l'équation (KPZ).

Des approches plus globales ont été proposées, notamment par la théorie des chemins rugueux (rough paths), introduites par T. Lyons dans les années 1990, et perfectionnée par la suite avec l'introduction de chemins rugueux contrôlés (controlled rough paths) par M. Gubinelli (cf [3] pour une présentation détaillée de cette théorie). Ces approches ont l'avantage de donner des résultats trajectoriels (contrairement à la théorie d'intégration d'Itô, par exemple). Cependant elles ne s'appliquent essentiellement qu'à des problèmes unidimensionnels.

La théorie des structures de régularité, qui s'inspire de la théorie des chemins rugueux (et la généralise), est, à ce jour, l'approche la plus globale et la plus systématique pour comprendre et résoudre des EDPS mal posées. Elle permet également d'étudier le comportement local des solutions.

## 2 Théorie des structures de régularité : idée et méthodologie générale

### 2.1 Idée fondamentale de la théorie : développement local de solutions

Une notion fondamentale pour cette théorie est la notion de régularité d'une distribution, formalisée par la famille des espaces  $\mathcal{C}^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Rappelons brièvement la définition de ces espaces.

**Notation 1.** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{B}_0^r$  l'ensemble des fonctions lisses sur  $\mathbb{R}^d$ , à support dans la boule unité de  $\mathbb{R}^d$ , et dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $r$  sont bornées par 1. Etant donné  $\varphi \in \mathcal{B}_0^r$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $\lambda \in (0, 1]$ , on note  $\varphi_x^\lambda$  la fonction donnée par :

$$\varphi_x^\lambda(y) = \varphi\left(\frac{y-x}{\lambda}\right)$$

**Définition 2.1.**<sup>1</sup> Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Si  $k < \alpha < k + 1$ , alors  $\mathcal{C}^\alpha$  est l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  fois différentiables, et dont les dérivées partielles d'ordre  $k$  sont localement  $\alpha - k$  hölderiennes.
- Si  $\alpha < 0$  : posons  $r = -[\alpha]$ . Alors  $\mathcal{C}^\alpha$  est l'espace des distributions  $\eta$  contenues dans le dual des fonctions de classes  $C^r$  à support compact, et telles que l'estimée :

$$\eta(\varphi_x^\lambda) \lesssim \lambda^\alpha$$

soit valable pour tout  $\lambda \in (0, 1]$  et tout  $\varphi \in \mathcal{B}_0^r$ , localement uniformément en  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Considérons par exemple l'équation (2). L'équation linéaire correspondante est l'équation de la chaleur stochastique :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \xi$$

Il est bien connu que la solution de cette dernière est dans  $\mathcal{C}^\alpha$  pour tout  $\alpha < \frac{1}{2}$ , mais pas dans  $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}$ . Par conséquent, a priori, la solution  $h$  (si elle existe) de l'équation (2) est de régularité strictement inférieure à  $\frac{1}{2}$ , de sorte que  $\frac{\partial h}{\partial x}$  est une distribution de régularité strictement inférieure à  $-\frac{1}{2}$ . En particulier, par le théorème 1, il n'y a pas de moyen canonique de définir le carré  $(\frac{\partial h}{\partial x})^2$ .

Le coeur du problème de l'équation KPZ réside donc dans la définition du terme quadratique  $(\frac{\partial h}{\partial x})^2$  : en toute abstraction, il est impossible de donner un sens canonique à cette expression. Cependant, puisque l'on considère  $h$  une solution de l'équation (2), il est raisonnable de penser que  $h$  puisse s'écrire, localement, comme une somme de termes obtenus à partir de  $\xi$  et du noyau de la chaleur par des opérations élémentaires (produit, dérivation, ...), du type :

$$(P' * \xi)^2$$

(où  $P'$  désigne la dérivée spatiale du noyau de la chaleur). Par conséquent, il suffit que l'on donne un sens à ces termes singuliers.

---

1. En réalité, les espaces  $\mathcal{C}^\alpha$  utilisés pour décrire la régularité d'une solution d'EDPS parabolique sont une variante de ceux présentés ci-dessus, la norme euclidienne étant remplacée par la distance parabolique. Nous négligeons cet aspect technique pour ne pas alourdir les définitions.

## 2.2 Méthodologie générale

La méthodologie générale de la théorie est la suivante :

1. Partie algébrique : construire une structure algébrique  $T$ , constituée de symboles abstraits, ainsi que des espaces de "polynômes de Taylor généralisés" à valeurs dans  $T$ , dans lesquels l'équation (2) puisse être encodée comme un problème de point fixe. Cette étape requiert d'encoder, de façon algébrique, certaines opérations analytiques telles que le produit, la dérivation, ou la convolution par le noyau de la chaleur.
2. Partie analytique : résoudre le problème de point fixe abstrait. On obtient ainsi une solution abstraite  $U$ , à valeurs dans la structure  $T$ . Celle-ci s'écrit localement comme une somme de symboles représentant les termes singuliers mentionnés ci-dessus.
3. Partie probabiliste : construction d'un modèle  $(\Pi, \Gamma)$ , permettant d'interpréter les symboles abstraits de l'espace  $T$  comme des vraies distributions. Le modèle  $(\Pi, \Gamma)$  est obtenu comme limite d'une suite de modèles renormalisés. C'est à cette étape que l'on donne un sens aux termes singuliers issus de l'équation initiale. La solution  $u$  de l'EDP initiale est alors obtenue comme la reconstruction de la solution  $U$  sous le modèle  $(\Pi, \Gamma)$  (cf. Théorème 3).

## 2.3 Exemple de résultat

Dans le cas de l'équation (2), la méthode décrite ci-dessus permet d'obtenir le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Notons  $\xi_\epsilon = \rho_\epsilon * \xi$  une régularisation du bruit blanc (où  $\rho_\epsilon$  est une approximation lisse du Dirac  $\delta_0$ ). Il existe une suite de constantes  $C_\epsilon > 0$  telles que la solution  $h_\epsilon$  de l'équation (bien posée)*

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 h_\epsilon}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h_\epsilon}{\partial x}\right)^2 + \xi_\epsilon - C_\epsilon \quad (3)$$

*converge en probabilité vers un processus limite  $h$ . De plus, les constantes  $C_\epsilon$  peuvent être choisies de telle manière que  $h$  ne dépende pas du choix de la fonction régularisante  $\rho$ . Enfin, presque-sûrement, on a  $h \in C^\alpha$  pour tout  $\alpha < \frac{1}{2}$ .*

Voir la Section 6.2 pour les arguments clés de la preuve.

## 3 Structures de régularités et modèles

### 3.1 Propriétés algébriques des développements de Taylor

La théorie des structures de régularité est une généralisation de la théorie des développements de Taylor. Cette dernière repose sur trois ingrédients essentiels. Premièrement, on a un espace de polynômes,  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$ , qui a pour base l'ensemble des monômes  $\{X^k, k \in \mathbb{N}^d\}$ . Deuxièmement, on a un ensemble d'indices,  $A = \mathbb{N}$ , qui permet de graduer les monômes : au monôme  $X^k$  on associe le degré  $|k| = k_1 + \dots + k_d$ . Enfin, étant donnés deux points  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , un développement de Taylor au point  $x$  peut être redéveloppé autour du point  $y$ , selon la formule

$$(z - x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (y - x)^{m-k} (z - y)^k \quad (4)$$

Autrement dit, on a un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$  donné par :

$$\Gamma_{yx} : X^k \rightarrow (X + y - x)^k$$

qui transforme un développement de Taylor au point  $x$  en un développement de Taylor au point  $y$ .

## 3.2 Définition d'une structure de régularité

La notion de structure de régularité généralise les propriétés algébriques des polynômes décrites ci-dessus. Elle permet de considérer des développements de Taylor généralisés, pouvant approximer des distributions plus générales que les fonctions lisses (cf. section 4.1).

**Définition 3.1.** Une structure de régularité  $\mathcal{S}$  est un triplet  $(A, T, G)$  où :

- $A$  est une partie discrète, minorée de  $\mathbb{R}$ , contenant 0 :
- $T$  est un espace vectoriel gradué par  $A$ , i.e. il existe des espaces vectoriels  $T_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) tels que  $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ . De plus, chaque  $T_\alpha$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|_\alpha$  qui en fait un espace de Banach.
- $G$  est un sous-groupe du groupe  $\mathcal{L}(T, T)$  des automorphismes de  $T$ . De plus, on impose que, pour tout  $\Gamma \in G$ , tout  $\alpha \in A$  et tout  $a \in T_\alpha$ , on ait :

$$\Gamma a - a \in \bigoplus_{\substack{\zeta \in A \\ \zeta < \alpha}} T_\zeta \quad (5)$$

On appelle  $A$  l'ensemble d'indices,  $T$  l'espace de modèles, et  $G$  le groupe de structure. Un élément  $\tau \in T$  est dit homogène s'il appartient à  $T_\alpha$  pour un certain  $\alpha \in A$ . Dans ce cas,  $\alpha$  est l'homogénéité de  $\tau$ , ce qui se note  $|\tau| = \alpha$ .

## 3.3 Un exemple : la structure de régularité polynomiale

$T$  doit être vu comme un espace de "polynômes de Taylor généralisés" gradués par l'ensemble  $A$ . L'exemple fondamental de structure de régularité est la structure  $\overline{\mathcal{S}} = (\overline{A}, \overline{T}, \overline{G})$  correspondant aux polynômes classiques :

- l'ensemble d'indices est donné par  $\overline{A} = \mathbb{N}$
- l'espace de modèles est l'espace  $\overline{T} = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$  gradué par le degré.<sup>2</sup> On a alors :

$$\overline{T} = \bigoplus_{\alpha \in \overline{A}} \overline{T}_\alpha$$

- où  $\overline{T}_\alpha$  est le sous-espace de  $\overline{T}$  engendré par les monômes  $X^k$  avec  $|k| = \alpha$
- le groupe de structure  $\overline{G}$  est donné par  $\mathbb{R}^d$  agissant sur  $\overline{T}$  comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall k \in \mathbb{N}^d, x \cdot X^k = (x\mathbf{1} + X)^k \quad (6)$$

(on note  $\mathbf{1}$  le polynôme constant égal à 1).

Une structure de régularité  $(A, T, G)$  n'est qu'un objet abstrait, qui n'a d'utilité que s'il est muni d'un modèle donnant un sens analytique aux symboles de l'espace  $T$ .

## 3.4 Modèles pour une structure de régularité

**Définition 3.2.** Soit  $\mathcal{S} = (A, T, G)$  une structure de régularité, et  $r$  le plus petit entier tel que  $\min A > -r$ . Un modèle pour  $\mathcal{S}$  est un couple  $(\Pi, \Gamma)$  constitué :

- d'une famille  $\Pi = (\Pi_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  d'applications linéaires de  $T$  dans l'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^d$ .
- d'une application  $\Gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow G$ .

---

2. Dans l'étude de problèmes paraboliques, il faudrait en fait considérer une graduation parabolique des polynômes. Là encore, nous négligeons délibérément cet aspect technique.

vérifiant, pour tous  $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ , les relations algébriques :

$$\Pi_x \Gamma_{xy} = \Pi_y, \quad \Gamma_{xy} \Gamma_{yz} = \Gamma_{xz} \quad (7)$$

ainsi que les estimées (analytiques) suivantes : pour tout  $\alpha > 0$  et tout compact  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$ , il existe  $C, C' > 0$  tels que :

$$|\Pi_x \tau(\varphi_x^\lambda)| \leq C \|\tau\|_\beta \lambda^\beta, \quad \|\Gamma_{xy} \tau\|_\gamma \leq C' \|\tau\|_\beta \|x - y\|^{\beta - \gamma} \quad (8)$$

pour tous  $\gamma, \beta \in A$  tels que  $\gamma < \beta < \alpha$ , tout  $\tau \in T_\beta$ , tous  $x, y \in \mathfrak{K}$ , tout  $\lambda \in (0, 1]$  et tout  $\varphi \in \mathcal{B}_0^r$ . Si  $(\Pi, \Gamma)$  est un modèle pour  $\mathcal{S}$ , alors pour tout  $\alpha > 0$  et tout compact  $\mathfrak{K}$  de  $\mathbb{R}^d$  on note  $\|\Pi\|_{\alpha, \mathfrak{K}}$  la plus petite constante  $C$  satisfaisant la première estimée de (8). De même, on note  $\|\Gamma\|_{\gamma, \mathfrak{K}}$  la plus petite constante  $C'$  satisfaisant la seconde estimée de (8)

Etant donné un modèle  $(\Pi, \Gamma)$  pour  $\mathcal{S}$ , les opérateurs  $\Pi_x (x \in \mathbb{R}^d)$  donnent donc, en chaque point  $x \in \mathbb{R}^d$ , une interprétation de tout vecteur  $\tau \in T$  comme distribution. L'homogénéité de  $\tau$  correspond à l'ordre d'annulation (éventuellement négatif) de la distribution  $\Pi_x \tau$  au point  $x$ . Les opérateurs  $\Gamma_{xy}$  décrivent la manière dont se comportent les développements de Taylor généralisés sous translation du point de base  $x \rightarrow y$  (cf. section 4).

**Remarque 1.** De façon informelle, la première estimée de (8) peut se formuler de la manière suivante :

$$|\Pi_x \tau(y)| \lesssim C \|\tau\|_\beta \|x - y\|^\beta$$

pour tout  $y$  au voisinage de  $x$ . Cependant, en général,  $\Pi_x \tau$  n'est pas une fonction, mais une distribution, de sorte que  $\Pi_x \tau(y)$  n'est pas définie : c'est pourquoi l'on a recours à la formulation, moins concise, donnée en (8).

**Remarque 2.** La deuxième estimée est motivée par la remarque suivante : si l'on redéveloppe la fonction  $z \rightarrow (z - x)^k$  au point  $y$ , par (4), le coefficient d'ordre  $l$  du polynôme de Taylor ainsi obtenu est

$$\binom{k}{l} (y - x)^{k-l}$$

qui est de l'ordre de  $\|y - x\|^{|k| - |l|}$ .

**Remarque 3.** Dans la pratique, quand on étudie une EDPS singulière du type (1), la structure de régularité  $\mathcal{S}$  est fixée, tandis que le modèle  $(\Pi, \Gamma)$  dont on munit cette dernière est aléatoire. Il est donc essentiel de munir l'ensemble  $\mathcal{M}_\mathcal{S}$  des modèles pour  $\mathcal{S}$  d'une topologie. Pour cela, on considère le système de pseudo-métriques  $\|\cdot\|_{\alpha, \mathfrak{K}}$  définies, pour tout compact  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$  et  $\alpha > 0$ , par :

$$\|\|Z; \bar{Z}\|_{\alpha, \mathfrak{K}} := \|\Pi - \bar{\Pi}\|_{\alpha, \mathfrak{K}} + \|\Gamma - \bar{\Gamma}\|_{\alpha, \mathfrak{K}}$$

pour tous modèles  $Z = (\Pi, \Gamma)$  and  $\bar{Z} = (\bar{\Pi}, \bar{\Gamma})$  de  $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ .

**Remarque 4.** A cause des relations (7), l'espace  $\mathcal{M}_\mathcal{S}$  n'est pas un espace vectoriel. Cette non-linéarité est essentielle à la théorie des structures de régularité, car elle permet d'effectuer le procédé de renormalisation.

### 3.5 Un exemple : le modèle polynomial

Le modèle naturel  $(\bar{\Pi}, \bar{\Gamma})$  pour la structure de régularité polynomiale  $\bar{\mathcal{S}}$  est le modèle polynomial défini comme suit :

- pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $k \in \mathbb{N}^d$ ,  $\bar{\Pi}_x X^k$  est donné par la fonction

$$y \rightarrow (y - x)^k := (y_1 - x_1)^{k_1} \cdots (y_d - x_d)^{k_d}$$

– pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^d$  et  $k \in \mathbb{N}^d$  :

$$\bar{\Gamma}_{xy} X^k = (x - y) \cdot X^k = ((x - y)\mathbf{1} + X)^k$$

**Proposition 1.**  $(\bar{\Pi}, \bar{\Gamma})$  définit bien un modèle pour  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Les relations algébriques (7) se déduisent immédiatement des définitions de  $\bar{\Pi}$  et  $\bar{\Gamma}$ . Pour la première estimée dans (8), il suffit de constater que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^d$  et tous  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , on a :

$$|\Pi_x(X^k)(y)| = |(y - x)^k| \leq \|y - x\|^{|k|}$$

(l'inégalité se déduit de la concavité de la fonction logarithme). La seconde estimée dans (8) a été prouvée dans la remarque 2.  $\square$

## 4 Prédistributions et théorème de reconstruction

### 4.1 Prédistributions

Soit  $\gamma > 0$ , et  $f \in \mathcal{C}^\gamma$ . En chaque point  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f(z)$  possède un développement de Taylor

$$\sum_{|k| < \gamma} \frac{D^k f(x)}{k!} (z - x)^k$$

On peut ainsi représenter le développement de Taylor de  $f$  comme une application  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{T}$ , qui au point  $x$  associe le polynôme  $\sum_{|k| < \gamma} \frac{D^k f(x)}{k!} X^k$ .

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Peut-on déduire  $F(y)$  facilement à partir de  $F(x)$ ? Dans le cas où  $F$  est polynomiale, on a la relation :

$$F(x) = \bar{\Gamma}_{xy} F(y)$$

Cependant, cette égalité est fautive pour une fonction  $f$  plus générale. Par exemple, la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (9)$$

est infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Cependant on a  $F(x) = 0$  pour tout  $x \leq 0$ , mais  $F(x) \neq 0$  pour tout  $x > 0$ .

Toutefois, si  $y$  est proche de  $x$ ,  $\bar{\Gamma}_{xy} F(y)$  donne une bonne approximation de  $F(x)$  au sens suivant :

**Proposition 2.** Soit  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$  un compact. Alors il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in \mathfrak{K}$ , et tout  $\alpha < \gamma$ , on a :

$$\|F(x) - \bar{\Gamma}_{xy} F(y)\|_\alpha \leq C \|x - y\|^{\gamma - \alpha}$$

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}^d$  tel que  $|k| = \alpha$ . Alors le coefficient d'ordre  $k$  du polynôme  $F(x) - \bar{\Gamma}_{xy} F(y)$  est donné par :

$$\frac{1}{k!} \left( D^k f(x) - \sum_{|k|+|l| < \gamma} \frac{D^{k+l} f(y)}{l!} (x - y)^l \right)$$

On reconnaît ici (à un facteur multiplicatif près) le reste de Taylor au point  $y$  de la fonction  $D^k f$ . Comme  $f$  est dans  $\mathcal{C}^\gamma$ , cette dernière est dans  $\mathcal{C}^{\gamma - |k|}$ , de sorte que l'expression ci-dessus est dominée, pour  $x$  et  $y$  proches, par  $\|x - y\|^{\gamma - |k|}$ . Cela donne l'estimée voulue.  $\square$

La proposition ci-dessus motive la définition suivante :



**Définition 4.1.** Soit  $\mathcal{T} = (A, T, G)$  une structure de régularité munie d'un modèle  $(\Pi, \Gamma)$ . Soit  $\gamma > 0$ . On note  $\mathcal{D}^\gamma$  l'ensemble des applications  $\mathbb{R}^d \rightarrow T$  telles que, pour tout compact  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$ , les quantités

$$\|f\|_{\gamma, \mathfrak{K}} := \sup_{\alpha < \gamma} \sup_{x \in \mathfrak{K}} \|f(x)\|_\alpha$$

ainsi que

$$\|f\|_{\gamma, \mathfrak{K}} := \|f\|_{\gamma, \mathfrak{K}} + \sup_{\alpha < \gamma} \sup_{x \neq y \in \mathfrak{K}} \frac{\|f(x) - \Gamma_{xy} f(y)\|_\alpha}{\|x - y\|_s^{\gamma - \alpha}}$$

sont finies.

On appelle les éléments de  $\mathcal{D}^\gamma$  des pré-distributions ( "modeled distributions" en anglais). Ils correspondent à des développements de Taylor généralisés.

Considérons par exemple la structure de régularité polynomiale  $\overline{\mathcal{T}}$  munie de son modèle polynomial  $(\overline{\Pi}, \overline{\Gamma})$ . Alors, pour tout  $\gamma > 0$ , par la Proposition 2, le développement de Taylor fournit une application linéaire  $\mathcal{T} : \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathcal{D}^\gamma$ . En fait on a :

**Proposition 3.** *L'application  $\mathcal{T} : \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathcal{D}^\gamma, f \rightarrow F$  est bijective.*

*Démonstration.* Une fonction  $f \in \mathcal{C}^\gamma$  est donnée par le coefficient d'ordre 0 de son développement de Taylor  $F$ , donc l'application  $\mathcal{T}$  est injective. Soit maintenant  $F \in \mathcal{D}^\gamma$ , et notons

$$f : x \rightarrow \langle \mathbf{1}, F(x) \rangle$$

le coefficient d'ordre 0 de  $F$ . Soit  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$  un compact, et  $x, y \in \mathfrak{K}$ . En notant  $P_y$  la fonction polynômiale définie par :

$$P_y(x) = \langle \mathbf{1}, \Gamma_{xy} F(y) \rangle$$

on a :

$$|f(x) - P_y(x)| \leq \|f\|_{\gamma, \mathfrak{K}} \|x - y\|^\gamma$$

Il est alors facile de vérifier que  $f \in \mathcal{C}^\gamma$  et  $F$  fournit le développement de Taylor de  $f$ . Donc  $\mathcal{T}$  est surjective.  $\square$

## 4.2 Enoncé du théorème de reconstruction

Soit maintenant  $\mathcal{T}$  une structure de régularité quelconque, et  $(\Pi, \Gamma)$  un modèle pour  $\mathcal{T}$ . Etant donné  $\gamma > 0$  et  $F \in \mathcal{D}^\gamma$ , existe-t-il une fonction (ou une distribution)  $f$  dont  $F$  soit le "développement de Taylor généralisé" en chaque point ? La réponse est donnée par le théorème suivant, énoncé et prouvé par M. Hairer en 2013 (cf [4], Théorème 3.10) .

**Théorème 3** (Théorème de reconstruction). *Soit  $\mathcal{T} = (A, T, G)$  une structure de régularité munie d'un modèle  $(\Pi, \Gamma)$ . Soit  $\alpha = \min A$ , et soit  $r > |\alpha|$  un entier fixé. Alors, pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , il existe une application linéaire continue  $\mathcal{R} : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{C}^\alpha$  telle que, pour tout compact  $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$ , il existe une constante  $C$  dépendant uniquement de  $\mathcal{T}$ ,  $\gamma$  et  $\mathfrak{K}$ , vérifiant :*

$$|(\mathcal{R}f - \Pi_x f(x))(\varphi_x^\delta)| \leq C \delta^\gamma \|\Pi\|_{\gamma; \overline{\mathfrak{K}}} \|f\|_{\gamma; \overline{\mathfrak{K}}} \quad (10)$$

pour tous  $\varphi \in \mathcal{B}_0^r$ ,  $\delta \leq 1$ ,  $f \in \mathcal{D}^\gamma$  et  $x \in \mathfrak{K}$ . Ici  $\overline{\mathfrak{K}}$  désigne  $\{x : d(x, K) \leq \mathfrak{K}\}$ . Si  $\gamma > 0$  un tel  $\mathcal{R}$  est unique, et on l'appelle l'opérateur de reconstruction sous  $\gamma$ .

*Démonstration.* La preuve de l'unicité dans le cas  $\gamma > 0$  est facile : c'est une conséquence immédiate de l'inégalité (10). La preuve de l'existence est beaucoup plus complexe, et repose sur le résultat de Daubechies de 1988, prouvant l'existence d'une base d'ondelettes à support compact et de classe  $\mathcal{C}^r$ , pour tout  $r > 0$  (cf [2], Chapitre 6).  $\square$

**Remarque 5.** Le théorème de reconstruction est fondamental, car il permet de recoller des développements de Taylor généralisés donnant des comportements locaux, pour *reconstruire* une distribution globale admettant ces développements en chaque point. Cela permet, à partir de la solution d'un problème de point fixe encodé au niveau abstrait, d'obtenir une "vraie" distribution solution d'une certaine EDP.

## 5 Problème de point fixe associé à une EDP parabolique semi-linéaire

Dans la suite, pour simplifier, on suppose que la non-linéarité  $F$  de l'équation (1) est de la forme

$$F(u, \nabla u, \xi) = Q(u, \nabla u) + \xi$$

où  $Q$  est une fonction polynômiale. L'équation (1) peut alors se réécrire comme :

$$u = P * \left( \mathbf{1}_{t>0}(Q(u, \nabla u) + \xi) \right) + P_t * u_0 \quad (11)$$

où  $P$  désigne le noyau de la chaleur :

$$P(t, x) = \frac{\mathbf{1}_{t>0}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

et  $P_t$  est la fonction sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  donnée par  $P_t(x) := P(t, x)$ .

### 5.1 Construction de l'espace de modèles

On dispose d'un algorithme (cf [4], Section 8) qui permet de construire une structure de régularité  $\mathcal{S} = (A, T, G)$  dans laquelle l'EDP (11) admette une reformulation abstraite. Pour ce faire, on construit d'abord l'ensemble  $\mathcal{F}_Q$  des symboles de base nécessaires à la reformulation de cette équation.

L'ensemble  $\mathcal{F}_Q$  est construit par induction. On impose d'abord qu'il contienne le symbole  $\Xi$ , représentant le bruit blanc  $\xi$  et d'homogénéité  $\alpha$  pour un  $\alpha < -\frac{d+1}{2}$ , ainsi que les monômes  $X^k$  affectés de l'homogénéité donnée par leur degré. Ces symboles constituent les briques élémentaires de la reformulation algébrique de notre EDP.

Ensuite, à chaque étape, selon la structure du polynôme  $Q$ , on ajoute des nouveaux symboles à partir de ces briques élémentaires. Par exemple, étant donnés deux symboles  $\tau$  et  $\sigma$ , on pourra rajouter leur produit  $\tau\sigma$ , d'homogénéité  $|\tau| + |\sigma|$ . De même, étant donné un symbole  $\tau$ , on pourra rajouter sa dérivée par rapport à  $x_i$ ,  $\mathcal{D}_i\tau$ , nouveau symbole d'homogénéité  $|\tau| - 1$ . L'ensemble  $A$  est alors défini comme l'ensemble des homogénéités d'éléments de  $\mathcal{F}_Q$ , et l'espace  $T$  est construit comme l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{F}_Q$ .

### 5.2 Sous-criticalité

Le couple  $(A, T)$  ainsi obtenu a toutes les propriétés requises pour donner lieu à une structure de régularité, sauf éventuellement le caractère minoré et discret de l'ensemble d'indices  $A$ . Pour que ces propriétés soit vérifiées, il est crucial que l'EDP initiale satisfasse l'hypothèse de sous-criticalité locale suivante :

**Hypothèse 1** (Sous-criticalité locale). Dans l'expression formelle de  $Q(u, \nabla u)$ , on effectue les substitutions suivantes :

- si  $\alpha + 2 \leq 0$ , alors on remplace  $u$  par la variable muette  $U$ , à laquelle on attribue l’homogénéité  $\alpha + 2$
- pour tout  $i \in \{2, \dots, d\}$ , si  $\alpha + 2 \leq 1$ , alors on remplace  $\partial_i u$  par la variable muette  $P_i$ , d’homogénéité  $\alpha + 1$

On suppose que chaque monôme composant  $Q(u, \nabla u)$  est de la forme  $U^q P^k$  pour  $q \in \mathbb{N}$  et  $k = (k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^{d-1}$  vérifiant

$$q(\alpha + 2) + \sum_{i=2}^d k_i(\alpha + 1) > \alpha$$

(autrement dit, l’homogénéité totale de  $U^q P^k$  est strictement supérieure à celle de  $\Xi$ ).

L’interprétation physique de cette hypothèse est le fait que, aux petites échelles, la contribution des termes non-linéaires dans le membre de droite de l’équation (1) est négligeable.

**Lemme 1.** *L’ensemble  $A$  est minoré et discret si l’EDP (11) vérifie l’hypothèse 1.*

*Démonstration.* Il s’agit de montrer que, sous l’hypothèse de sous-criticalité, dans la construction inductive de  $\mathcal{F}_Q$  décrite ci-dessus, à partir d’une certaine étape, l’homogénéité des symboles ajoutés est strictement croissante. Voir [4], Lemme 8.10, pour les détails de la preuve.  $\square$

En supposant l’hypthèse 1 vérifiée, on obtient donc un ensemble d’indices  $A$  et un espace de modèle  $T$ , qui sont les deux premiers ingrédients d’une structure de régularité.

### 5.3 Construction du groupe de structure

$T$  est muni du produit naturel induit par  $\mathcal{F}_Q$ , qui à deux symboles  $\tau$  et  $\sigma$  associe  $\tau\sigma$  (si ce dernier symbole n’est pas dans  $\mathcal{F}_Q$ , le produit vaut 0). En exhibant un coproduit  $\Delta$  sur  $T$ , ainsi qu’une algèbre de Hopf  $\mathcal{H}^+$  dont  $T$  est un comodule, on peut alors construire un groupe  $G$  d’automorphismes de  $T$  vérifiant la propriété (5) ( $G$  est obtenu en considérant le groupe des formes linéaires multiplicatives sur  $\mathcal{H}^+$ , lequel agit sur  $T$  de façon naturelle, cf [4], Definition 8.20).

### 5.4 Point fixe abstrait

On a ainsi une structure de régularité  $\mathcal{T}$  contenant les symboles nécessaires à la formulation de l’équation (11). On peut alors assembler ces symboles pour encoder l’expression  $Q(u, \nabla u)$ , l’opération de convolution par le noyau de la chaleur  $P*$ , ainsi que la condition initiale  $P_t * u_0$ .

**Proposition 4.** *Soit  $(\Pi, \Gamma)$  un modèle sur  $\mathcal{T}$ . On peut alors construire des opérateurs  $\mathcal{Q}$  et  $K$  sur les espaces  $\mathcal{D}^\alpha$  tels que :*

$$\mathcal{R}\mathcal{Q}(U, \mathcal{D}_i U) = Q(\mathcal{R}U, \nabla \mathcal{R}U)$$

et

$$\mathcal{R}K(U) = P * (\mathcal{R}U)$$

pour toute pré-distribution  $U$ .

De plus, pour toute distribution  $u_0$  sur  $\mathbb{R}^{d-1}$  et tout  $\gamma > 0$ , on peut construire un élément  $Pu_0$  de  $\mathcal{D}^\gamma$  vérifiant  $\mathcal{R}Pu_0(t, x) = (P_t * u_0)(x)$ .

*Démonstration.* La construction de  $\mathcal{Q}$  est immédiate : pour  $U \in \mathcal{D}^\gamma$ , on définit  $\mathcal{Q}(U)$  en faisant des sommes et des produits adéquats des termes  $U$  et  $\mathcal{D}_i U$  ( $1 \leq i \leq d$ ). La construction de  $Pu_0$  est aussi immédiate en prenant le développement de Taylor de cette fonction jusqu’à l’ordre  $\gamma$ . Par contre, la construction de l’opérateur  $K$  est plus complexe (cf. [4], Section 5).  $\square$

Etant donné  $\gamma > 0$ , on peut maintenant reformuler l'équation (11) en un problème de point fixe à valeurs dans  $\mathcal{D}^\gamma$  :

$$U = K\left(\mathbf{1}_{t>0}(\mathcal{Q}(U))\right) + Gu_0 \quad (12)$$

d'inconnue  $U \in \mathcal{D}^\gamma$ .

## 5.5 Résolution du problème de point fixe

On résout le problème ci-dessus pour des pré-distributions  $U$  périodiques d'ensemble de périodes  $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$  :

$$U(t, x) = U(t, x + v) \quad (13)$$

pour tous  $(t, x) \in \mathbb{R}^d$  et tout  $v \in \mathbb{Z}^{d-1}$

**Proposition 5.** *Supposons que la distribution  $u_0$  est périodique, d'ensemble de périodes  $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ . On suppose que  $F : \mathcal{D}^\gamma \rightarrow \mathcal{D}^{\bar{\gamma}}$  est lipschitzienne<sup>3</sup> et que  $\bar{\gamma} + 2 > \gamma$ . Alors il existe  $S > 0$  tel que l'équation (12) possède une unique solution périodique définie sur  $[0, S] \times \mathbb{R}^{d-1}$ , et vérifiant (13).*

*Démonstration.* Le coeur de la preuve repose sur le fait que l'espace des pré-distributions de  $\mathcal{D}^\gamma$  vérifiant (13) est un espace de Banach, et que  $F$  restreinte à une boule assez petite centrée autour de  $Gu_0$  définit une contraction. Voir [4], Section 7, pour les détails.  $\square$

**Remarque 6.** Sous les hypothèses ci-dessus, l'existence et unicité locale de l'équation (12) vaut pour tous les modèles de  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ . Seule la valeur de  $S$  et de la solution  $U$  dépend du modèle particulier dont on munit  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 7.** En fait les espaces  $\mathcal{D}^\gamma$  ne sont pas adaptés à la description de solutions d'EDP paraboliques, qui explosent lorsque  $t \rightarrow 0$ . Il faut considérer des espaces  $\mathcal{D}^{\gamma, \eta}$  de pré-distributions singulières en l'hyperplan  $\{t = 0\}$  (cf [4], section 6). Ici et dans la suite, nous omettons délibérément cette subtilité technique.

## 6 Renormalisation

### 6.1 Procédé général

En passant au niveau abstrait, on réussit donc à contourner la difficulté initiale (celle des produits mal définis), pour obtenir un problème de point fixe bien posé. Cependant, les notations sont trompeuses, car le problème (12) représente en réalité une famille infinie d'équations : pour chaque choix de modèle  $(\Pi, \Gamma) \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ , la solution locale de (12) est différente. La question est donc : dans quel modèle pour  $\mathcal{F}$  faut-il résoudre cette équation ?

Régularisons d'abord le bruit blanc initial  $\xi$  en le convolant avec une approximation lisse du Dirac  $\rho_\epsilon$ . On obtient ainsi une fonction lisse  $\xi_\epsilon = \rho_\epsilon * \xi$ .

**Proposition 6.** *Il existe un moyen canonique d'associer, à chaque trajectoire de  $\xi_\epsilon$ , un modèle  $Z^\epsilon = (\Pi^\epsilon, \Gamma^\epsilon)$  tel que, si  $U_\epsilon$  est une solution locale de (12) pour  $Z^\epsilon$ , alors  $\mathcal{R}U_\epsilon = u_\epsilon$ , où  $u_\epsilon$  est une solution locale de l'EDP régularisée :*

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = \Delta_x u_\epsilon + Q(u_\epsilon, \nabla_x u_\epsilon) + \xi_\epsilon \quad (14)$$

---

3. voir [4], Section 7, pour le sens précis de cette hypothèse.

*Démonstration.* La difficulté principale dans la définition d'un modèle pour  $\mathcal{F}$  est de définir

$$\Pi_x^\epsilon(\tau\sigma)$$

pour deux symboles  $\tau, \sigma \in \mathcal{F}_Q$  dont la somme des homogénéités est négative. Ceci dit, cette difficulté n'existe plus pour un bruit  $\xi_\epsilon$  lisse, puisqu'on peut alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , définir inductivement  $\Pi_x^\epsilon(\tau)$  comme une fonction continue, en posant  $\Pi_x \Xi = \xi_\epsilon$ ,  $\Pi_x^\epsilon(X^k)(y) = (y-x)^k$ , et, pour tous  $\tau, \sigma \in \mathcal{F}_Q$  :

$$\Pi_x^\epsilon(\tau\sigma) = \Pi_x^\epsilon(\tau)\Pi_x^\epsilon(\sigma)$$

où le membre de droite représente un produit (classique) de fonctions. Voir [4], section 8.2, pour la construction détaillée de  $Z^\epsilon$ .  $\square$

Grâce à la proposition ci-dessus, pour toute suite  $\xi_\epsilon$  de fonctions lisses approximant  $\xi$ , on obtient une suite de modèles  $Z^\epsilon \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ . En général, cette suite diverge dans  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Plus précisément, en général, les quantités :

$$\Pi_x^\epsilon \tau(\varphi) \tag{15}$$

pour  $\tau \in \mathcal{F}_Q$  d'homogénéité négative, et  $\varphi$  une fonction test, divergent lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Cette divergence est liée à la non continuité du produit sur  $\mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}^\beta$  pour  $\alpha + \beta \leq 0$  et  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , cf Th. 1. Pour obtenir une convergence, il faut donc effectuer une renormalisation, en soustrayant à chaque terme divergent du type (15) sa "partie singulière". On peut ainsi obtenir un automorphisme  $M_\epsilon : \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  tel que les modèles renormalisés  $\hat{Z}^\epsilon := M_\epsilon Z^\epsilon$  convergent dans  $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$  vers un certain modèle  $\hat{Z}$ .

**Remarque 8.** Les automorphismes de renormalisation  $M_\epsilon$  dépendent du choix de fonction régularisante  $\rho_\epsilon$ . En revanche, un choix judicieux pour les  $M_\epsilon$  permet d'obtenir une limite canonique, indépendante du choix de  $\rho_\epsilon$ . Cependant, en général, cette dernière n'est pas l'unique limite qu'on peut obtenir par ce procédé : l'ensemble des modèles  $\hat{Z}$  ainsi obtenus décrit un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres.

Il n'y a à ce jour pas de méthode générale pour trouver la forme précise d'une transformation  $M_\epsilon$  convenable. Cependant, des travaux récents par Y. Brunet, M. Hairer et L. Zambotti suggèrent la conjecture suivante :

**Conjecture 1.** *Il existe un nombre fini d'automorphismes  $L_1, \dots, L_k : T \rightarrow T$  tels que :*

$$\forall \tau \in \mathcal{F}_Q, L_i \tau \in \bigoplus_{\zeta > |\tau|} T_\zeta \tag{16}$$

et tels que

$$M_\epsilon = \exp\left(-\sum_{i=1}^k c_i^\epsilon L_i\right)$$

fournit une bonne renormalisation, pour des constantes  $c_1^\epsilon, \dots, c_k^\epsilon$  bien choisies.

**Remarque 9.** Si  $L : T \rightarrow T$  est une application linéaire vérifiant (16), alors en particulier, comme  $A$  est discret, quitte à tronquer la structure de régularité  $\mathcal{F}$  à un degré  $r$  assez grand, on en déduit que  $L$  est nilpotent, de sorte que son exponentielle :

$$\exp(L) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k$$

est bien définie (la somme ci-dessus est en fait finie).

**Remarque 10.** La conjecture ci-dessus nous donne une forme a priori pour  $M_\epsilon$ , mais il reste encore à bien choisir les constantes  $c_i^\epsilon$ . Comme  $\xi$  est un bruit blanc gaussien, on a en général recours à une décomposition en chaos de Wiener de l'espace  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , qui permet de calculer la norme  $L^2$  d'une expression du type (15). Si cette norme diverge, un choix judicieux des  $c_i^\epsilon$  doit pouvoir compenser cette divergence, de façon à obtenir une convergence dans  $L^2$  des termes :

$$\hat{\Pi}_x^\epsilon \tau(\varphi)$$

pour le modèle renormalisé  $\hat{Z}^\epsilon = (\hat{\Pi}^\epsilon, \hat{\Gamma}^\epsilon)$ . Sous certaines conditions sur la vitesse de convergence (cf [4], Thm. 10.7), on peut en déduire la convergence en probabilités, dans  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ , de  $\hat{Z}^\epsilon$ .

## 6.2 Exemple : la renormalisation de l'équation KPZ

Le méthode présentée ci-dessus peut être appliquée à l'équation KPZ à conditions périodiques :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \xi \quad (17)$$

où  $\xi$  est un bruit blanc gaussien sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ , où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Proposition 7.** *L'équation (17) vérifie l'hypothèse de sous-criticalité*

*Démonstration.*  $\xi$  a régularité  $\alpha$  pour tout  $\alpha < -\frac{3}{2}$ . Fixons  $\alpha \in (-2, -\frac{3}{2})$ . Pour vérifier que l'équation est sous-critique, on effectue les substitutions décrites dans l'hypothèse 1 (Section 5.2). Comme  $\alpha + 1 < 0$ , le terme  $(\partial_x u)^2$  est formellement remplacé par la variable muette  $P^2$ , qui est d'homogénéité  $2(\alpha + 1)$ . Alors l'hypothèse 1 est équivalente à l'assertion  $2(\alpha + 1) > \alpha$ , i.e.  $\alpha > -2$ , qui est vraie par choix de  $\alpha$ .  $\square$

L'équation KPZ périodique est donc bien localement sous-critique, de sorte qu'on peut lui associer une structure de régularité  $\mathcal{T} = (A, T, G)$  selon l'algorithme expliqué dans la Section 5. Dans cette structure, l'EDP initiale peut être reformulée de la manière suivante :

$$U = K(\mathbf{1}_{t>0}((\mathcal{D}U)^2 + \Xi)) + Gu_0 \quad (18)$$

Ici  $\mathcal{D} : T \rightarrow T$  est un opérateur de dérivation abstrait, qui fait décroître l'homogénéité de 1. Notons que, pour des raisons techniques évoquées plus haut, cette équation n'est pas posée dans un espace  $\mathcal{D}^\gamma$ , mais dans un espace  $\mathcal{D}^{\gamma,\eta}$ , pour des paramètres  $\gamma$  et  $\eta$  bien choisis. Nous admettons la proposition suivante, qui est essentiellement une conséquence d'une variante de la Proposition (5) pour les espaces  $\mathcal{D}^{\gamma,\eta}$ .

**Proposition 8.** *Pour tout  $\gamma > |\alpha|$ ,  $\eta \in (0, \alpha + 2)$ , et  $u_0 \in \mathcal{C}^\eta(\mathbb{R})$  périodique de période 1, il existe un  $S > 0$  tel que le problème de point fixe (18) possède une unique solution 1-périodique  $U$  définie sur  $[0, S] \times \mathbb{R}$ .*

Pour tout  $\epsilon > 0$ , notons  $\xi_\epsilon = \rho_\epsilon * \xi$  une  $\epsilon$ -régularisation de  $\xi$ . Munissons  $\mathcal{T}$  des modèles  $Z^\epsilon$  définis à la section 6. Par la Proposition 6, en notant  $U_\epsilon$  une solution locale de (18), la fonction  $u_\epsilon = \mathcal{R}U_\epsilon$  est une solution locale de l'EDP :

$$\partial_t u_\epsilon = \partial_x^2 u_\epsilon + (\partial_x u_\epsilon)^2 + \xi_\epsilon$$

Pour la renormalisation des modèles  $Z^\epsilon$ , on part de la forme a priori :

$$M_\epsilon = \exp\left(-\sum_{i=0}^3 c_i^\epsilon L_i\right)$$

où les  $L_i$  sont certains endomorphismes de  $T$  vérifiant la propriété (16) (cf [3], Chapitre 15.5 pour la définition précise des  $L_i$ ). Pour tout  $\epsilon > 0$ , notons  $U_\epsilon$  une solution locale de l'équation (18), et notons  $\hat{u}_\epsilon = \mathcal{R}U_\epsilon$ . On a alors la propriété suivante :

**Proposition 9.** *La fonction  $\hat{u}_\epsilon$  est une solution locale de l'EDP renormalisée :*

$$\partial_t \hat{u}_\epsilon = \partial_x^2 \hat{u}_\epsilon + (\partial_x \hat{u}_\epsilon)^2 - 4c_0 \partial_x \hat{u}_\epsilon + (c_0^2 - c_1 - c_2 - 4c_3) + \xi_\epsilon \quad (19)$$

avec condition initiale  $\hat{u}_\epsilon(0, \cdot) = u_0$ .

*Démonstration.* Cela se démontre en appliquant l'opérateur de reconstruction  $\mathcal{R}$  (associé au modèle renormalisé  $\hat{Z}^\epsilon$ ) aux deux membres de l'équation (18). Voir [3], Chapitre 15.5.2, Proposition 15.12 pour les détails de la preuve.  $\square$

Maintenant que l'on a exhibé un "squelette" (algébrique) pour l'application de renormalisation  $M_\epsilon$ , reste à préciser les valeurs que doivent prendre les constantes  $c_i^\epsilon$  pour assurer la convergence des modèles renormalisés  $\hat{Z}^\epsilon$ . Cette partie, probabiliste, est résumée dans la proposition suivante :

**Proposition 10.** *Avec le choix  $c_0^\epsilon = 0$ , ainsi qu'un bon choix pour les paramètres  $c_i^\epsilon$  ( $i = 1, \dots, 3$ )<sup>4</sup>, on obtient la convergence en probabilité :*

$$\hat{Z}^\epsilon = M_\epsilon Z^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{Z}$$

où  $\hat{Z}$  est un modèle pour  $\mathcal{F}$  indépendant du choix particulier de fonction régularisante  $\rho$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, pour tout symbole  $\tau \in \mathcal{F}_Q$  d'homogénéité négative, tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et toute fonction test  $\varphi$ , la quantité :

$$\hat{\Pi}_x^\epsilon \tau(\varphi)$$

converge assez rapidement dans  $L^2$ , lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Pour cela, on utilise une décomposition de l'espace  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  (où  $\mathcal{A}$  désigne la tribu engendrée par le processus gaussien  $\xi$ ) en chaos de Wiener.  $\square$

On déduit de cette proposition le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** *La solution maximale  $\hat{u}_\epsilon$  de l'EDP renormalisée (19) converge en probabilité, pour la topologie de  $\mathcal{C}^\alpha$ , vers le processus  $\hat{u} = \mathcal{R}\hat{U}$ , où  $\hat{U}$  désigne la solution maximale du problème (18) pour le modèle limite  $\hat{Z}$ .*

*Démonstration.* De la convergence  $\hat{Z}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{Z}$ , on déduit que la suite des solutions du problème (18)  $\hat{U}_\epsilon$  converge en probabilité, dans  $\mathcal{D}^{\gamma, \eta}$ , vers  $\hat{U}$ . Par continuité de l'opérateur de reconstruction  $\mathcal{R}$ , on en déduit la convergence en probabilité, dans l'espace  $\mathcal{C}^\alpha$  :

$$\hat{u}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \hat{u}$$

On conclut en rappelant que, par la Proposition 9, la fonction  $\hat{u}_\epsilon$  est solution de l'équation (19).  $\square$

Pour résumer, en utilisant les structures de régularité, on a donc prouvé l'existence d'une suite  $C_\epsilon \sim \frac{1}{\epsilon}$  telle que la solution maximale de :

$$\partial_t \hat{u}_\epsilon = \partial_x^2 \hat{u}_\epsilon + (\partial_x \hat{u}_\epsilon)^2 + \xi_\epsilon - C_\epsilon$$

converge en probabilité vers un processus  $\hat{u} \in \mathcal{C}^\beta$  pour tout  $\beta < \frac{1}{2}$ . Ce processus est indépendant du choix de  $\rho$  : on l'appelle la solution de l'équation KPZ.

---

4. les  $c_i^\epsilon$  sont définis en fonction de  $\rho_\epsilon$ , cf [3], 15.5.3 pour la valeur précise.

### 6.3 Question ouverte : structures de régularité et temps locaux

Certaines EDPS avec réflexion présentent un phénomène de renormalisation entre des termes classiques et des termes de temps local. C'est le cas par exemple des  $\delta$ -processus de Bessel, avec  $\delta \in (0, 1)$ , qui sont solution de l'équation :

$$\rho_t = \rho_0 + B_t + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^{+\infty} (l_t^a - l_t^0) a^{\delta-2} da$$

où la famille de temps locaux  $(l^a)_{a \geq 0}$  vérifie :

$$\int_0^t \phi(\rho_s) ds = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(a) l_t^a a^{\delta-1} da$$

pour toute fonction borélienne  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  (voir [8]).

La question est : ce phénomène de renormalisation peut-il être vu dans les structures de régularité, en encodant les temps locaux de façon algébrique ?

## Références

- [1] Bertini L. and Giacomin G. : Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. Comm. Math. Phys., 183(3) : 571 - 607, 1997.
- [2] Daubechies I. : Ten lectures on wavelets, vol. 61 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia (1992)
- [3] Friz P. and Hairer M. : A Course on Rough Paths. With an introduction to Regularity Structures. Springer International Publishing Switzerland, 2014.
- [4] Hairer, M. : A theory of regularity structures Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014
- [5] Kardar, M., Parisi, G., Zhang, Y.-C. : Dynamic scaling of growing interfaces. Phys. Rev. Lett. 56(9), 889 - 892 (1986)
- [6] Meyer, Y. : Wavelets and operators, vol. 37 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Nualart D. : The Malliavin calculus and related topics. Springer-Verlag, New York, Berlin, London [etc.], 1995
- [8] Revuz, D. and Yor, M. (1991), Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer Verlag