Structure algébrique des groupes de difféomorphismes

Jaouad Mourtada
Sous la direction de Frédéric Le Roux

Introduction au domaine de recherche

Table des matières

Introduction

Cet exposé se donne pour objectif de mieux comprendre les groupes de difféomorphismes de variétés, leurs propriétés géométriques ainsi que leurs conséquences algébriques. En particulier, nous nous intéressons à la la description géométrique des morphismes entre ces groupes de difféomorphismes.

L'étude des liens entre un objet géométrique et une structure algébrique qui lui est associée est courante en mathématiques. Dans le cas des algèbres de fonctions, la correspondance entre algèbre et géométrie est simple et bien établie. Par exemple, un espace topologique compact X est caractérisé par l'algèbre $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs réelles. De plus, si X et Y sont deux espaces compacts, tout morphisme d'algèbres $\mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$ est de la forme $f \mapsto f \circ w$, où $w : Y \to X$ est une application continue [1]. Cela provient du fait qu'il est possible de « retrouver » X comme l'ensemble des morphismes d'algèbres $\mathscr{C}(X) \to \mathbf{R}$. Ce résultat s'adapte, *mutatis mutandis*, au cas des algèbres de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur une variété lisse compacte : une variété compacte M est caractérisée par l'algèbre $\mathscr{C}^\infty(M)$, et les morphismes $\mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(N)$ proviennent d'applications lisses $N \to M$.

Comme nous le verrons par la suite [2], les résultats précédents admettent des analogues partiels dans le cas des groupes de difféomorphismes, quoique la situation (et les preuves) soient plus compliquées. En particulier, nous verrons qu'une variété lisse M est caractérisée par son groupe de difféomorphismes (à support compact, isotopes à l'identité) $\mathrm{Diff}_0(M)$, un résultat dû à Filipkiewicz [Fil82], s'inspirant d'un résultat analogue de Whittaker dans le cas continu [Whi63]. Le groupe $\mathrm{Diff}_0(M)$ possède plusieurs propriétés remarquables que nous discuterons, notamment la propriété de « fragmentation » des difféomorphismes, qui permet de décomposer un difféomorphisme à support compact, proche de l'identité, en un produit de difféomorphismes à support dans des petites boules. On en déduit la perfection du groupe $\mathrm{Diff}_0(M)$ et surtout sa simplicité, établie par Thurston [Thu74] et Mather [Mat73].

Par ailleurs, l'étude de la distorsion dans les groupes de difféomorphismes, suivant Avila [Avi08], permet d'établir un pont entre la géométrie et l'algèbre. Plus précisément, un théorème de Militon [Mil12] affirme que tout difféomorphisme de M récurrent (propriété topologique et dynamique) est distordu dans $\mathrm{Diff}_0(M)$ (propriété algébrique). En exploitant ce résultat, Hurtado [Hur13] a récemment démontré que tout morphisme de groupes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ est continu (en topologie $\mathscr{C}^\infty$), généralisant un théorème de Mann [Man12], qui traite le cas où M et N sont de dimension 1, avec des méthodes très différentes.

1. La géométrie non commutative fournit un résultat plus précis encore, en l'occurrence une équivalence de catégorie (contravariante) entre la catégorie des espaces topologiques compacts et celle des C^*-algèbres commutatives.

2. En particulier, toutes les notions nouvelles de cette introduction, comme celles de « distorsion » et de « fragmentation », seront définies dans le corps du texte.

Enfin, dans le même article [Hur13], Hurtado démontre une conjecture de Ghys stipulant que l'existence d'un morphisme de groupes non trivial $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ – nécessairement injectif par simplicité – implique $\dim(M) \leqslant \dim(N)$. De plus, il établit une description géométrique de tous ces morphismes lorsque M et N sont de même dimension.

1 Le groupe topologique $\mathrm{Diff}_0(M)$

1.1 Topologie compacte-ouverte sur $\mathrm{Homeo}(X)$

Dans cette sous-section, nous introduisons la topologie compacte-ouverte (ou topologie de la convergence uniforme) sur les ensembles de fonctions continues, et en rappelons quelques propriétés essentielles. Il s'agit d'un prérequis à l'étude des ensembles de fonctions lisses (ou $\mathscr{C}^r$) réalisée dans la partie suivante.

Définition 1.1. Soient X, Y deux espaces topologiques, avec X localement compact. La *topologie compacte-ouverte* sur $\mathscr{C}(X, Y)$ est la topologie engendrée par les parties de la forme :

$$\mathscr{O}(K, U) = \{f \in \mathscr{C}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

avec $K \subset X$ compact et $U \subset Y$ ouvert.

La topologie compacte-ouverte est en général adaptée à l'étude des espaces de fonctions continues, comme le suggèrent ses propriétés commodes :

Proposition 1.2. *La topologie compacte-ouverte vérifie les propriétés suivantes :*

(Évaluation) *L'application d'évaluation $\mathscr{C}(X, Y) \times X \to Y$ est continue.*

(Homotopies) *Si Z est un espace topologique, une application $f : Z \to \mathscr{C}(X, Y)$, $z \mapsto f_z$ est continue si et seulement si l'application $Z \times X \to Y$, $(z, x) \mapsto f_z(x)$ est continue. En particulier, les chemins $[0, 1] \to \mathscr{C}(X, Y)$ correspondent exactement aux homotopies $[0, 1] \times X \to Y$.*

(Composition) *Si Z est un espace topologique localement compact, l'application de composition $\mathscr{C}(Z, X) \times \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(Z, Y)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$ est continue.*

(Métrisabilité) *Si Y est un espace métrique, de distance d, la topologie compacte-ouverte sur $\mathscr{C}(X, Y)$ est engendrée par la famille de pseudo-distances :*

$$d_K(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

lorsque K parcourt les compacts de X. En particulier, cette topologie est métrisable si X est compact (ou dénombrable à l'infini).

(Convergence uniforme sur les compacts) *Une suite $f_n \in \mathscr{C}(X,Y)$ converge vers $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ pour la topologie compacte-ouverte si et seulement si f_n converge uniformément vers f sur tout compact.*

Ainsi, si X est un espace topologique localement compact, on peut munir le groupe $\mathrm{Homeo}(X)$ des homéomorphismes de X de la topologie compacte-ouverte. Par ce qui précède, la composition est continue, mais l'inverse ne l'est pas en général. En revanche, elle l'est si X est compact :

Proposition 1.3. *Si X est un espace topologique compact, l'application $\mathrm{Homeo}(X) \to \mathrm{Homeo}(X)$, $f \mapsto f^{-1}$ est continue pour la topologie compacte-ouverte. Par conséquent, $\mathrm{Homeo}(X)$ est un groupe topologique.*

Démonstration. Cela provient de ce que $f^{-1} \in \mathscr{O}(K,U)$ équivaut à $f \in \mathscr{O}(X \setminus U, X \setminus K)$, ainsi que du fait que le passage au complémentaire envoie les compacts sur les ouverts et vice-versa (par compacité de X). □

1.2 Topologie $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathrm{Diff}_0(M)$

Fort des résultats de la partie précédente, nous pouvons entamer l'étude des ensembles de fonctions lisses et des groupes de difféomorphismes de variétés lisses (les résultats seraient identiques en régularité $\mathscr{C}^r$ avec $r \geqslant 1$). Nous introduisons l'analogue « lisse » de la topologie compacte-ouverte :

Définition 1.4. Soient M et N deux variétés lisses. La *topologie $\mathscr{C}^\infty$* sur $\mathscr{C}^r(M,N)$ est [3] la topologie engendrée par les parties de la forme :

$$\mathscr{O}_k(f,(U,\phi),(V,\psi),K,\varepsilon) =$$
$$\{g \in \mathscr{C}^\infty(M,N) \,|\, g(K) \subset V, \;\; \|\psi \circ f \circ \phi^{-1} - \psi \circ g \circ \phi^{-1}\|_{\mathscr{C}^k(\phi(K),\mathbf{R}^n)} < \varepsilon\}$$

avec $k \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, (U,ϕ) et (V,ψ) des cartes de M et N respectivement, $K \subset U$ un compact, et $f \in \mathscr{C}^\infty(M,N)$ telle que $f(K) \subset V$.

Proposition 1.5. *La topologie $\mathscr{C}^\infty$ vérifie les propriétés suivantes :*

(Homotopies) *Si P est une variété et $f : P \times M \to N$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors l'application induite $f : P \to \mathscr{C}^\infty(M,N)$, $p \mapsto f(p,\cdot)$ est continue. En particulier, toute homotopie $\mathscr{C}^\infty$ par rapport aux deux variables $[0,1] \times M \to N$ induit un chemin continu $[0,1] \to \mathscr{C}^\infty(M,N)$.*

3. Il existe en réalité deux topologies $\mathscr{C}^\infty$ naturelles, une topologie faible (celle que nous définissons) et un topologie forte (obtenue en contrôlant simultanément les difféomorphismes en norme $\mathscr{C}^\infty$ sur les recouvrements de cartes localement finis). Cependant, ces deux topologies coïncident si M est compacte, et comme nous nous restreindrons par la suite aux difféomorphismes à support compact, cette différence nous importe peu.

(Composition) *La composition d'applications* $\mathscr{C}^\infty(P,M)\times\mathscr{C}^\infty(M,N)\to\mathscr{C}^\infty(P,N)$ *est continue.*

(Métrisabilité) *L'espace* $\mathscr{C}^\infty(M,N)$ *est métrisable.*

(Ouverture de $\mathrm{Diff}(M)$) *Si M est compacte, l'ensemble* $\mathrm{Diff}(M)$ *des difféomorphismes de M est ouvert dans* $\mathscr{C}^\infty(M,M)$.

(Inverse) *Si M est compacte, l'application inverse des difféomorphismes* $\mathrm{Diff}(M)\to\mathrm{Diff}(M)$ *est continue pour la topologie* $\mathscr{C}^\infty$.

Notons que le fait que $\mathrm{Diff}(M)$ soit ouvert dans $\mathscr{C}^\infty(M,M)$ est une spécificité du cas différentiable, qui ne s'étend pas au le cas continu : il s'agit en fait d'une conséquence du théorème d'inversion locale.

D'après la proposition précédente, si M est une variété lisse compacte, le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M, muni de la topologie $\mathscr{C}^\infty$, est un groupe topologique métrisable. En fait, $\mathrm{Diff}(M)$ admet une structure lisse (*i.e.* une structure de variété de Fréchet) naturelle, qui en fait un groupe de Lie de dimension infinie. L'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}(M)$ est alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M, et l'application exponentielle [4] $\exp : \mathfrak{X}(M)\to\mathrm{Diff}(M)$ correspond au flot : $\exp(tX)=\phi_X^t$.

Si M est une variété lisse non nécessairement compacte, on note $\mathrm{Diff}_0(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M à support compact, isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ; il s'agit d'un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}(M)$. Pour tout compact $K\subset M$, on note $\mathrm{Diff}_K(M)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_0(M)$ constitué des éléments à support dans K (et isotopes à l'identité par une isotopie à support dans K) ; muni de la topologie $\mathscr{C}^\infty$, il s'agit d'un groupe topologique métrisable.

2 Fragmentation et conséquences

2.1 Fragmentation

Un résultat fondamental dans l'étude de $\mathrm{Diff}_0(M)$ est la propriété de *fragmentation* des difféomorphismes. Dans ce qui suit, si U est un ouvert de M, on note G_U le groupe des éléments de $\mathrm{Diff}_0(M)$ à support inclus dans U.

Proposition 2.1 (Fragmentation)**.** *Soit $\mathscr{B}$ un recouvrement ouvert de M, et soit* $\mathscr{C}=\{f\in\mathrm{Diff}_0(M)\mid\exists B\in\mathscr{B},\ \mathrm{supp}(f)\subset B\}$. *Alors, le groupe* $\mathrm{Diff}_0(M)$ *est engendré par $\mathscr{C}$. Plus précisément, pour tout* $f\in\mathrm{Diff}_0(M)$ *suffisamment*

4. Notons toutefois que, contrairement au cas des groupes de Lie de dimension finie, l'application exponentielle ne réalise pas un difféomorphisme local : il existe des difféomorphismes de M arbitrairement proches de l'identité qui ne sont pas des flots.

proche de l'identité, et pour tous $B_1, \dots, B_m \in \mathscr{B}$ *recouvrant* $\operatorname{supp}(f)$*, il existe* $f_1, \dots, f_m$ *avec* $f_i \in G_{B_i}$ *proches de l'identité tels que* $f = f_1 \cdots f_m$*.*

Démonstration. On se donne une métrique quelconque sur M. Soit $K \subset M$ compact, $B_1, \dots, B_m \in \mathscr{B}$ qui recouvrent K, et $f \in \operatorname{Diff}_K(M)$ proche de l'identité. On pose, pour $t \in [0,1]$, $f^t(p) := \exp_p\big(t \exp_p^{-1} f(p)\big)$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ une partition de l'unité associée au recouvrement $B_1, \dots, B_m$ de K, et pour $1 \leqslant k \leqslant m$, $\mu_k := \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \lambda_j$. On pose enfin $h_k(p) := f^{\mu_k(p)}(p)$ et $f_k := (h_{k-1})^{-1} h_k$. Pour tout k, $f_k \in \mathscr{C}^\infty(M,M)$ dépend continûment de f et vaut id si $f = \mathrm{id}$, donc si f est suffisamment proche de l'identité, tous les f_k le sont également, donc sont inversibles car $\operatorname{Diff}(M)$ est ouvert dans $\mathscr{C}^\infty(M,M)$. De plus, par définition des f_k, $\operatorname{supp}(f_k) \subset \operatorname{supp}(\lambda_k) \subset B_k$ et $f = f_1 \cdots f_m$.

Nous avons montré la seconde assertion de l'énoncé ; pour voir que celle-ci implique la première, il suffit de remarquer que $\operatorname{Diff}_0(M)$ est connexe par arcs, donc engendré par un voisinage quelconque de l'identité. □

La propriété de fragmentation permet de localiser les problèmes sur les difféomorphismes, en se ramenant à des difféomorphismes à support dans des petites boules.

2.2 Perfection locale

Une autre propriété très profonde des groupes de difféomorphismes est la propriété de *perfection.*

Définition 2.2. Un groupe G est dit *parfait* si son groupe dérivé $[G,G]$ est égal à G, *i.e.* si tout élément de G est un produit de commutateurs $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Ceci équivaut encore à dire que G n'admet pas de quotient abélien non trivial.

Commençons par traiter le cas particulier du cercle, qui est fondamental.

Proposition 2.3. *Le groupe* $\operatorname{Diff}_0(S^1)$ *des difféomorphismes du cercle préservant l'orientation est parfait.*

Démonstration. Commençons par montrer que toute rotation du cercle est un produit de commutateurs. Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/\pm 1$ agit fidèlement par difféomorphismes sur $\mathbf{R}P^1 \simeq S^1$, la rotation $\pm R_\theta \in \mathrm{PSO}(2,\mathbf{R})$ agissant comme $R_{2\theta}$ sur le cercle pour tout $\theta \in \mathbf{R}$. Or $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ est simple, donc parfait, ce qui montre que toute rotation du cercle est un produit de commutateurs d'éléments de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) \subset \operatorname{Diff}_0(M)$.

Soit maintenant $f \in \mathrm{Diff}_0(S^1)$. On note $\rho(f) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ son nombre de rotation, qui est la classe modulo $\mathbf{Z}$ de $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\tilde{f}^n x - x) \in \mathbf{R}$, où $\tilde{f} \in \mathrm{Homeo}(\mathbf{R})$ est un relevé quelconque de f à $\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$ (la limite existe et ne dépend pas des choix de x et de $\tilde{f}$). Un résultat classique de Denjoy assure que si f est un difféomorphisme lisse (ou simplement $\mathscr{C}^2$) et si $\rho(f)$ est irrationnel, f est conjugué dans $\mathrm{Homeo}(S^1)$ à une rotation. Mieux : un théorème de Yoccoz [Yoc84] affirme que si $\rho(f)$ est diophantien [5], alors f est conjugué à une rotation dans $\mathrm{Diff}_0(S^1)$. Pour montrer que tout $f \in \mathrm{Diff}_0(S^1)$ est un produit de commutateurs, on commence par trouver α tel que $\rho(R_\alpha^{-1} \circ f)$ soit diophantien, qui existe car le nombre de rotation dépend continûment du difféomorphisme et car les diophantiens sont denses dans $\mathbf{R}$. Par ce qui précède, $R_\alpha^{-1} \circ f$ est conjugué à une rotation, qui est un produit de commutateurs. Or R_α est également un produit de commutateurs, donc aussi $f = R_\alpha \circ (R_\alpha^{-1} \circ f)$ est un produit de commutateurs. $\square$

Un résultat de Haller et Teichmann [HT03] précise l'énoncé précédent, en montrant que toute famille lisse de difféomorphismes du cercle peut s'écrire comme un produit de commutateurs de familles lisses de difféomorphismes (une propriété de *perfection lisse*).

Lemme 2.4 (Perfection locale)**.** *Soit K un compact de M, et $B_1, \ldots, B_k$ des boules ouvertes de M qui recouvrent K. Si $f \in \mathrm{Diff}_K(M)$ est suffisamment proche de l'identité, il existe des difféomorphismes $g_{ij}, h_{ij} \in G_{B_j}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3m = 3\dim M,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$ proches de l'identité tels que :*

$$f = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{3m} [g_{ij}, h_{ij}] \,.$$

Idée de la preuve. Par fragmentation (cf. 2.1), on peut écrire $f = f_1 \cdots f_k$, où $f_j \in G_{B_j}$ sont proches de l'identité. Comme $B_j \simeq \mathbf{R}^m$, on est ramené à montrer que tout difféomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ proche de l'identité est un produit de commutateurs $[g_i, h_i]$ proches de l'identité.

Supposons f à support dans $U =]-1,1[^m$, et soit $V =]-2,2[^m$. On commence par décomposer f en $f = f^1 \cdots f^m$, où f^i est un difféomorphisme proche de l'identité, à support dans U, préservant les droites parallèles au i-ième axe de coordonnées. f^i consiste alors en une famille lisse de difféomorphismes de $]-1,1[$; en refermant ces segments correspondant à $[-1,1]$ inclus

5. Un nombre réel x est dit *diophantien* s'il existe $\beta > 0$ et une constante $C > 0$ tels que pour tous entiers p, q, $|x - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^{2+\beta}}$. Cela signifie que le réel x est « mal approximé » par des rationnels ; l'ensemble des diophantiens est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbf{R}$.

dans U en des cercles disjoints inclus dans V, f^i consiste en un difféomorphisme à support compact d'un anneau contenu dans V, *i.e.* en une famille lisse de difféomorphismes du cercles. Par le théorème de perfection lisse de Haller et Teichmann [HT03], on peut écrire cette famille lisse de difféomorphismes comme un produit de commutateurs de 3 paires de familles lisses de difféomorphismes du cercles proches de l'identité. Ainsi, on peut écrire f^i comme un produit $[g_1^i, h_1^i][g_2^i, h_2^i][g_3^i, h_3^i]$ avec g_j^i, h_j^i des difféomorphismes de $\mathbf{R}^m$ à support dans V proches de l'identité. $\square$

2.3 Simplicité

La propriété de perfection locale est très utile ; on évoquera son utilisation dans la partie suivante sur la distorsion. Une autre conséquence remarquable de la perfection de $\mathrm{Diff}_0(M)$ est le théorème suivant, démontré par Thurston [Thu74] et Mather [Mat73] :

Théorème 2.5 (Thurston, Mather, Epstein)**.** *Le groupe* $\mathrm{Diff}_0(M)$ *est simple.*

La preuve repose sur la perfection et sur une astuce algébrique de codage, voir [Ban97] pour des détails.

Remarque. La propriété de fragmentation reste vraie dans le groupe $\mathrm{Homeo}_0(M)$, quoique la preuve soit plus délicate. En revanche, on en déduit directement la perfection de $\mathrm{Homeo}_0(M)$ par une astuce de codage (qui ne s'étend pas au cas différentiable). De la même façon que dans le cas différentiable, on en déduit que $\mathrm{Homeo}_0(M)$ est simple.

3 Distorsion dans le groupe $\mathrm{Diff}_0(M)$

Un autre aspect étudié des groupes de difféomorphismes est la propriété de distorsion. Rappelons que si S est une partie génératrice d'un groupe Γ, on définit la *longueur de mots* $\ell_S : \Gamma \to \mathbf{N}$ par rapport à S de la façon suivante :

$$\ell_S(g) = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid \exists s_1, \ldots, s_n \in S^{\pm 1},\ g = s_1 \cdots s_n\}.$$

Définition 3.1 (Distorsion)**.** Soit G un groupe, et g un élément de G. On dit que g est *distordu* dans G s'il existe une partie $S \subset G$ finie telle que g appartienne au sous-groupe $\langle S \rangle$ engendré par S et telle que $\ell_S(g^n) = o(n)$ lorsque $n \to \infty$.

Notons que la propriété de distorsion dépend fortement du groupe ambiant : plus celui-ci est petit, plus cette propriété est forte. Par exemple, g est distordu dans $\langle g \rangle$ si et seulement s'il est d'ordre fini.

Une conjecture de Franks et Handel demande si une rotation quelconque du cercle est distordue dans $\mathrm{Homeo}(S^1)$ (ou dans $\mathrm{Diff}(S^1)$). Une réponse à cette question a d'abord été fournie par Calegari et Freedman, qui ont montré qu'une rotation est distordue dans le groupe des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes du cercle, et qu'en dimension N quelconque, toute rotation est distordue dans le groupe $\mathrm{Homeo}(S^N)$. La question de savoir si une rotation est distordue dans le groupe $\mathrm{Diff}(S^1)$ des $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes restait cependant ouverte.

La réponse a été apportée à cette question par Avila [Avi08], qui a en fait démontré un résultat bien plus fort. Dans ce qui suit, d désigne une distance sur $\mathrm{Diff}_0(S^1)$ (ou $\mathrm{Diff}_K(M)$ par la suite) qui métrise la topologie $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème 3.2 (Avila)**.** *Il existe des suites ε_n, k_n de réels positifs avec $\varepsilon_n \to 0$ et $k_n \to \infty$ telles que, pour toute suite $f_n \in \mathrm{Diff}_0(S^1)$ telle que $d(f_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$, il existe une partie finie $S \subset \mathrm{Diff}_0(S^1)$ telle que :*

(i) *Pour tout n, f_n appartient au sous-groupe de $\mathrm{Diff}_0(S^1)$ engendré par la partie S.*

(ii) *Pour tout n, $\ell_S(f_n) \leqslant k_n$.*

En adaptant la preuve d'Avila au cas d'une variété quelconque, Militon [Mil12] a établi la généralisation suivante :

Théorème 3.3 (Militon)**.** *Soit K un compact de M. Il existe des suites ε_n, k_n de réels positifs avec $\varepsilon_n \to 0$ et $k_n \to \infty$ telles que, pour toute suite $f_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $d(f_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$, il existe une partie finie $S \subset \mathrm{Diff}_0(M)$ telle que :*

(i) *Pour tout n, f_n appartient au sous-groupe de $\mathrm{Diff}_0(M)$ engendré par la partie S.*

(ii) *Pour tout n, $\ell_S(f_n) \leqslant k_n$.*

Remarque. Dans l'énoncé du théorème, il est déjà remarquable que la suite infinie f_n appartienne à un sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}_0(M)$.

L'idée de la preuve est la suivante : en utilisant le lemme de perfection locale 2.4, on se ramène au cas où $M = \mathbf{R}^m$ et $f_n = [g_n, h_n]$, avec g_n, h_n à support dans $B = B(0,2)$ et $d(g_n, \mathrm{id}), d(h_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon'_n$. À partir de trois éléments F_1, F_2, F_3 de $\mathrm{Diff}_0(M)$, on crée deux suites $(\Phi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\Psi_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathrm{Diff}_0(M)$ telles que les boules $V_n = \Phi_n(B)$, $W_n = \Psi_n(B)$ soient deux-à-deux disjointes et s'accumulent en un point $x_0 \in B$. On peut alors définir des transformations G, H de $\mathbf{R}^m$ par $G = \Phi_n g_n \Phi_n^{-1}$ sur V_n, et $G = \mathrm{id}$ hors des V_n, idem pour H. A priori, G, H ne sont que des homéomorphismes de $\mathbf{R}^m$ qui ne sont pas nécessairement différentiables en x_0. En revanche, si

g_n, h_n tendent suffisamment vite vers l'identité (c'est là qu'intervient la suite ε_n), G et H sont différentiables en x_0, et donc appartiennent à $\mathrm{Diff}_0(M)$. Les transformations G, H « contiennent » les suites g_n, h_n ; on peut alors retrouver les commutateurs $[g_n, h_n]$ à partir de $S = \{G, H, F_1, F_2, F_3\}$ de manière explicite, ce qui donne la borne k_n et démontre le théorème.

Le théorème de Militon 3.3 est très fort, et sera utilisé dans toute sa généralité dans la section suivante, consacrée à la continuité des morphismes de groupes de difféomorphismes. Nous allons cependant donner un corollaire de ce résultat, afin de montrer comment il répond aux questions évoquées plus haut.

Définition 3.4. Un élément $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$ est dit *récurrent* si la suite des itérés (f^n) admet une sous-suite qui converge vers id (en topologie $\mathscr{C}^\infty$).

Corollaire 3.5. *Tout élément récurrent f de* $\mathrm{Diff}_0(M)$ *est distordu dans* $\mathrm{Diff}_0(M)$.

En particulier, toute rotation de la sphère S^N, $N \geqslant 1$, est distordue dans $\mathrm{Diff}_0(S^N)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Militon 3.3 à une sous-suite f^{n_i} telle que $d(f^{n_i}, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$ et $n_i \geqslant 2^i\, k_i$, de sorte que $\frac{\ell_S(f^{n_i})}{n_i} \leqslant 2^{-i} \to 0$. Comme $\ell_S(f^n)$ est sous-additive, on en conclut que $\ell_S(f^n) = o(n)$. □

4 Continuité des morphismes de groupes

Nous allons maintenant aborder la question de la continuité des morphismes de groupes de difféomorphismes, suivant Hurtado [Hur13]. Dans tout ce qui suit, M et N sont deux variétés lisses, et $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ est un morphisme de groupes.

Définition 4.1. Le morphisme $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ est dit *faiblement continu* si pour tout compact K de M et toute suite de difféomorphismes $f_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$, on a $\Phi(f_n) \to \mathrm{id}$ (les convergences étant prises au sens $\mathscr{C}^\infty$).

Une conséquence du lemme de fragmentation locale 2.1 est la caractérisation suivante :

Lemme 4.2. *Soit* $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ *un morphisme de groupes. S'il existe une boule $B \subset M$ telle que la restriction de Φ à G_B soit continue, alors Φ est faiblement continu.*

Démonstration. Pour toutes boules B, B' de M, il existe $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$ tel que $f(B') \subset B$. Par conséquent, si la restriction de Φ à G_B est continue pour une certaine boule B de M, alors par conjugaison, pour tout boule $B' \subset M$, la restriction de Φ à $G_{B'}$ est continue. La propriété de fragmentation locale 2.1 permet alors de conclure. □

Nous allons donner les grandes lignes de la preuve du résultat suivant :

Théorème 4.3 (Hurtado)**.** *Soient M et N deux variétés lisses. Tout morphisme de groupes* $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ *est faiblement continu.*

Un élément clé dans la preuve est le théorème de Militon 3.3, qui relie une propriété dynamique et topologique (la récurrence) à une propriété algébrique (la distorsion).

Idée de la preuve. Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ un morphisme de groupes, et $f_n \in \mathrm{Diff}_K(M)$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$. On va commencer par montrer que $\Phi(f_n)$ admet une sous-suite qui converge vers une isométrie h de N pour une certaine métrique. Quitte à extraire, on peut supposer que $d(f_n, \mathrm{id}) \leqslant \varepsilon_n$ comme dans le théorème de Militon 3.3, donc $\ell_S(f_n) \leqslant k_n$. Φ étant un morphisme de groupes, on a : $\ell_{S'}(\Phi(f_n)) \leqslant k_n$ avec $S' = \Phi(S)$.

On en conclut que la suite $\Phi(f_n)$ doit être « bornée en norme $\mathscr{C}^r$ » pour tout r, en un sens technique que l'on n'explicitera pas ici. En effet, dans le cas contraire, quitte à extraire, on peut supposer que « $\|\Phi(f_n)\|_r$ » tend vers $+\infty$. Mais quitte à extraire à nouveau, on peut supposer que $\|\Phi(f_n)\|_r$ diverge arbitrairement vite, ce qui contredit le fait que $\Phi(f_n)$ soit de longueur contrôlée dans S' finie ($\ell_{S'}(\Phi(f_n)) \leqslant k_n$).

Par un résultat de type Ascoli-Arzela, on en déduit que $\Phi(f_n)$ admet une sous-suite qui converge en topologie $\mathscr{C}^\infty$ vers $h \in \mathrm{Diff}(N)$. Le contrôle de $\Phi(f_n)$ en norme $\mathscr{C}^r$, indépendant du choix de f_n (donc valide également pour $\Phi(f_n^k)$ pour tout k) fournit un contrôle en norme $\mathscr{C}^r$ de h^k uniforme en k. Par conséquent, si g est une métrique quelconque sur N, la suite de métriques :

$$g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (h^k)^* g$$

est également « bornée en norme $\mathscr{C}^r$ », donc à nouveau, par un résultat de type Ascoli, la suite g_n admet une sous-suite convergeant vers une métrique g' sur N, dont on voit facilement qu'elle est invariante par h, ce qui conclut la première étape de la preuve.

La seconde étape consiste en une preuve du théorème par récurrence sur la dimension de N. Par ce qui précède, il suffit de montrer que, si $B_0 \subset M$

est une boule, il n'existe pas de suite $f_n \in G_{B_0}$ telle que $f_n \to \mathrm{id}$ et telle que $\Phi(f_n)$ converge vers une isométrie non triviale h de N (pour une certaine métrique). Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Soit $B_1 \subset M$ une boule disjointe de B_0, de sorte que G_{B_0} et G_{B_1} commute, donc l'action de G_{B_1} sur N commute avec celle de $h \in \mathrm{Isom}(N)$.

Notons $H = \overline{\langle h \rangle}$ qui est un sous-groupe fermé du groupe de Lie $\mathrm{Isom}(N)$. Si $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(H)$ est non vide, on montre qu'il s'agit d'une sous-variété fermée $L \subset N$ de codimension positive. Comme l'action de G_{B_1} commute à h, G_{B_1} préserve L ; on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à cette action, pour en conclure qu'elle est faiblement continue. Par des constructions astucieuses d'éclatement et de recollement le long de N de cette action, on en déduit que G_{B_1} agit continûment sur N, donc que Φ est faiblement continu.

Si $\mathrm{Fix}(H)$ est vide, *i.e.* H agit librement sur N (et proprement en tant que sous-groupe fermé d'isométries), on peut former le quotient $N_1 = N/H$, sur lequel G_{B_1} agit (car son action commute à H). Si $\dim(H) \geqslant 1$, $\dim(N_1) < \dim(N)$ et l'on peut conclure par hypothèse de récurrence (après un peu de travail). Sinon, on procède par récurrence (par quotients successifs), et l'on se ramène au cas précédent, ce qui conclut la preuve. $\square$

5 Description des morphismes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ lorsque $\dim(M) \geqslant \dim(N)$

Toujours suivant Hurtado [Hur13], nous allons chercher à classifier les morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$, qui sont tous faiblement continus par ce qui précède.

5.1 Un outil essentiel : l'action sur les flots

D'un point de vue heuristique, rappelons que le groupe $\mathrm{Diff}_0(M)$ peut être vu comme un groupe de Lie de dimension infinie. Or, tout morphisme de groupes continu entre groupes de Lie de dimension finie est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et déterminé par son action sur les algèbres de Lie. Dans le cas de $\mathrm{Diff}_0(M)$, l'algèbre de Lie correspond aux champs de vecteurs $\mathfrak{X}_c(M)$ à support compact, c'est-à-dire aux flots (actions lisses $\mathbf{R} \times M \to M$) à support compact. L'étude des morphismes $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ fait donc intervenir de façon décisive l'action de Φ sur les flots :

Lemme 5.1. *Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ un morphisme de groupes. Si $f_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$ est un flot, alors $\Phi(f_t)$ est également un flot.*

Cela résulte de la faible continuité de Φ et du fait que les flots sur M correspondent exactement aux morphismes de groupes continus $\mathbf{R} \to \mathrm{Diff}_0(M)$, ce qui est un cas particulier du théorème de Montgomery-Zippin [MZ55].

Théorème 5.2 (Montgomery, Zippin)**.** *Soit G un groupe de Lie de dimension finie, et $\Phi : G \to \mathrm{Diff}_0(M)$ un morphisme de groupes continu. Alors l'application induite $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto \Phi(g)x$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

Ainsi, si par exemple $B_1, \ldots, B_k \subset M$ sont des boules deux-à-deux disjointes, et si f_t^i est un flot dans B_i ($i = 1, \ldots, k$), alors $\Phi(f_t^i)$ est un flot de N engendré par un champ de vecteurs $Y^i \in \mathfrak{X}_c(N)$. Comme les f_t^i commutent deux-à-deux, les $\Phi(f_t^i)$ aussi, donc $[Y^i, Y^j] = 0$ pour tous i, j. Ce constat est la première étape de la preuve du résultat suivant :

Lemme 5.3. *Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ un morphisme faiblement continu, et soit $n = \dim(N)$. Si $p \in N$, il n'existe pas $n+1$ ouverts $U_1, \ldots, U_{n+1} \subset M$ deux-à-deux disjoints tels que, pour tout i, $\Phi(G_{U_i})$ ne fixe pas p.*

Ce lemme implique en particulier le résultat suivant, qui répond affirmativement à une question de Ghys :

Théorème 5.4. *S'il existe un morphisme de groupes non trivial (donc injectif) $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$, alors $\dim(M) \leqslant \dim(N)$.*

5.2 Deux exemples fondamentaux

Nous allons maintenant étudier le cas où $\dim(M) = \dim(N)$. Il y a dans ce cas deux façons élémentaires de construire des morphismes de groupes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$, l'une à partir d'un nombre fini de plongements $M \hookrightarrow N$, l'autre à partir d'un revêtement $N \to M$ sous certaines conditions.

Définition 5.5. Un morphisme de groupes $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ est dit *topologiquement diagonal* s'il existe un nombre fini d'ouverts U_i de N ($1 \leqslant i \leqslant m$) et des difféomorphismes $\rho_i : M \xrightarrow{\sim} U_i$ tels que, pour $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$:

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \rho_i \circ f \circ \rho_i^{-1}(x) & \text{si } x \in U_i \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 5.6. Soit $\pi : N \to M$ un revêtement fini. Un *morphisme par relèvement* est un morphisme $\pi^* : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ tel que, pour tout $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\pi^*(f)"] \arrow[d, "\pi"'] & N \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Tout $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$ se relève en un $\widetilde{f} \in \mathrm{Diff}_0(N)$. En revanche, il n'est pas toujours possible de relever simultanément tous les éléments de $\mathrm{Diff}_0(M)$ de manière à obtenir un morphisme de groupes. On peut donner (cf. [Hur13]) une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un morphisme par relèvement, et il est alors unique. Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que π donne lieu à un morphisme par relèvement est que le centre de $\pi_1(M)$ soit trivial.

5.3 Classification des morphismes

En combinant les deux exemples précédents, on obtient la construction plus générale suivante :

Définition 5.7. Soit $\Phi : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ un morphisme de groupes. On dit que Φ est *topologiquement diagonal étendu* s'il existe un nombre fini d'ouverts U_i deux-à-deux disjoints de N et, pour tout i, un revêtement fini $\pi_i : U_i \to M$, tels que pour tout $f \in \mathrm{Diff}_0(M)$ et $x \in M$:

$$\Phi(f)(x) = \begin{cases} \pi_i^*(f)(x) & \text{si } x \in U_i \\ x & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\pi_i^* : \mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(M_i)$ désigne le morphisme de revêtement comme dans la définition 5.6.

Théorème 5.8 (Hurtado). *Soient M et N deux variétés lisses de même dimension. Tout morphisme de groupes* $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ *est topologiquement diagonal étendu.*

Sans rentrer dans les détails techniques de la preuve, expliquons comment retrouver les $U_i \subset N$ et les revêtements $\pi_i : U_i \to M$ à partir de la donnée de Φ. L'ensemble $S = \bigcup_i U_i$ est l'ensemble des points qui ne sont pas fixés par $\Phi(\mathrm{Diff}_0(M))$, qui est un ouvert de N. On retrouve les U_i comme les composantes connexes de S. Reste à retrouver les $\pi_i : U_i \to M$, ou de manière équivalente les fibres $\pi_i^{-1}(x)$ pour $x \in M$. On observe alors que $\bigcup_i \pi_i^{-1}(x)$ correspond exactement à l'ensemble S_x des points de N qui sont déplacés par $\Phi(G_V)$ pour tout voisinage V de x dans M. Si donc on dispose d'un morphisme Φ, on construit les S_x comme indiqué, on vérifie que la correspondance $S_x \to x$ définit bien des revêtements, et que Φ est de la forme voulue.

En corollaire de ce qui précède, on retrouve le théorème de Filipkiewicz [Fil82], démontré de manière assez différente, qui montre en particulier que le groupe $\mathrm{Diff}_0(M)$ caractérise M :

Théorème 5.9 (Filipkiewicz)**.** *Soient M, N deux variétés $\mathscr{C}^\infty$, telles que les groupes* $\mathrm{Diff}_0(M)$ *et* $\mathrm{Diff}_0(N)$ *soient isomorphes. Alors M et N sont difféomorphes, et tout isomorphisme* $\mathrm{Diff}_0(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}_0(N)$ *est de la forme $f \mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, où $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme.*

6 Conclusion et perspectives

Nous avons vu que l'étude des groupes de difféomorphismes est assez riche, et fait intervenir de manière surprenante des propriétés algébriques (distorsion) ou dynamiques (résultat de conjugaison lisse des difféomorphismes diophantiens du cercle). Suivant Hurtado [Hur13], en s'appuyant sur des résultats d'Avila [Avi08] et Militon [Mil12], il est possible de montrer la continuité des morphismes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$, et d'en obtenir une classification complète lorsque $\dim(M) \geqslant \dim(N)$.

Un prolongement naturel de ces travaux serait d'établir une description des morphismes $\mathrm{Diff}_0(M) \to \mathrm{Diff}_0(N)$ lorsque $\dim(M) < \dim(N)$. Une conjecture raisonnable serait que tous ces morphismes seraient des analogues des morphismes topologiquement diagonaux étendus, mais en remplaçant les revêtements $\pi_i : U_i \to M$ par des submersions. Pour des raisons techniques, en se penchant sur le détail de la preuve de [Hur13], il apparaît que ce résultat semble accessible lorsque $\dim(M) > \frac{1}{2}\dim(N)$, quoiqu'il soit difficile de conclure (car on ne dispose plus du théorème de l'invariance du domaine de Brouwer pour les applications lisses injectives $M \to N$ si $\dim(M) < \dim(N)$).

Une autre direction possible serait l'étude des morphismes d'un groupe de Lie (typiquement simple) vers $\mathrm{Diff}_0(M)$. On peut par exemple montrer que si $\Phi : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{Diff}_0(S^2)$, $R \in \mathrm{SO}(3)$ est récurrent, donc distordu, donc $\Phi(R)$ également. En moyennant la métrique de S^2 par les puissances de $\Phi(R)$, qui sont contrôlées, on obtient une métrique sur S^2 invariante par $\Phi(R)$, et conformément équivalente à la métrique standard par le théorème d'uniformisation de Riemann. Ainsi, $\Phi(R)$ est conjuguée à une rotation. On peut même montrer, en moyennant la métrique standard de S^2 par l'action de $\Phi(SO(3))$, que toute action Φ de SO(3) sur S^2 est conjuguée à l'action canonique. Qu'en est-il des morphismes $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R}) \to \mathrm{Diff}(S^2)$? La question reste ouverte à ce jour.

Une continuation possible de ces travaux conduirait au *programme de Zimmer*, qui consiste à étudier les actions de « grands » groupes discrets sur des variétés compactes (cf. [Fis08]).

Références

[Avi08] A. Avila, *Distortion elements in* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, arXiv :0808.2334, 2008.

[Ban97] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[Bou08] A. Bounemoura, *Simplicité des groupes de transformations de surfaces*, Ensaios Matematicos, SBM, **14** (2008), p. 1-143.

[Fil82] R. P. Filipkiewicz, *Isomorphisms between diffeomorphism groups*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, **2** (1982), p. 159-171.

[Fis08] D. Fisher, *Groups acting on manifolds : around the Zimmer program.* arXiv :0809.4849, 2008.

[HT03] S. Haller, J. Teichmann. *Smooth perfectness through decomposition of diffeomorphisms into fiber preserving ones.* Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), pp. 53-63.

[Hur13] S. Hurtado, *Continuity of discrete homomorphisms of diffeomorphism groups*, preprint, arXiv :1307.4447, 2013.

[Man12] Kathryn Mann, *Homomorphisms between diffeomorphism groups.* arXiv :1206.1196 [math.GT], 2012.

[Mat73] J. Mather, *Integrability in codimension 1*, Comment. Math. Helv. **48** no 1 (1973), p. 195–233.

[Mil12] E. Militon, *Éléments de distorsion du groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte.* arXiv :1005.1765 [math.DS], 2012.

[MZ55] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups.* Wiley (Interscience), New York, 1955. arXiv :1210.2325 [math.DS], 2012.

[Thu74] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms.* Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), p. 304–307.

[Whi63] J.V. Whittaker, *On isomorphic groups and homeomorphic spaces*, Ann. Math. **78** (1963), p. 74-91.

[Yoc84] J.-C. Yoccoz, *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne.* Ann. sc. de l'É.N.S. 4e série, tome **17**, num. 2 (1984), p. 333-359.