

ÉTUDE DES SOUS-VARIÉTÉS LEGENDRIENNES FLEXIBLES

Introduction au domaine de recherche

Guillaume Roux

Sous la direction de Vincent Colin

Octobre 2013

Table des matières

Introduction historique	1
1 Notions de géométrie de contact	2
1.1 Variétés de contact	2
1.2 Sous-variétés isotropes et legendriennes	3
1.3 Quelques théorèmes fondamentaux	3
1.4 Projection frontale	4
2 Histoires de h-principes	7
2.1 Présentation du concept	7
2.2 Situation en dimension 3	8
2.2.1 Existence	8
2.2.2 Unicité	9
2.3 Situation en grande dimension	10
2.3.1 Existence	10
2.3.2 Unicité	10
Références	12

Introduction historique

On peut considérer que la géométrie de contact est née en 1896 à travers l'œuvre de Sophus Lie, *Berührungstransformationen* (transformations de contact). Ce n'est cependant qu'au cours des dernières décennies que les premières avancées significatives ont été réalisées, en faisant finalement un domaine de recherche florissant depuis une dizaine d'années.

Une *structure de contact* est un champ d'hyperplans partout non-intégrable sur une variété de dimension impaire (définition 1.1). Si de tels objets peuvent sembler abstraits au premier abord, la géométrie de contact a néanmoins trouvé de nombreuses applications en physique, notamment en mécanique classique, en thermodynamique et en optique géométrique. D'un autre côté, elle s'est également révélée être un puissant outil pour résoudre des questions de topologie pure.

La géométrie de contact est en quelque sorte la cousine, en dimension impaire, de la géométrie symplectique, qui elle s'intéresse à des variétés de dimension paire. On trouve de nombreuses similitudes entre les deux théories : ainsi on dispose dans un cas comme dans l'autre d'un théorème de Darboux qui décrit la forme locale de la structure (de contact/symplectique). De même on trouve des deux côtés des théorèmes de stabilité aux énoncés voisins. Concrétisation du lien entre les deux domaines, la procédure dite de *symplectisation* permet de construire une variété symplectique à partir d'une variété de contact ; réciproquement, une hypersurface d'une variété symplectique telle qu'il existe un champ de Liouville qui lui soit positivement transverse peut être munie d'une structure de contact.

Ce n'est qu'à partir de la fin des années 50 que l'on commença à aborder les questions de géométrie de contact d'un point de vue topologique, grâce notamment aux travaux de John Gray, qui établit le théorème de stabilité qui porte son nom : il n'existe pas de déformation non-triviale d'une structure de contact sur une variété close (théorème 1.8). Commença ensuite, à partir de la fin des années 70, la période dite "classique" de la géométrie de contact. Elle fut d'abord marquée par des découvertes comme celles de J. Martinet et R. Lutz, qui démontrèrent des résultats d'existence pour les structures de contact sur les variétés de dimension 3.

Par la suite vinrent les travaux de D. Bennequin [1], puis l'article fondamental de Y. Eliashberg [11] en 1989 qui introduisit la dichotomie fondamentale en dimension 3 entre les structures de contact tendues et vrillées. Dans le prolongement de ces études, de nouvelles méthodes topologiques modernes furent développées, notamment par E. Giroux [14] et K. Honda [17], permettant l'essor de la géométrie de contact en dimension 3 au cours de la dernière décennie. On connaît à présent une classification complète des structures de contact sur quelques variétés simples, ainsi qu'une classification plus grossière sur toute 3-variété close [3, 4, 18].

Comme c'est souvent le cas en géométrie, un fossé sépare la géométrie de contact en dimension 3 et celle en dimension supérieure ou égale à 5. De nombreux outils et notions, comme par exemple la distinction entre structures vrillées et tendues, sont spécifiques à la dimension 3. Travailler en grande dimension demande alors de développer toute une nouvelle gamme de méthodes : de très nombreuses questions restent encore ouvertes à l'heure actuelle.

La première partie de ce document introduit les notions et les résultats de base en géométrie de contact. Dans la deuxième partie, on s'intéresse au concept de *h*-principe ; cela permet d'illustrer les divergences entre la dimension 3 et les dimensions supérieures. On mentionne notamment un article récent de E. Murphy [23] qui définit en grande dimension une classe particulière de nœuds, dits nœuds *flexibles*. Les propriétés que vérifient ces nœuds rappellent les propriétés de flexibilité observées dans les structures de contact vrillées en dimension 3.

1 Notions de géométrie de contact

1.1 Variétés de contact

Dans l'ensemble de cette section, on fixe une variété M de dimension $2n + 1$.

Définition 1.1. Une *structure de contact* sur M est la donnée d'un champ d'hyperplans partout non-intégrable $\xi \subset TM$, au sens où en tout point p de M , il n'existe aucune sous-variété de dimension $2n$ passant par p et localement tangente à ξ .

Dans ce document, on considérera uniquement des structures de contact *co-orientables*, c'est-à-dire définies par une 1-forme différentielle $\alpha : \xi = \ker \alpha$. Par le théorème de Frobenius, dire que ξ est une structure de contact équivaut alors à demander que α vérifie la condition

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0,$$

c'est-à-dire ne s'annule nulle part. En d'autres termes, $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur M , qui est donc orientable.

On dit que α est une *forme de contact* sur M , et que (M, ξ) est une *variété de contact*.

Remarque 1.2. La condition sur α implique que pour tout point $p \in M$, $d\alpha|_{\xi_p}$ est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur ξ_p . On sait qu'alors ξ_p est nécessairement de dimension paire ; puisque ξ_p est un hyperplan de T_pM , une variété de contact est donc toujours de dimension impaire.

Exemple 1.3. Sur $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, où l'on note les coordonnées

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z),$$

on définit la 1-forme

$$\alpha_{st} = dz - \sum y_i dx_i.$$

Alors $\xi_{st} = \ker \alpha_{st}$ est une structure de contact sur \mathbb{R}^{2n+1} , appelée *structure de contact standard*. En effet, on a

$$\alpha_{st} \wedge (d\alpha_{st})^n = -n! dz \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dy_n \wedge dx_n \neq 0.$$

Pour simplifier l'écriture, on note souvent $x := (x_1, \dots, x_n)$, $y := (y_1, \dots, y_n)$, et on écrit par convention $\alpha_{st} = dz - ydx$. La figure 1 représente la structure standard en dimension 3.

Définition 1.4. Soient (M, ξ_M) et (N, ξ_N) des variétés de contact. On dit qu'une application $f : M \rightarrow N$ est *de contact*, ou encore que c'est un *contactomorphisme*, si $df(\xi_M) = \xi_N$. Si $\xi_M = \ker \alpha_M$ et $\xi_N = \ker \alpha_N$, cela revient à dire qu'il existe $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $f^*\alpha_N = \lambda\alpha_M$.

À toute forme de contact, on peut associer un objet clé en géométrie de contact : son *champ de Reeb*. Il s'agit d'un champ de vecteurs transverse à ξ et dont le flot préserve la 1-forme α .

Proposition 1.5. Soit α une forme de contact sur M . On peut lui associer un champ de vecteurs R_α , appelé *champ de Reeb de α* , défini de manière unique par

$$\begin{cases} d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0, \\ \alpha(R_\alpha) = 1. \end{cases}$$

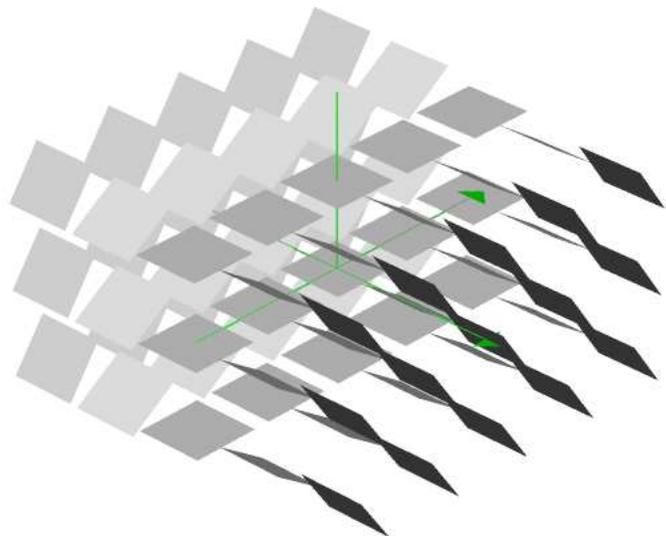


FIGURE 1 – La structure de contact standard sur \mathbb{R}^3 . Les plans de contact sont invariants selon les directions x et z , et tournent autour de l’axe des y quand on se déplace le long de cet axe.

1.2 Sous-variétés isotropes et legendriennes

On considère une variété de contact $(M, \xi = \ker \alpha)$ de dimension $2n + 1$.

Définition 1.6. On dit qu’un plongement $f : L \rightarrow M$ est *isotrope* si son image est tangente à $\xi : \forall x \in L, df(T_x L) \subset \xi_{f(x)}$, ou de manière équivalente, $f^* \alpha = 0$.

On assimile souvent f à son image $f(L)$ en disant que $f(L)$ est isotrope : on parlera ainsi de sous-variétés isotropes d’une variété de contact.

Par définition d’une variété de contact, une sous variété isotrope L de M est nécessairement de dimension $< 2n$. De façon étonnante à première vue, la condition de contact implique en fait davantage : on peut établir facilement que la dimension d’une sous-variété isotrope ne peut excéder n . Les sous-variétés isotropes de dimension maximale n sont dites *legendriennes*.

1.3 Quelques théorèmes fondamentaux

Le théorème de Darboux énonce essentiellement qu’une variété de contact de dimension n ressemble toujours localement à \mathbb{R}^{2n+1} muni de la structure de contact standard, et que localement une sous-variété isotrope ressemble à un sous-espace vectoriel isotrope de \mathbb{R}^{2n+1} . En d’autres termes, en géométrie de contact, la structure locale ne contient pas d’information : les questions intéressantes apparaissent au niveau global. Ce n’est par exemple pas le cas en géométrie riemannienne, où la structure locale donnée par la courbure a son importance.

Théorème 1.7 (Théorème de Darboux). *Soit $(M, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact de dimension $2n + 1$ et $L^k \subset M$, $0 \leq k \leq n$, une sous-variété isotrope de M . Il existe des coordonnées*

locales $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$ au voisinage de p dans lesquelles $p = (0, \dots, 0)$, $L = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ et

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

On appelle un tel voisinage un *voisinage de Darboux*, ou encore une *carte de Darboux*.

On a déjà mentionné dans l'introduction de ce document le théorème de stabilité de Gray : sur une variété close (c'est-à-dire compacte et sans bord), toute déformation d'une structure de contact reste difféomorphe à la structure de départ.

Théorème 1.8 (Théorème de stabilité de Gray). *Soit M une variété close, et $(\xi_t = \ker \alpha_t)_{t \in [0,1]}$ une famille lisse de structures de contact sur M , au sens où la famille $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ d'éléments de T^*M est lisse. Alors il existe une difféotopie¹ $\psi_t : M \rightarrow M$ avec $\psi_0 = Id$ et telle que pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$\psi_t^* \alpha_t = f_t \alpha_0,$$

où $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est une famille lisse de fonctions lisses sur M .

En outre, on peut demander que tout point p en lequel $\alpha_t(p)$ est constante au cours du temps soit fixe sous l'action de (ψ_t) .

Enfin, on peut citer le théorème d'extension des isotopies de contact. Il s'agit de l'analogue direct, en géométrie de contact, du théorème classique d'extension des isotopies (une isotopie d'une sous-variété s'étend en une isotopie ambiante sur la variété). On rappelle qu'une *isotopie* est une famille lisse de plongements.

Théorème 1.9 (Théorème d'extension des isotopies de contact). *Soit $j_t : L \hookrightarrow M \setminus \partial M$, $t \in [0, 1]$, une isotopie de plongements isotropes d'une variété compacte L , éventuellement à bord, dans une variété de contact M . Il existe une difféotopie de contact² à support compact $\psi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, telle que $\psi_t \circ j_0 = j_t$.*

Les démonstrations modernes des trois théorèmes cités dans cette section s'appuient sur une même technique appelée *astuce de Moser*, initialement introduite dans [22]. Cette astuce consiste à chercher la difféotopie $\psi_t : M \rightarrow M$ sous la forme du flot d'un champ de vecteurs X_t dépendant du temps. Dès lors, l'équation que doit satisfaire ψ_t se transporte en une équation portant sur X_t ; une fois trouvé un champ X_t vérifiant cette nouvelle équation, il reste à intégrer ce champ pour obtenir la famille de difféomorphismes recherchée. La démonstration du théorème de Gray consiste ainsi en une application directe de cette astuce ; pour le théorème d'extension des isotopies de contact, il faut travailler un peu plus car les difféomorphismes recherchés doivent en plus être de contact.

1.4 Projection frontale

Dans cette section, on considère \mathbb{R}^{2n+1} muni de sa structure de contact standard. Les coordonnées sont notées comme précédemment par convention $(x, y, z) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$. On définit la projection frontale :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n+1} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, z). \end{array}$$

1. On désigne par *difféotopie* une famille lisse de difféomorphismes.

2. Comme on peut s'y attendre, il s'agit d'une difféotopie composée de contactomorphismes.

On considère également pour le reste de cette section une sous-variété legendrienne L de \mathbb{R}^{2n+1} .

Soit $u \in L$ tel que en ce point la différentielle de la projection $\pi : L \rightarrow \mathbb{R}^n \times 0 \times 0$ sur les coordonnées x soit inversible. Sur un voisinage V de u , on peut donc paramétrer L par $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$L = \{(x, y(x), z(x)), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Dans la suite, on raisonne dans ce voisinage V de u .

Puisque L est legendrienne,

$$0 = (dz - ydx)|_L = \sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - y_i \right) dx_i,$$

donc sur L

$$y_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

En d'autres termes, en notant ∇z le gradient de la fonction $z : V \simeq U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$L = \{(x, \nabla z(x), z(x)), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n\}.$$

On voit ainsi que dans une telle situation, l'image de L par la projection frontale $P(L)$ est juste le graphe de la fonction z , et que l'on peut "récupérer" très facilement L à partir de la donnée de sa projection frontale en calculant les dérivées partielles de z . Cette propriété est fondamentale car elle permet de modifier une sous-variété legendrienne simplement en la transformant dans le front, i.e. en transformant sa projection frontale dans $\mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R}$: une famille continue de graphes de fonctions lisses dans le front se relève automatiquement et de manière unique en une famille de sous-variétés legendriennes de $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$.

Exemple 1.10. Dans (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) , considérons la courbe paramétrée L donnée par

$$\left(\left(\frac{2y}{3} \right)^2, y, \left(\frac{2y}{3} \right)^3 \right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

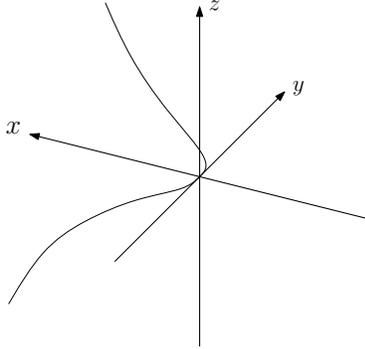


FIGURE 2 – La courbe L .

C'est une sous-variété legendrienne car sur L , $dz = \frac{8}{9}y^2 dy = ydx$. Sa projection frontale est la courbe d'équation $z^2 = x^3$: c'est la réunion de deux branches de graphes (lisses) recollées

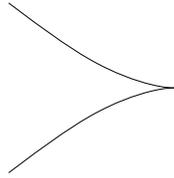


FIGURE 3 – Un cusp dans la projection frontale.

au niveau d'une singularité en $(0,0)$, comme montré sur la figure 3. On appelle *cusp* ce genre de singularités. Il est intéressant de constater qu'une singularité cusp ne gêne pas le processus de "récupération" de la courbe originelle dans \mathbb{R}^3 : en effet, au niveau du cusp, on peut encore définir une tangente à la courbe (tangente horizontale), et on dispose alors d'une tangente définie en tout point de la courbe et qui varie de manière C^∞ . Cela établit l'unicité locale du relèvement au niveau d'un cusp : quand on se rapproche de ce dernier, la tangente à la courbe se rapproche de l'horizontale ; puisque le coefficient directeur de la tangente donne la coordonnée en y , cette coordonnée est donc nécessairement nulle au point singulier.

Ainsi, par unicité locale du relèvement, toute courbe tracée dans le front qui est une succession de graphes de fonctions reliés par des cusps peut se relever dans \mathbb{R}^3 en une sous-variété legendrienne immergée. En outre, la coordonnée manquante y étant obtenue en dérivant z par rapport à x , la sous-variété ainsi obtenue ne s'intersecte pas elle-même (i.e. est une "véritable" sous-variété) si et seulement si les différents graphes n'ont pas de points de tangence hors des cusps. En revanche, les points d'intersection sont autorisés si ce ne sont pas des points de tangence. Ainsi par exemple un front comme celui représenté en figure 4 se relève bien en une sous-variété legendrienne de (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) .

La notion de cusp s'étend en dimension supérieure, en considérant le produit d'un cusp en dimension 2 par un intervalle. On reviendra sur cela dans la deuxième partie de ce document.

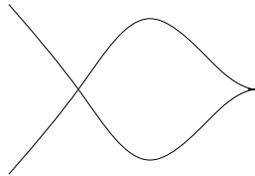


FIGURE 4 – Un exemple de figure possible en projection frontale.

2 Histoires de h -principes

2.1 Présentation du concept

Dans le reste de ce document, on fixe une variété de contact (Y^{2n+1}, ξ) . On désigne par *nœud legendrien* toute sous-variété legendrienne L close connexe de Y . Cette terminologie est inspirée de la dimension 3 : un nœud legendrien dans (Y^3, ξ) est une sous-variété close connexe de dimension 1, c'est-à-dire un plongement du cercle $S^1 \hookrightarrow Y$.

De façon grossière, dire qu'un h -principe tient pour une équation ou une inéquation différentielle signifie qu'une solution "formelle" peut toujours être déformée en une solution "naturelle". Sans rentrer davantage dans les détails, on entend ici par solution naturelle une solution de l'équation au sens classique du terme, et par solution formelle une solution selon un sens affaibli. Cette notion a été introduite pour la première fois dans des travaux de M. Gromov et de Y. Eliashberg, et est développée dans des références comme [8] ou [15]. Dans ce qui suit, on va s'intéresser aux h -principes qui existent (ou non) pour les nœuds legendriens. On a donc tout d'abord besoin de définir ce qu'on entend par *nœud legendrien formel*.

Définition 2.1. Étant données deux variétés M et N , on appelle *monomorphisme* tout morphisme de fibrés $F : TM \rightarrow TN$, injectif fibre à fibre, et couvrant une application continue $f : M \rightarrow N$.

Si de plus N est munie d'une structure de contact $\xi = \ker \alpha$, on dit que $F : TM \rightarrow TN$ est un monomorphisme *isotrope* si $F(TM) \subset \xi = \ker \alpha$ et $F^*(d\alpha) = 0$.

Remarquons que si $F = df$ est une vraie différentielle et que l'application f est isotrope, alors $F^*\alpha = 0$, donc $F^*(d\alpha) = 0$: le monomorphisme F est isotrope.

Définition 2.2. On appelle *nœud legendrien formel* tout couple (f, F^s) où :

1. $f : L^n \hookrightarrow Y^{2n+1}$ est un plongement lisse d'une variété L close connexe de dimension n dans une variété de contact (Y, ξ) de dimension $2n + 1$;
2. $F^s : TL \rightarrow TM$, $s \in [0, 1]$, est une homotopie de monomorphismes de fibrés au-dessus de f telle que $F^0 = f$ et F^1 est un monomorphisme isotrope.

$$\begin{array}{ccc} TL & \xrightarrow{F^s} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

D'après la remarque faite avec la définition 2.1, tout nœud legendrien peut être vu comme un nœud legendrien formel, en définissant $F^s = df$ pour tout $s \in [0, 1]$. On peut donc introduire la définition naturelle suivante :

Définition 2.3. Deux nœuds legendriens formels (f, F^s) et (g, G^s) sont dits *formellement isotopes* s'il existe une famille lisse de nœuds legendriens formels (h_t, H_t^s) , $t \in [0, 1]$, telle que $(h_0, H_0^s) = (f, F^s)$ et $(h_1, H_1^s) = (g, G^s)$ pour tout $s \in [0, 1]$.

Deux nœuds legendriens f et g sont dits *formellement isotopes* s'ils le sont en tant que nœuds legendriens formels $(f, F^s = df)$, $(g, G^s = dg)$.

L'idée est qu'un nœud legendrien formel est un objet topologique, et non géométrique, qui peut être compris en étudiant uniquement des questions de topologie presque indépendamment de la structure de contact. Donnons un exemple rapide pour préciser cette idée.

Étant donné un nœud legendrien $f : L \hookrightarrow (Y, \xi = \ker \alpha)$, on appelle *classe de rotation* de L la classe d'homotopie de df dans l'espace des monomorphismes isotropes de TL dans TM .

On définit également le *nombre de Thurston-Bennequin* de L comme le nombre d'enlacement $lk(L, L^+) \in \mathbb{Z}$ de L et L^+ , où L^+ est le poussé de L par le champ de Reeb de α . On ne détaillera pas ici les concepts de nombre d'enlacement et de poussé; le point clé est que les deux quantités que l'on vient de définir sont des notions topologiques. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Murphy [23]).

1. Soit $n > 1$ impair. Si deux nœuds legendriens dans $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ ont la même classe de rotation et le même nombre de Thurston-Bennequin, alors ces deux nœuds sont formellement isotopes.
2. Deux nœuds legendriens dans (\mathbb{R}^5, ξ_{st}) qui ont la même classe de rotation sont formellement isotopes.
3. Soit $n > 2$ pair. Alors pour chaque classe de rotation, il existe au plus deux classes d'isotopie formelle dans $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$. De plus, si les nœuds considérés sont simplement connexes, il en existe exactement deux.

Ainsi, dans les cas décrits par le théorème, on voit que les classes d'isotopie formelle sont déterminées entièrement par des invariants topologiques.

On peut à présent préciser la notion de h -principe. La recherche d'un h -principe pour les nœuds legendriens se décline en deux grandes interrogations.

- **Existence** : Un nœud legendrien formel est-il toujours formellement isotope à un véritable nœud legendrien ?
- **Unicité** : Deux nœuds legendriens qui sont formellement isotopes sont-ils nécessairement isotopes (comme nœuds legendriens) ?

Comme c'est souvent le cas en géométrie, les réponses à ces questions diffèrent sensiblement selon que l'on travaille en dimension 3 ou en dimension ≥ 5 . Dans le reste de ce document, on présente rapidement une vue d'ensemble des principaux résultats dont on dispose à ce jour.

2.2 Situation en dimension 3

On suppose dans cette section que $n = 1$.

2.2.1 Existence

Le point d'existence est faux en général en dimension 3. Cependant il vaut si la structure de contact ξ est *vrillée*.

Définition 2.5. La structure de contact ξ est dite *vrillée* s'il existe un disque plongé $D \subset Y$ tangent à ξ le long de son bord : $T_{\partial D}D = \xi|_{\partial D}$. On appelle un tel disque un *disque vrillé*.

S'il n'existe pas de tel disque, on dit que ξ est *tendue*.

Exemple 2.6. Sur \mathbb{R}^3 muni des coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) , on définit la 1-forme

$$\alpha_{vr} := \cos r \, dz + r \sin r \, d\phi.$$

Cette 1-forme est bien lisse, car la 1-forme $r^2 d\phi$ et la fonction

$$\lambda : r \mapsto \begin{cases} \frac{\sin r}{r} & \text{pour } r \neq 0, \\ 1 & \text{pour } r = 0, \end{cases}$$

sont lisses. De plus :

$$\alpha_{vr} \wedge d\alpha_{vr} = (1 + \lambda(r) \cos r) r dr \wedge d\phi \wedge dz \neq 0,$$

donc $\xi_{vr} = \ker \alpha_{vr}$ définit une structure de contact sur \mathbb{R}^3 , appelée *structure de contact vrillée standard* (voir figure 5). Comme son nom l'indique, cette structure de contact est vrillée : le 2-disque unité dans $\{z = 0\}$ est un disque vrillé. Ce disque est représenté sur la figure 5.

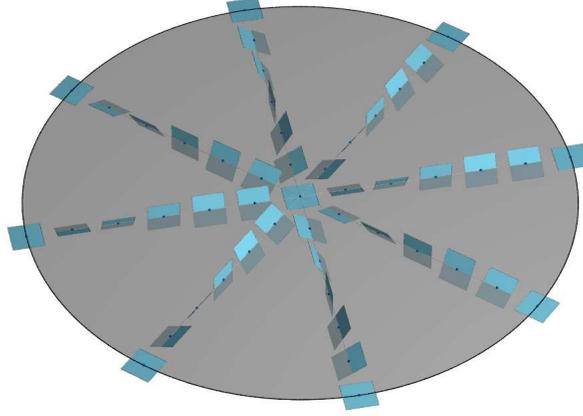


FIGURE 5 – La structure de contact vrillée standard sur \mathbb{R}^3 . Les plans de contact sont invariants selon la direction z , et tournent autour des rayons horizontaux partant de l'axe des z .

Exemple 2.7. La structure de contact standard ξ_{st} sur \mathbb{R}^3 est tendue. Ce résultat a été prouvé par D. Bennequin dans [1].

Le résultat d'existence s'énonce alors ainsi.

Théorème 2.8 (Dymara [5], Eliashberg-Fraser [10]).

Soit (Y, ξ) une 3-variété de contact close et vrillée, et $D \subset Y$ un disque vrillé. Tout nœud legendrien formel (f, F^s) dans Y est formellement isotope à un véritable nœud legendrien $\tilde{f} : S^1 \hookrightarrow Y \setminus D$.

2.2.2 Unicité

Là encore, l'unicité n'est pas vraie dans le cas général, mais on dispose de versions affaiblies de celle-ci. On cite ici un résultat valable dans le cas où la structure de contact est vrillée, comme pour le point d'existence.

Théorème 2.9 (Dymara [5], Eliashberg-Fraser [10]).

Soit (Y, ξ) une 3-variété de contact close et vrillée, et $D \subset Y$ un disque vrillé. Soit aussi (f_t, F_t^s) , $s, t \in [0, 1]$, une isotopie formelle entre deux nœuds legendriens $f_0, f_1 : S^1 \hookrightarrow Y \setminus D$. Alors il existe une isotopie de nœuds legendriens $\tilde{f}_t : S^1 \hookrightarrow Y \setminus D$ entre $\tilde{f}_0 = f_0$ et $\tilde{f}_1 = f_1$, qui est homotope à l'isotopie formelle (f_t, F_t^s) à travers un chemin d'isotopies formelles d'extrémités fixées.

Dans le cas où l'on n'a pas d'hypothèse sur la structure de contact, on peut également mentionner un résultat établi par V. Colin, E. Giroux et K. Honda en 2003, selon lequel dans une classe d'isotopie formelle donnée, il n'existe qu'un nombre fini de nœuds legendriens non-isotopes.

2.3 Situation en grande dimension

On suppose dans cette section que $n \geq 2$.

2.3.1 Existence

Le point d'existence est vrai en grande dimension : Y. Eliashberg a prouvé en 1990 que tout nœud legendrien formel dans une variété de contact de dimension supérieure ou égale à 5 est formellement isotope à un véritable nœud legendrien. Pour une preuve plus récente de ce résultat, on peut voir [2, Théorème 7.16].

2.3.2 Unicité

Comme en dimension 3, l'unicité est fautive en général ; il existe même des variétés de contact sur lesquelles certaines classes d'isotopie formelle contiennent une infinité de nœuds legendriens non-isotopes. Cependant, il existe une certaine gamme de nœuds legendriens, dits *flexibles*, pour lesquels l'unicité vaut : c'est le résultat qu'a prouvé récemment E. Murphy dans [23]. À l'origine, le terme "flexible" vient de la géométrie de contact en dimension 3, et désigne un nœud legendrien dont le complémentaire est vrillé, comme c'est le cas de f_0 et f_1 dans le théorème 2.9. Si le sens attribué à ce mot est significativement différent en grande dimension, on verra que les propriétés vérifiées (théorème 2.11) sont néanmoins voisines, justifiant cette terminologie.

Commençons par définir la notion de *nœud flexible*. Pour un certain $a > 0$, on définit un arc $\lambda_0 \subset \mathbb{R}^2$ comme sur la figure 6. On demande que les pentes au niveau du point d'auto-intersection valent $+1$ et -1 , et que la pente n'excède nulle part 1 en valeur absolue.

Dans \mathbb{R}^{2n+1} , où les coordonnées sont notées comme d'habitude $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$, on définit également la "boîte" $R_{ab} := \{|x_1|, |y_1| \leq 1, |z| \leq a, |x_2|, |y_2|, \dots, |x_n|, |y_n| \leq b\}$, pour un certain $b > 0$.

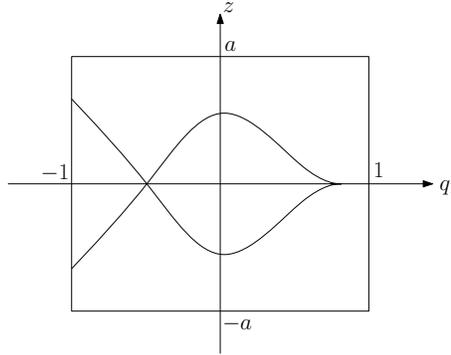


FIGURE 6 – Allure de l'arc λ_0 .

Définition 2.10. Soit L un nœud legendrien dans (Y^{2n+1}, ξ) . On dit que L est un *nœud legendrien flexible* s'il existe $a, b > 0$ tels que $a < b^2$, et une carte de Darboux $(U, \xi) \cong (R_{ab} \subset \mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ dans Y telle que, dans cette carte, la projection frontale de L ait l'aspect décrit par la figure 7. Plus précisément, en notant $P : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la projection frontale, on demande que $P(L \cap U) = \lambda_0 \times D_b$, où $\lambda_0 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ a été défini plus haut, et où $D_b \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ est le $(n-1)$ -disque centré en 0 et de rayon b .

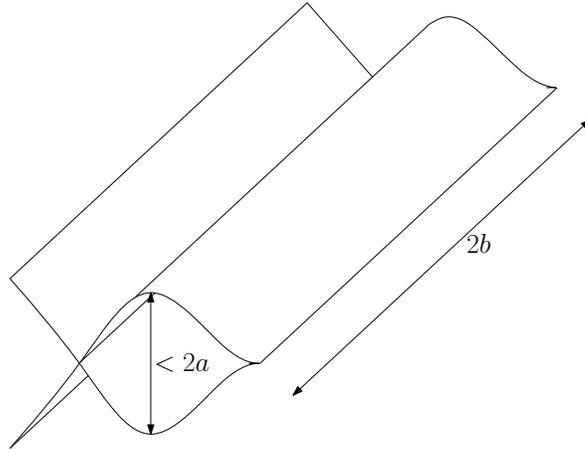


FIGURE 7 – Projection frontale de L au niveau de la carte flexible.

Dans cette définition, la condition $a < b^2$ est fondamentale : on peut montrer que sans cette condition, tout nœud legendrien serait flexible.

On peut enfin énoncer le théorème de E. Murphy.

Théorème 2.11 (*h-principe pour les nœuds legendriens flexibles, [23]*).

Supposons $n \geq 2$. Alors :

1. (**Existence**) *Tout nœud legendrien formel $(f : L \hookrightarrow Y, F^s : TL \rightarrow TY)$ peut être C^0 -approché par un nœud legendrien flexible $\tilde{f} : L \hookrightarrow Y$ qui lui est formellement isotope.*
2. (**Unicité**) *Soit (f_t, F_t^s) , $s, t \in [0, 1]$, une isotopie formelle entre deux nœuds legendriens flexibles f_0 et f_1 . Alors il existe une isotopie legendrienne \tilde{f}_t reliant f_0 à f_1 qui est C^0 -proche de f_t et est homotope à l'isotopie formelle (f_t, F_t^s) par un chemin d'isotopies formelles d'extrémités fixées.*

L'étude de ce théorème et de sa démonstration a fait l'objet d'une partie du stage de M2. On renvoie pour plus de détails à la section 2 du mémoire de M2.

À l'aide du théorème 2.4, qui donne des critères pour savoir quand deux nœuds sont formellement isotopes, on peut ainsi appliquer le théorème 2.11 pour construire des isotopies de nœuds legendriens.

On pourrait espérer définir de manière similaire en dimension 3 une classe privilégiée de nœuds vérifiant des propriétés de flexibilité. Malheureusement, il a été montré dans [10] qu'une telle classe n'existe pas : si l'on a vu dans la section précédente des résultats de flexibilité pour les nœuds dont le complémentaire contient un disque vrillé, il n'existe en revanche pas de résultat analogue dans le cas des structures de contact tendues.

De nombreuses questions restent encore ouvertes. Par exemple, la classe complémentaire des nœuds flexibles est encore mal comprise : on ignore à ce jour si toute classe d'isotopie formelle contient un nœud non-flexible. Des travaux récents comme [6] et [7] se sont intéressés à ces questions, en construisant de nombreux exemples de nœuds non-flexibles.

Références

- [1] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, IIIe Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Vol. 1, Astérisque 107–108 (1983), 87–161.
- [2] K Cieliebak et Y Eliashberg, *From Stein to Weinstein and Back : Symplectic geometry of affine complex manifolds*, Colloquium Publications 59, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2012).
- [3] V. Colin, *Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales*, Comment. Math. Helv. 76 (2001), 353-372.
- [4] V. Colin, E. Giroux, K. Honda, *Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 109(1), 245–293 (2009)
- [5] K. Dymara, *Legendrian knots in overtwisted contact structures on S^3* , Ann. Global Anal. Geom. 19, no. 3, 293-305 (2001).
- [6] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan, *Non-Isotopic Legendrian Submanifolds in \mathbb{R}^{2n+1}* , J. Differential Geometry, 71 (2005), 85-128.
- [7] T. Ekholm, T. Kálmán, *Isotopies of Legendrian 1-Knots and Legendrian 2-Tori*, J. Symplectic Geom. 6, 4 (2008), 407-460.
- [8] Y. Eliashberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-Principle*, Graduate Studies in Mathematics, 48. AMS, 2002.
- [9] Y. Eliashberg et N. Mishachev, *Wrinkled Embeddings*, Foliations, geometry, and topology ; Contemp. Math., **498** (2009), 207-232.
- [10] Y. Eliashberg and M. Fraser, *Topologically trivial Legendrian knots*, J. Symp. Geom. 7, no. 2, 77-127 (2009).
- [11] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent.Math. 98, no. 3, 623-637 (1989).
- [12] J. Etnyre, *Legendrian and Transversal Knots*, Handbook of Knot Theory, 105-185, Elsevier (2005).
- [13] H. Geiges, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Vol 109, Cambridge University Press, 2008.
- [14] E. Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), 637-677.
- [15] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 9, Springer (1986).
- [16] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer (1976).
- [17] K. Honda, *On the classification of tight contact structures I*, Geom. Topol. 4 (2000), 309-368.
- [18] K. Honda, W. Kazez et G. Matić, *Convex decomposition theory*, Int. Math. Res. Notices 2002, 55-88.
- [19] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, 2nd edition, Oxford Univ. Press (1998).
- [20] J. Milnor, *Morse Theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton (1963).
- [21] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton Univ. Press, Princeton (1965).
- [22] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965), 286–294.
- [23] E. Murphy, *Loose Legendrian Embeddings in High Dimensional Contact Manifolds*, arXiv :1201.2245.