École Normale Supérieure

Introduction au domaine de recherche

rédigé dans le cadre du diplôme de l'École Normale Supérieure

Homologie d'intersection

Sylvain Douteau

11 octobre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Motivations

La dualité de Poincaré est un résultat clé en topologie algébrique. Ce résultat affirme l'existence d'un isomorphisme entre la cohomologie et l'homologie d'une variété compacte orientée, détérminée uniquement par une orientation de la variété. Il permet de mettre en place des invariants importants, tels que la forme d'intersection, et la signature d'une variété, qui sont deux outils indispensables pour la classifications des variétés. Mais, dès lors qu'on considère une variété singulière (par exemple le tore pincé, voir figure 2.1), la dualité de Poincaré n'est plus vérifiée, et ces invariants ne sont plus définis dans le cadre de l'homologie et de la cohomologie singulière. Cependant, certains invariants définis sur les variétés différentielles, liés à la dualité de Poincaré, semblent persister pour des classes beaucoup plus larges d'espaces singuliers, notamment pour les variétés algèbriques singulières [1]. Il est alors apparu naturel d'essayer de restaurer une forme de dualité homologique pour des espaces à singularité. C'est ce que Goresky et MacPherson [2] ont réussi à faire en introduisant l'homologie d'intersection. Leur but est de définir une théorie de l'homologie qui coïncide avec l'homologie singulière sur les variétés, et qui permet d'étendre la dualité de Poincaré à des espaces qu'on on authorise à être plus irrégulier, mais dont on controle les singularités : les pseudo-variétés. Leur premier article [2] atteint partiellement cet objectif, puisqu'un résultat de dualité de Poincaré y est démontré, par des méthodes simpliciales, pour toute pseudo-variété linéaire par morceaux, à condition de considérer des coefficients dans un corps. Par la suite, une approche faisceautique de la théorie est développée [3], elle généralise ce résultat et donne lieu à des applications en topologie géomètrique, mais aussi en géométrie algébrique et arithmétique, notamment en lien avec la théorie de la représentation [4]. Plus récemment, une approche singulière de l'homologie d'intersection a été développée. On peut d'abord citer Friedman et McClure [5], qui démontrent, à l'aide de méthode d'homologie singulière, la dualité de Poincaré pour une pseudo-variété quelconque, puis pour des coefficients dans un anneau [6]. Cette approche a pour intérêt qu'elle permet de comprendre les applications mises en oeuvres (le cap produit par exemple, dans le cas de la dualité de Poincaré) d'un point de vue topologique. C'est cette approche que nous allons présenter ici.

Dualité de Poincaré et invariants

Rappelons d'abord l'énoncé du théorème de dualité de Poincaré (voir [7] pour une preuve) :

Théorème 1. *Dualité de Poincaré Soit X une variété compacte, orientée, de dimension n. Alors il existe un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} D\colon H^i(X) &\to H_{n-i}(X) \\ \alpha &\mapsto \alpha \frown \Gamma_X \end{aligned}$$

où $\Gamma_X \in H_n(X)$ est la classe fondamentale de X qu'on note parfois $[X]$, et où l'opération $\alpha \frown \Gamma_X$ est le cap produit entre α et Γ_X

En se rappelant qu'il existe une structure d'algèbre sur la cohomologie de X donnée par le cap produit :

$$\begin{aligned} \smile\colon H^i(X) \otimes H^j(X) &\to H^{i+j}(X) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \smile \beta \end{aligned}$$

L'isomorphisme D nous permet de définir une opération bilinéaire sur l'homologie de X, c'est le produit d'intersection :

$$\begin{aligned} \cap\colon H_i(X) \otimes H_j(X) &\to H_{i+j-n}(X) \\ \xi \otimes \nu &\mapsto \xi \cap \nu = D^{-1}(D(\xi) \smile D(\nu)). \end{aligned}$$

De plus, dès lors que $n = 4k$, on dispose de la forme bilinéaire symétrique :

$$\cap\colon H_{2k}(X) \otimes H_{2k}(X) \to H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

la signature de cette forme bilinéaire est appelée signature de la variété. C'est un invariant de bordisme. L'homologie d'intersection permet d'étendre ces résultats aux pseudo-variétés [6].

On propose ici une définition des notions de pseudo-variété et d'homologie d'intersection, ainsi qu'une présentation de quelques résultats importants sur l'homologie d'intersection, on donnera finalement un schema de preuve pour la démonstration de la dualité de Poincaré en homologie d'intersection.

Chapitre 2

Définitions

2.1 Pseudo-variété

Avant de définir les pseudo-variétés, nous avons besoin des deux définitions suivantes.

Définition 1 (Espace filtré)**.** Un espace filtré X de dimension n est un espace topologique muni d'une famille croissante de fermé :

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq \cdots \subseteq X^{n-1} \subseteq X^n = X.$$

Les composantes connexes de $X^i \setminus X^{i-1}$ sont appelées les strates de X. Elles sont dites singulières si $i < n$ et régulières lorsque $i = n$.

Définition 2 (Cône d'un espace topologique)**.** Soit X un espace topologique, on appelle cône ouvert de X l'espace $c(X) = X \times [0,1[/\sim$ où $(x,0) \sim (y,0)$ pour tout $x, y \in X$. De plus, si X est un espace filtré, le cône de X hérité de la filtration :

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq \{v\} \subseteq c(X^0) \subseteq \cdots \subseteq c(X^{n-1}) \subseteq c(X^n) = c(X).$$

où v est le sommet du cône.

On peut maintenant définir les pseudo-variétés par récurrence.

Définition 3 (Pseudo-variété)**.** Une pseudo-variété de dimension 0 est une collection finie de points, munie de la topologie discrète. Une pseudo-variété de dimension n est un espace filtré paracompact, séparé, on rappelle sa filtration :

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^{n-1} \subseteq X^n = X$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

- $\forall i, 0 \leq i \leq n$ $\forall x \in X^i \setminus X^{i-1}$ $\exists U \subset X$ un voisinage de x tel que $\exists L$, une pseudo-variété compacte de dimension $n - i - 1$, $\exists \phi$ un homéomorphisme.

  $$\phi : U \to c(L) \times \mathbb{R}^i \tag{2.1}$$

  L est appelé un entrelac.
- ϕ respecte la filtration, c'est à dire :

  $$\phi|_{U \cap X^{i+k}} : U \cap X^{i+k} \to c(L^{k-1}) \times \mathbb{R}^i \tag{2.2}$$

  est un homéomorphisme $\forall k \leq n - i$

– $X^n \setminus X^{n-1}$ est dense dans X, autrement dit, l'union des strates régulières de X est dense dans X.

Exemple 1. Si X est une variété munie de la stratification triviale, c'est une pseudo-variété.

Exemple 2. Le « tore pincé », qu'on peut obtenir comme le lieu des zéros du polynôme : $x^3 + y^3 = xyz$ [8] est une pseudo-variété de dimension 2.

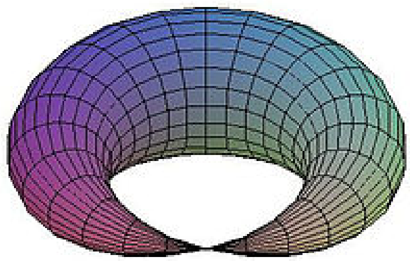

FIGURE 2.1 – Le tore pincé

2.2 Homologie d'intersection

L'idée derrière l'homologie d'intersection est de ne considérer que les simplexes qui se comportent « bien » vis à vis des strates singulières de notre pseudo-variété. En fait, on va controler la taille des intersections des simplexes avec les strates singulières. Pour faire cela, on définit des perversités qui vont nous permettre de quantifier à quel point un simplexe intersecte la partie singulière d'une pseudo-variété.

2.2.1 Perversité

Définition 4 (Perversité)**.** Une perversité sur X est une application :

$$p\colon \{\text{strates singulières de X}\} \to \mathbb{Z}.$$

Exemple 3. On peut donner en exemple deux perversités qui jouent un rôle important en homologie d'intersection :

- la perversité nulle, notée $\bar{0}$ qui vaut 0 sur toutes les strates singulières de X.
- la perversité maximum, notée t pour « top », qui associe à chaque strate singulière $S : t(S) = \text{codim}(S) - 2$.

Le résultat de dualité de Poincaré que nous allons évoquer (et beaucoup d'autre résultats que nous ne mentionnerons pas) fait intervenir la notion de perversité duale.

Définition 5 (Perversité duale)**.** Soit X une pseudo-variété, et p une perversité sur X, alors on appelle perversité duale à p, et on note Dp la perversité qui à une strate S associe :

$$Dp(S) = t(S) - p(S) = \text{codim}(S) - 2 - p(S)$$

2.2.2 Admissibilité et complexe de chaine

Définition 6 (admissibilité d'un simplexe)**.** Soit X une pseudo-variété. Soit σ un simplexe singulier de dimension i de X, et soit p une perversité sur X. On dit que σ est p-admissible si pour toute strate singulière S on a :

$$\sigma^{-1}(S) \subset (i - \text{codim}(S) - p(S))\text{-squelette de } \Delta^i,$$

où Δ^i est le simplexe canonique de dimension i et son j-squelette est l'union de ses faces de dimension j.

Définition 7 (Admissibilité d'une chaine)**.** Soit X une pseudo-variété, soit p une perversité sur X. Soit $\xi \in S_i(X)$ une chaine singulère de degré i sur X. On dit que ξ est p-admissible si :
- ξ est combinaison linéaire de simplexe p-admissible.
- $\partial\xi$ est combinaison linéaire de simplexe p-admissible.

Finalement, puisque $\partial\partial = 0$, on peut définir un sous complexe de chaines : $I^pS_*(X) \subset S_*(X)$ composé des chaines singulières p-admissibles.

2.2.3 Homologie et cohomologie d'intersection

On peut maintenant définir l'homologie et la cohomologie d'intersection à l'aide des complexes de chaines définis plus haut.

Définition 8 (Homologie d'intersection)**.** Soit X une pseudo-variété, soit p une perversité sur X. Alors on définit les groupes d'homologie de X associés à la perversité p comme les groupes d'homologie du complexe de chaines $I^pS_*(X)$. Plus précisement :

$$I^pH_i(X) = \frac{\ker(\partial\colon I^pS_i(X) \to I^pS_{i-1}(X))}{\mathrm{Im}(\partial\colon I^pS_{i+1}(X) \to I^pS_i(X))}. \tag{2.3}$$

De la même façon, on peut définir la cohomologie d'intersection comme l'homologie du complexe de chaine duale. Plus précisement si on note $I_pS^i(X) = \mathrm{Hom}(I^pS_i(X), \mathbb{Z})$ et pour $\alpha \in I_pS^i(X)$ et $\xi \in I^pS_{i+1}(X)$ on note d l'application : $d\colon I_pS^i(X) \to I_pS^{i+1}(X)$ telle que $d\alpha(\xi) = (-1)^i\alpha(\partial\xi)$, alors on peut définir la cohomologie d'intersection comme :

Définition 9. Soit X une pseudo-variété, soit p une perversité sur X, on définit la cohomologie d'intersection de X associé à la perversité p comme :

$$I_pH^i(X) = \frac{\ker(d\colon I_pS^i(X) \to I_pS^{i+1}(X))}{\mathrm{Im}(d\colon I_pS^{i-1}(X) \to I_pS^i(X))} \tag{2.4}$$

Chapitre 3

Propriétés de l'homologie d'intersection

3.1 Formule du cône

L'opération élémentaire sur les pseudo-variétés est la cônification. C'est en conifiant des pseudo-variétés qu'on construit des pseudo-variétés de dimension plus grande. C'est pourquoi il est naturel de se poser la question suivante : quelle est le lien entre l'homologie d'intersection d'une pseudo-variété et celle de son cône ? Contrairement au cas de l'homologie singulière, la réponse à cette question n'est pas triviale. En effet, on dispose du résultat suivant [6] :

Théorème 2. *Soit X une pseudo-variété compacte de dimension n. On munit son cône ouvert de la filtration induite, en notant toujours son sommet v. On note toujours p la perversité induite sur $c(X)$ par p. Plus précisément, pour une strate singulière $S \subset X$, $p(c(S)) = p(S)$. La seule valeur à choisir pour p est donc la valeur $p(\{v\})$. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$I^p H_i(c(X)) \simeq \begin{cases} I^p H_i(X) & \textit{si } i < n - p(\{v\}) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que l'homologie d'intersection n'est pas un invariant d'homotopie, puisque le cône d'un espace topologique est homotope à un point. C'est en revanche un invariant par homotopie stratifiée.

3.2 Invariance par homotopie et homéomorphisme stratifiés

On souhaite définir une notion d'application stratifiée entre deux pseudo-variétés, c'est-à-dire une notion d'application respectant la structure des pseudo-variétés.

Définition 10 (Application stratifié)**.** Soit X et Y deux pseudo-variétés munies des perversités p et q respectivement. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. f est une application (p, q)-stratifiée, si elle vérifie les conditions suivantes :

- si S est une strate de X, il existe une unique strate S' de Y telle que $f(S) \subset S'$ et $\operatorname{codim}(S) = \operatorname{codim}(S')$
- si S est envoyé sur S', alors $p(S) \leq q(S')$

Définition 11 (Homotopie stratifié)**.** Soient X et Y deux pseudo-variétés munies des perversités p et q respectivement. Soient f et g deux application stratifiées de X vers Y. f et g sont homotopes via une homotopie stratifiée si il existe une homotopie H entre f et g telle que l'application $H\colon X \times [0,1] \to Y$ est stratifiée.

Ces applications stratifiées jouent en homologie d'intersection le rôle que jouent les applications continues en homologie singulères. En effet on dispose des résultats suivants :

Propriété 1 (Invariance par homotopie stratifiée)**.** soient X et Y deux pseudo-variétés munies des perversités p et q respectivement. Si il existe deux applications $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to X$ stratifiées telle que fg et gf soient respectivement homotopes à Id_Y et Id_X via des homotopies stratifiées, alors :

$$I^pH_*(X) \simeq I^qH_*(Y).$$

Corollaire 1 (Invariance par homéomorpisme stratifié)**.** *En particulier, si $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme telle que f et f^{-1} sont convenablement stratifiées, alors*

$$I^pH_*(X) \simeq I^qH_*(Y).$$

De plus, il est important de noter qu'à condition de restraindre le choix de perversité, on dispose aussi d'un résultat d'invariance par homéomorphisme, qui nous permet donc de choisir la stratification avec laquelle on calcule l'homologie d'intersection [6].

Théorème 3. *Soit X une pseudo-variété sans strate de codimension 1. Soit p une perversité sur X telle que pour toute strate singulière S de X, $p(S) = p(\mathrm{codim}(S))$, c'est-à-dire que p ne dépend que de la codimension. On impose de plus que $p(i) \leq p(i+1) \leq p(i)+1$ et $p(2) = 0$ (on a alors une perversité de Goresky et MacPherson). Alors, si Y est une autre pseudo-variété sans strate de codimension 1 et $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme, on a l'isomorphisme suivant :*

$$f_*\colon I^pH_*(X) \xrightarrow{\sim} I^pH_*(Y).$$

En particulier, si X est homéomorphe à une variété :

$$I^pH_*(X) \simeq H_*(X)$$

3.3 Mayer-Vietoris et théorème d'excision

On récupère en homologie d'intersection deux résultats importants d'homologie singulière, qui permettent de déduire l'homologie d'intersection d'une pseudo-variété de celle de ces morceaux. (voir Friedman [6] pour des preuves de ces deux résultats)

Théorème 4 (Mayer Vietoris)**.** *Soit X une pseudo-variété munie de la perversité p. Soient $U, V \subset X$ deux ouverts tels que $U \cup V = X$. Alors, on a la suite exacte longue suivante :*

$$\cdots \to I^pH_i(U \cap V) \to I^pH_i(U) \oplus I^pH_i(V) \to I^pH_i(X) \to I^pH_{i-1}(U \cap V) \to \cdots$$

Théorème 5 (Théorème d'excision)**.** *Soit X une pseudo-variété munie de la perversité p, et $K \subset U \subset X$, tels que $\overline{K} \subset \mathring{U}$. Alors l'inclusion de paire induit un isomorphisme :*

$$I^pH_i(X \setminus K, U \setminus K) \simeq I^pH_i(X, U). \tag{3.1}$$

Ces deux résultats peuvent se montrer de manière similaire à leur contrepartie en homologie singulière, c'est-à-dire via des subdivisions barycentriques successives (voir Hatcher [7] pour une preuve en homologie singulière, et Friedman [6] pour une preuve en homologie d'intersection). Il y a cependant une difficulté supplémentaire dans le cas de l'homologie d'intersection puisqu'il faut s'assurer que les chaines qu'on obtient après subdivisions barycentriques sont encore p-admissibles.

Chapitre 4

Dualité de Poincaré et schéma de preuve

4.1 Énoncé du théorème

L'énoncé du résultat de dualité de Poincaré fait intervenir une opération appelée cap produit. Dans le cas de l'homologie singulière, cette application peut être définie directement au niveau des chaines. Cependant, il n'est pas évident qu'une telle application soit encore définie dans le cas de l'homologie et de la cohomologie d'intersection. En fait, si $\mathbb{F}$ est un corps, et si X est une pseudo-variété munie des perversités p, q, et r vérifiant $Dp + Dq \leq Dr$ on a une opération bien définie en homologie et cohomologie d'intersection :

$$\frown : I_q H^i(X;\mathbb{F}) \otimes I^r H_{i+j}(X;\mathbb{F}) \to I^p H_j(X;\mathbb{F}).$$

D'autre part, à condition que X soit compacte et orientable, il existe une correspondance entre les choix d'orientation possibles de X et $I^{\bar{0}} H_n(X;\mathbb{F})$. L'élement correspondant à l'orientation choisie pour une pseudo-variété X est appelé sa classe fondamentale, et noté Γ_X. Ces deux affirmations nous permettent d'énoncer le théorème de dualité de Poincaré pour l'homologie d'intersection.

Théorème 6 (Dualité de Poincaré en homologie d'intersection)**.** *Soit $\mathbb{F}$ un corps. Soit X une pseudo-variété compacte et orientée, alors on a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} D \colon I_p H^i(X;\mathbb{F}) &\xrightarrow{\sim} I^{Dp} H_{n-i}(X;\mathbb{F}) \\ \alpha &\mapsto \alpha \frown \Gamma_X \end{aligned}$$

4.2 Schéma de preuve

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de dimensions en lesquels on trouve des strates singulières. On peut résumer les étapes comme suit :

- Le théorème est vérifié pour les variétés, par la dualité de Poincaré en homologie singulière.
- Sachant le résultat démontré pour une pseudo-variété L, on montre le résultat pour $\mathbb{R}^k \times c(L)$
- Sachant le résultat démontré pour U, V et $U \cap V$, on montre le résultat pour $U \cup V$
- Une pseudo-variété compacte étant une union finie d'ouverts homéomorphe à $\mathbb{R}^k \times c(L)$ on en déduit le théorème.

On va ici présenter les arguments pour les deux points centraux.

4.2.1 $\mathbb{R}^k \times c(L)$

On montre d'abord, par homotopie stratifié :

$$I^{Dp}H_{n-i}(\mathbb{R}^k \times c(L);\mathbb{F}) \simeq I^{Dp}H_{n-i}(c(L);\mathbb{F}).$$

Puis, en utilisant la formule du cône (voir théorème 2) on obtient :

$$I^{Dp}H_{n-i}(\mathbb{R}^k \times c(L);\mathbb{F}) \simeq \begin{cases} I^{Dp}H_{n-i}(c(L);\mathbb{F}) & \text{si } i \geq n - p(\{v\}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut obtenir le même type d'égalité pour la cohomologie d'intersection, ce qui permet de conclure dans le cas où les deux sont nulles. Cependant, lorsque les deux ne sont pas nulles, il est nécessaire de regarder plus précisément par quoi sont donnés ces isomorphismes, pour s'assurer que l'isomorphisme entre homologie et cohomologie est bien donnée par l'application D. On renvoie à Friedman [6] pour la démonstration complète de ce point.

4.2.2 Diagramme commutatif entre suites exactes longues de Mayer-Vietoris

Le troisième point de la preuve peut se ramener à l'étude du diagramme suivant entre deux suites de Mayer Vietoris :

$$\begin{tikzcd}
I_pH^i_c(U\cap V;\mathbb{F}) \arrow[r] \arrow[d, "D^{U\cap V}"'] & I_pH^i_c(U;\mathbb{F}) \oplus I_pH^i_c(V;\mathbb{F}) \arrow[r] \arrow[d, "D^U \oplus -D^V"'] & I_pH^i_c(X;\mathbb{F}) \arrow[r] \arrow[d, "D^X"'] & I_pH^{j+1}_c(U\cap V;\mathbb{F}) \arrow[d, "D^{U\cap V}"'] \\
I^{Dp}H_{n-i}(U\cap V;\mathbb{F}) \arrow[r] & I^{Dp}H_{n-i}(U;\mathbb{F}) \oplus I^{Dp}H_{n-i}(V;\mathbb{F}) \arrow[r] & I^{Dp}H_{n-i}(X;\mathbb{F}) \arrow[r] & I^{Dp}H_{i-1}(U\cap V;\mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

Les groupes de cohomologie sont ici noté avec un indice c qui signifie qu'on considère la cohomologie à support compact. De fait, on a énoncé le théorème pour des pseudo-variétés compactes, mais on a besoin d'étudier les morphismes mis en jeu sur des ouverts (qui ne seront donc pas compacts). Pour contourner cette difficulté, on considère le morphisme D depuis la cohomologie à support compact. Dans ce cas, le résultat de dualité est aussi vrai pour les pseudo-variétés non compactes. Voir Hatcher [7] pour la construction dans le cas de la cohomologie singulière, ou Friedman [6] dans le cas de la cohomologie d'intersection.

Pour montrer qu'on a un isomorphisme $D\colon I_pH^i_c(X;\mathbb{F}) \to I^{Dp}H_{n-i}(X;\mathbb{F})$, il suffit en fait de montrer que ce diagramme commute. Puisque par hypothèse les flèches verticales correspondant à U, V et $U\cap V$ sont des isomorphismes, par le lemme des cinqs, on pourra conclure que le morphisme voulu est un isomorphisme. La commutativité de ce diagramme peut se ramener à la commutativité des trois carrés le composant. Pour les deux carrés de gauche, on peut montrer ce résultat grâce à des considérations simples de compatibilité entre le cap produit et les morphismes induits par les inclusions. Pour le carré de droite en revanche, il est nécessaire de considérer finement ce que font les opérateurs de bord des suites de Mayer-Vietoris. Une fois encore on renvoie à Hatcher[7] et Friedman[6] pour la démonstration complète.

Bibliographie

[1] R. MacPherson, "Chern classes on singular algebraic variety," *Annals of mathematics*, pp. 423–432, septembre 1974.

[2] M. Goresky and R. MacPherson, "Intersection homology theory," *topology Vol 19*, pp. 135–162, 1980.

[3] M. Goresky and R. MacPherson, "Intersection homology ii," *inventiones mathematicae*, vol. 72, pp. 77–129, 1983.

[4] F. Kirwan and J. Woolf, *An introduction to intersection homology theory.* Chapman & Hall/CRC, 2006.

[5] G. Friedman and J. E. McClure, "Cup and cap product in intersection (co)homology," *Advances in mathematics*, vol. 240, pp. 383–426, 2013.

[6] G. Friedman, "Singular intersection homology," Sep 2015. http ://faculty.tcu.edu/gfriedman/IHbook.pdf.

[7] A. Hatcher, *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2001.

[8] C. G. McCrory, *Poincaré Duality in spaces with singularities.* PhD thesis, Brandeis University, 1972.