École normale supérieure

Géometrie kählerienne et fibrés de Higgs

Auteur :
Benoît Cadorel

Maître de stage :
Dr. Richard Wentworth

30 octobre 2014

1 Introduction

Les origines de la géométrie complexe remontent aux travaux de Riemann sur les surfaces construites comme recollement d'ouverts du plan complexe par des applications holomorphes. L'étude de ces surfaces, nommées *surfaces de Riemann* en son honneur, a conduit à l'édification de nouvelles théories, visant notamment à classifier ces surfaces selon leur genre, où à les construire comme quotients d'autres surfaces plus fondamentales. Ces efforts ont notamment abouti au fameux théorème d'uniformisation de Riemann, prouvé rigoureusement par Poincaré en 1907. La généralisation immédiate des surfaces de Riemann aux dimensions supérieures est constituée par la notion de *variété complexe*, objet construit comme recollement holomorphe d'ouverts de $\mathbb{C}^n$. Dans cette optique, une surface de Riemann n'est rien d'autre qu'une variété complexe de dimension 1.

Les surfaces de Riemann sont classées topologiquement par leur genre, qui détermine à lui seul un certain nombre d'invariants de la surface, dits *analytiques*, en ce sens qu'ils ne dépendent que de sa structure de variété complexe. En dimension complexe 1, les liens entre la topologie et la structure analytique d'une variété complexe sont donc très étroits. L'étude de tels liens en dimension supérieure a été l'une des motivations de l'introduction d'une théorie des formes différentielles sur les variétés complexes par Pierre Dolbeault, qui fournit des invariants analytiques sous la forme de groupes de cohomologie. En toute généralité, il n'est pas évident de relier ces groupes de cohomologie de Dolbeault aux invariants topologiques de la variété, par exemple aux groupes de cohomologie de De Rham. Cependant, sous l'hypothèse où la variété est compacte et admet une métrique satisfaisant une certaine condition d'intégrabilité, on peut relier les classes de cohomologie de De Rham à celles de Dolbeault. Cette condition fondamentale est aisée à vérifier en pratique et est satisfaite par une grande classe de variétés complexes, appelées *variétés kähleriennes*, d'après le mathématicien allemand Erich Kähler. Les surfaces de Riemann, ainsi que les sous-variétés des espaces projectifs complexes, sont notamment kähleriennes.

Les variétés complexes se retrouvent maintenant dans des domaines très divers des mathématiques, et il serait vain de chercher à tous les présenter ici. Nous allons nous concentrer plus spécifiquement sur leur apport dans l'étude des représentations des groupes de surfaces. Une surface de Riemann étant donnée, on peut se demander s'il est possible de transcrire la donnée d'une représentation de son groupe fondamental en un objet défini en termes analytiques (i.e. dans le langage de la géométrie complexe). André Weil a pour la première fois étudié ce problème dans [23] (voir aussi [11] pour un résumé des résultats fondamentaux) . Dans le cas des représentations unitaires, un théorème du à Narasimhan et Seshadri ([18], 1965, voir aussi [7]) prouve que les représentations semisimples unitaires du groupe fondamental d'une surface compacte sont reliées aux fibrés holomorphes sur cette surface, moyennant une hypothèse dite de *polystabilité* sur ces fibrés. L'étude du cas général, et non plus seulement unitaire, est plus compliquée, et nécessite d'utiliser la notion de *fibrés de Higgs*, introduite par Hitchin ([14]) pour étudier la réduction d'une certaines classes d'équations de Yang-Mills aux surfaces de Riemann. Les fibrés de Higgs sont des objets définis uniquement dans le cadre de la géométrie complexe, et qui sont reliés aux représentations semisimples du groupe fondamental de la surface sur laquelle ils sont définis, là encore, moyennant une hypothèse de stabilité. Cette correspondance est établie par deux théorèmes fondamentaux, qui en déterminent chacun une direction. On doit à Corlette ([4]) et Donaldson ([8]) la preuve qu'à une représentation semisimple du groupe fondamental peut-être associée un fibré de Higgs *polystable*. La preuve que l'application réciproque est bien définie provient originellement des travaux de Hitchin ([14]), qui a prouvé qu'à un fibré de Higgs polystable de rang 2 sur une surface de Riemann pouvait être associée une représentation du groupe fondamental. Simpson a quant à lui prouvé ce résultat dans [19], pour une classe plus large de variétés complexes, incluant notamment les variétés kähleriennes compactes.

Notre objectif dans ce document sera de présenter la théorie des fibrés de Higgs, ainsi que les théorèmes de Hitchin-Simpson et Corlette-Donaldson, en commençant par introduire les notions de base de la géométrie complexe. A priori, peu de connaissances préliminaires seront nécessaires au lecteur pour en aborder la lecture, moyennant une compréhension élémentaire des principaux concepts de la géométrie différentielle.

2 Géométrie complexe

Fondamentalement, la géométrie complexe consiste en l'étude des *variétés complexes*, objets définis de façon similaire aux variétés différentielles usuelles, par recollement holomorphes d'ouverts de $\mathbb{C}^n$. Pour introduire proprement ces objets, il faut préciser ce que l'on entend par "recollement holomorphe", et, pour cela, définir la notion de fonction holomorphe en plusieurs variables. Ceci permettra de présenter les concepts de la géométrie complexe à partir de ceux de la géométrie différentielle usuelle, que l'on supposera connus.

Les définitions et résultats présentés ici peuvent être trouvés dans n'importe quel ouvrage de référence sur la géométrie complexe ; on pourra se référer par exemple à [24] pour plus de détails.

2.1 Fonctions holomorphes et variétés complexes

Définition 2.1.1. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe en un point* $p = (z_1, ..., z_n)$ si pour tout $i \in \{1, ...n\}$, l'application définie dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ par $\zeta_i \mapsto f(z_1, ..., \zeta_i, ...z_n)$ est holomorphe (au sens usuel) autour de 0. On dit que f est *holomorphe* sur $\mathcal{U}$ si elle est holomorphe en chacun de ses points.

Une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est dite *holomorphe* si toutes ses applications coordonnées le sont.

Pour résumer, une application est holomorphe en un point si elle est localement holomorphe sur toute droite complexe passant par ce point.

De la même façon que dans le cas de la dimension 1, on définit les notions de bijections *biholomorphes* entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, comme étant les bijections holomorphes de réciproque holomorphe. On peut maintenant introduire la notion de variété complexe.

Définition 2.1.2. Une *variété complexe* X de dimension n est la donnée d'un espace topologique sous-jacent X^{top} et d'un *atlas holomorphe* i.e. un couple $((\mathcal{U}_\alpha), (\varphi_\alpha))$, où $(\mathcal{U}_\alpha)$ est un recouvrement ouvert de X^{top} et (φ_α) est une famille d'homéomorphismes de $\mathcal{U}_\alpha$ vers des ouverts de $\mathbb{C}^n$, tels que pour tous α, β avec $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, l'application

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

soit biholomorphe.

On remarque que par oubli de structure, une variété complexe de dimension n peut être considérée comme une variété différentielle de dimension n.

Nous sommes maintenant en mesure d'étendre à la géométrie complexe certaines notions usuelles en géométrie différentielle, et notamment celle de *fibré vectoriel*.

Définition 2.1.3. Soit X une variété complexe. Un *fibré vectoriel holomorphe* de dimension m sur X est la donnée d'un fibré vectoriel complexe $E \xrightarrow{\pi} X$ et d'une famille de trivialisations locales

$$\left((\mathcal{U}_\alpha), (\varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}^m)\right),$$

telles que pour tout (α, β), l'application de transition $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ soit biholomorphe là où elle est définie.

Sur une variété différentielle, on peut introduire un certain nombre de fibrés vectoriels fondamentaux, notamment celui des formes différentielles. Ce fibré s'étend aisément au cas des variétés complexes, en considérant simplement une extension du corps des scalaires. Une forme différentielle α de degré p sur une variété complexe est donc une forme différentielle usuelle de degré p, étant entendu que celle-ci peut prendre des valeurs complexes et non simplement réelles. On notera $\Omega^p(X)$ le fibré lisse des p-formes complexes sur X. Ainsi, si $(\mathcal{U}, \varphi = (z_1, ..., z_n))$ est une carte holomorphe locale, si on introduit les coordonnées complexes $z_j = x_j + iy_j$ et les formes

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j, \tag{1}$$

un repère local pour $\Omega^p(X)$ sur $\mathcal{U}$ est constitué par les p-formes

$$dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_k} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{j_r},$$

où $i_1 < ... < i_k$ et $j_1 < ... < j_r$ avec $r + k = p$. On introduit les fibrés $\Omega^{p,q}(X)$, définis par les repères locaux $(dz_{i_1} \wedge ... \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_{j_q})_{i_1<...<i_p, j_1<...<j_q}$. Il est facile de vérifier que ces repères se recollent pour définir un fibré lisse sur X. On a la relation naturelle

$$\Omega^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X). \tag{2}$$

Définition 2.1.4. Soit E un fibré vectoriel lisse sur X. Le fibré $\Omega^p \otimes E$ (resp. $\Omega^{p,q} \otimes E$) sera noté $\Omega^p(E)$ (resp. $\Omega^{p,q}(E)$) et appelé *fibré des p-formes à valeurs dans E* (resp. (p,q)-formes à valeurs dans E).

Si α est une k-forme, et si $p + q = k$, on notera $\alpha^{(p,q)}$ la projection de α sur le fibré des (p,q)-formes.

2.2 Dérivée extérieure . Opérateur $\bar{\partial}$

On rappelle ici une notion fondamentale en géométrie différentielle, à savoir la notion de dérivée extérieure. En modifiant légèrement cette dérivée pour prendre en compte la structure holomorphe d'une variété complexe, on introduit l'opérateur $\bar{\partial}$, qui sera utile notamment pour construire les invariants cohomologiques d'une variété complexe. Comme précédemment, X désigne une variété complexe de dimension n.

Définition 2.2.1. Il existe un opérateur $d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ tel que pour toute p-forme différentielle α, pour tout système local de coordonnées $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$, où α s'écrit

$$\alpha = \sum_{|I|+|J|=p} \alpha_{IJ} dx_I \wedge dy_J,$$

on ait

$$d\alpha = \sum_{|I|+|J|=p} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial y_i} dy_i \right) \wedge dx_I \wedge dy_J. \tag{3}$$

Soit f une fonction lisse définie sur un ouvert de coordonnées holomorphes $(\mathcal{U}, (z_1, ..., z_n))$ de X. On pose

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - i \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + i \frac{\partial f}{\partial y_i} \right)$$

On remarque en particulier que f est holomorphe sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}$ est identiquement nul pour tout i.

Définition 2.2.2. Il existe des opérateurs $\partial : \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p+1,q}(X)$ et $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{p,q+1}(X)$ tels que pour toute (p,q)-forme α, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de coordonnées $(z_1, ..., z_n)$ où α s'écrit

$$\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \alpha_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

on ait

$$\partial\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \tag{4}$$

et

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J. \tag{5}$$

On vérifie aisément à partir des définitions que $d = \partial + \bar{\partial}$ sur une variété complexe. En décomposant la relation $d^2 = 0$ sur les sommes directes $\Omega^i = \bigoplus_{p+q=i} \Omega^{p,q}$, on déduit les relations suivantes.

Proposition 2.2.1. *On a les identités*

$$\partial^2 = 0, \ \bar{\partial}^2 = 0, \ \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \tag{6}$$

Soit $\mathcal{E}$ un fibré holomorphe sur X, de fibré lisse sous-jacent E. On peut définir un opérateur $\bar{\partial}_{\mathcal{E}} : \Omega^0(E) \to \Omega^{0,1}(E)$ en imposant, pour toute section σ de $\mathcal{E}$ s'écrivant $\sigma = \sum_i \sigma^i \mathbf{e}_i$ dans un repère holomorphe local $(\mathbf{e}_i)$,

$$\bar{\partial}_{\mathcal{E}}\sigma = \sum_i (\bar{\partial}\sigma^i)\mathbf{e}_i.$$

Cette définition ne dépend pas du choix du repère $(\mathbf{e}_i)$, puisque les applications de changement de repères holomorphes g sont telles que l'on ait $\bar{\partial}g = 0$. En outre, on remarque qu'une section σ de E est holomorphe si et seulement si $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}\sigma = 0$. La donnée de la structure holomorphe de $\mathcal{E}$ est donc équivalente à celle de $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}$, comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *Soit E un fibré lisse et soit $\bar{\partial}_0 : E \longrightarrow \Omega^{0,1} \otimes E$ un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire satisfaisant la règle de Leibniz*

$$\bar{\partial}_0(f\sigma) = f\bar{\partial}_0\sigma + (\bar{\partial}f)\sigma, \tag{7}$$

et tel que $\bar{\partial}_0^2 = 0$. Alors il existe un unique fibré holomorphe $\mathcal{E}$ de fibré lisse sous-jacent E, tel que $\bar{\partial}_0 = \bar{\partial}_{\mathcal{E}}$.

2.3 Cohomologies

Pour l'étude des problèmes de classification des variétés complexes, il peut être intéressant d'introduire des invariants algébriques associés à une variété complexe donnée. Une façon fondamentale de construire de tels invariants est d'utiliser des méthodes cohomologiques. On va ici rappeler brièvement la définition de la cohomologie de De Rham d'une variété différentielle, qui permet de construire des invariants reliés à la topologie de cette dernière, avant d'introduire la cohomologie de Dolbeault, associée à une structure de variété complexe.

Définition 2.3.1. La *cohomologie de De Rham* $H^{\cdot}_{DR}(X)$ d'une variété différentielle de dimension m est la cohomologie du complexe $0 \to \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow ... \longrightarrow \Omega^m(X) \to 0$, i.e.

$$H^i_{DR}(X) = \left(\ker d : \Omega^i(X) \longrightarrow \Omega^{i+1}(X)\right) \Big/ \left(\operatorname{im} d : \Omega^{i-1}(X) \longrightarrow \Omega^i(X)\right). \tag{8}$$

Si l'on rajoute à la variété différentielle une stucture de variété complexe, on peut introduire les groupes de cohomologie de Dolbeault.

Définition 2.3.2. Soit X une variété complexe de dimension n, et soient $p, q \in \{1, ..., n\}$. Le *(p,q)-ième groupe de cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}(X)$ est le q-ième groupe de cohomologie du complexe $0 \to \Omega^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(X) \longrightarrow ... \longrightarrow \Omega^{p,n}(X) \to 0$, i.e.

$$H^{p,q}(X) = \left(\ker \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(X) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(X)\right) \Big/ \left(\operatorname{im} \bar{\partial} : \Omega^{p,q-1}(X) \longrightarrow \Omega^{p,q}(X)\right) \tag{9}$$

Alors que les groupes de cohomologie de De Rham sont des invariants topologiques, qui ne dépendent que de la structure de variété différentielle d'une variété complexe X, les groupes de cohomologie de Dolbeault dépendent *a priori* de la structure holomorphe de X.

Il est bien connu que sur une variété différentielle compacte orientable X, les groupes de cohomologie de De Rham sont reliés entre eux par la *dualité de Poincaré* qui stipule que les groupes de cohomologie $H^i_{DR}(X)$ et $H^{n-i}_{DR}(X)$ sont duaux. Dans le cas d'une variété complexe compacte, ce résultat s'étend par la dualité de Serre.

Théorème 1 (*Dualité de Serre*)**.** *Soit X une variété complexe compacte. Alors pour tous $p, q \in \{1, ..., n\}$, les espaces $H^{p,q}(X)$ et $H^{n-p,n-q}(X)$ sont duaux l'un de l'autre.*

Ce théorème peut se démontrer dans une plus grande généralité dans le cadre de la géométrie algébrique (on pourra consulter par exemple [13]). Pour établir la dualité de Serre en restant dans le domaine de la géométrie complexe, on peut faire appel à la théorie de Hodge qui permet d'obtenir et de manipuler des représentants particuliers des classes de cohomologie considérées. Cette preuve, due à Kodaira ([15]), est détaillée notamment dans [24].

2.4 Variétés kähleriennes

En règle générale, il est difficile de trouver des relations entre les groupes de cohomologie de De Rham et les groupes de cohomologie de Dolbeault. Cependant, il existe une classe de variétés complexes pour lesquelles ces deux cohomologies sont reliées de façon naturelle.

On rappelle qu'une *métrique* h sur une variété différentielle X est la donnée en tout point $p \in X$ d'un produit scalaire sur l'espace tangent en p, noté $T_p(X)$, dont les composantes h_{ij} varient de façon lisse dans un système de coordonnées locales où h s'écrit $h = \sum_{ij} h_{ij} dx_i \otimes dx_j$. En géométrie différentielle usuelle, il est bien connu qu'on peut trouver en tout point un système de coordonnées *lisses*, dit *normal*, dans lequel on a $h = \mathbf{I} + O(|x|^2)$. On va maintenant distinguer les variétés complexes pour lesquelles on peut trouver un tel système de coordonnées *holomorphes*.

Une *métrique hermitienne* h sur une variété complexe X est la donnée d'un produit scalaire hermitien en tout point p sur l'espace tangent $T_p^{\mathbb{C}}(X)$, variant de façon lisse sur la variété. Remarquons que $T_p^{\mathbb{C}}(X)$ est un espace vectoriel complexe, que l'on peut introduire de façon similaire au cas différentiel, en le définissant par exemple comme le dual de l'espace des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en p (on a en particulier $\dim T_p^{\mathbb{C}}(X) = \dim X$ en tout point p). On vérifie aisément que dans un système de coordonnées complexes $(z_1, ..., z_n)$, on peut écrire

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j,$$

où (h_{ij}) est une matrice hermitienne définie positive.

Définition 2.4.1. Soit X une variété complexe. On dira qu'une métrique hermitienne h sur X est *kählerienne* si pour tout $p \in X$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de coordonnées holomorphes $(z_1, ..., z_n)$, centrées en p, dans lesquelles h s'écrit, si on note $(\zeta_1, ..., \zeta_{2n}) = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$,

$$h = \sum_{i,j} (\mathbf{I}_{i,j} + O(|\zeta|^2)\, d\zeta_i \otimes d\zeta_j.$$

On dira qu'une variété complexe est *kählerienne* si elle admet une métrique kählerienne.

La propriété d'être kählerienne pour une variété complexe peut sembler délicate à vérifier. On peut la remplacer par une condition plus aisément manipulable grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *[6] Soit h une métrique hermitienne sur X. Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de coordonnées holomorphes $(z_1, ..., z_n)$, dans lesquelles h s'écrit $h = \sum_{ij} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j$, on pose*

$$\Omega_{\mathcal{U}} = \frac{i}{2} \sum_{ij} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j \in \Omega^{1,1}(\mathcal{U}). \tag{10}$$

Alors les $\Omega_{\mathcal{U}}$ se recollent en une $(1,1)$-forme Ω, réelle (i.e. telle que $\bar{\Omega} = \Omega$). En outre, on a $d\Omega = 0$ si et seulement si h est kählerienne.

Le fait que les définitions locales de Ω se recollent pour donner une forme globalement définie est aisé à vérifier, tout comme le fait que Ω est réelle. Le fait que h soit kählerienne implique trivialement que Ω est fermée. Pour montrer la réciproque, on recherche un autre système de coordonnées $\zeta_j = z_j + \sum_{kl} a_{jkl} z_k z_l$, où les a_{jkl} sont des constantes. En écrivant la condition $d\Omega = 0$ dans les coordonnées (z_j), on en déduit qu'on peut trouver des (a_{jkl}) telles que les dérivées premières de h par rapport aux ζ_i soient nulles en p.

Cette proposition permet de trouver de nombreux exemples de variétés kähleriennes, par sa facilité de vérification. Cependant, elle impose une restriction importante sur les groupes de cohomologie de Dolbeault, puisqu'on a la propriété suivante.

Théorème 2. *[24, 6] Soit X une variété kählerienne compacte. Pour tout i, on a des isomorphismes*

$$H^i_{DR}(X) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X). \tag{11}$$

La démonstration de ce résultat utilise des méthodes d'analyse harmonique. Une métrique kählerienne étant donnée, l'idée est de définir un produit scalaire hermitien sur les formes différentielles, pour lequel les décompositions $\bigoplus \Omega^{p,q}$ sont orthogonales, puis de rechercher dans chaque classe de cohomologie de De Rham un représentant α dit *d-harmonique*, i.e. tel que $d^*\alpha = 0$, où d^* est l'adjoint de d pour les produits scalaires définis sur les $\Omega^i(X)$.

On a alors des isomorphismes

$$\ker d^i \Big/ \mathrm{im}\, d^{i-1} \simeq \ker d^i \cap \ker(d^{i-1})^* \simeq \ker(dd^* + d^*d) \cap \Omega^i(X). \tag{12}$$

On procède de même pour la cohomologie de Dolbeault, et en introduisant les opérateurs de Laplace $\Delta = dd^* + d^*d$ et $\Delta_{\bar\partial} = \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$, on obtient des isomorphismes $H^i_{DR}(X) \simeq \ker \Delta|_{\Omega^i}$ et $H^{p,q}(X) \simeq \ker \Delta_{\bar\partial}|_{\Omega^{p,q}}$. À présent, on peut utiliser le fait que la métrique h, servant à définir les opérateurs Δ et $\Delta_{\bar\partial}$ (par le biais des adjoints d^* et $\bar\partial^*$), est kählerienne, pour prouver la relation fondamentale suivante

$$\Delta = 2\Delta_{\bar\partial}. \tag{13}$$

On peut en déduire que les formes d-harmoniques se décomposent de façon unique en sommes orthogonales de formes $\bar\partial$-harmoniques, ce qui donne l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^i_{DR}(X) &\simeq \ker \Delta|_{\Omega^i} \\ &\simeq \bigoplus_{p+q=i} \ker \Delta|_{\Omega^{p,q}} \\ &\simeq \bigoplus_{p+q=i} \ker \Delta_{\bar\partial}|_{\Omega^{p,q}} \\ &\simeq \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X). \end{aligned}$$

Exemple. Soit X une surface de Riemann (i.e. une variété complexe de dimension 1), compacte. On peut toujours munir X d'une métrique h dont l'expression locale sera de la forme $h = g dz \otimes d\bar z$, où g est une fonction lisse à valeurs réelles. L'expression locale de Ω est donc $\Omega = \frac{i}{2} g dz \wedge d\bar z = g dx \wedge dy$. Puisque $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$, Ω est trivialement fermée, donc X est kählerienne. De fait, on a les décompositions du théorème 2.4. On peut montrer facilement qu'une forme α est *harmonique* (i.e. d-harmonique et $\bar\partial$-harmonique) si et seulement si $\bar\partial\alpha = 0$ et $\partial\alpha = 0$. Alors on a $H^0_{DR} = H^{0,0} = \{\text{fonctions constantes sur } X\} = \mathbb{C}$, $H^2_{DR} = H^{1,1} = \mathbb{C} \cdot [\Omega]$, et

$$H^1_{DR} = H^{1,0} \oplus H^{0,1} \simeq \left\{\alpha \in \Omega^{1,0}, \bar\partial\alpha = 0\right\} \oplus \left\{\alpha \in \Omega^{0,1}, \partial\alpha = 0\right\}.$$

Ces deux derniers espaces sont isomorphes par $\alpha \mapsto \bar\alpha$, ce qui donne $\dim H^{1,0} = \frac{1}{2} \dim H^1_{DR} = g$, où g est le genre de la surface X. On dira qu'une forme différentielle α est *holomorphe* si $\bar\partial\alpha = 0$. On vient de prouver que, sur une surface de Riemann, il y a exactement g $(1,0)$-formes holomorphes linéairement indépendantes, et qu'en particulier, le nombre de formes holomorphes linéairement indépendantes est un invariant *topologique* de la surface.

3 Représentations de groupes de surfaces et fibrés de Higgs

On va maintenant aborder l'étude des représentations des groupes fondamentaux d'une surface de Riemann, i.e. des morphismes $\pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, où X est une surface de Riemann, et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On verra que cette étude peut se ramener à un problème de recherche de connexions sur un fibré vectoriel. En imposant une structure holomorphe sur ce fibré, on verra apparaître la notion de fibré de Higgs, notion purement issue de la géométrie complexe, qui sera ainsi reliée au problème, algébrique, de l'étude des représentations de $\pi_1(X)$.

Pour une présentation générale de la théorie des fibrés de Higgs, et de leurs liens avec les connexions plates et les représentations de groupes de surfaces, on pourra se référer à [25].

3.1 Connexions et métriques

On rappelle ici la notion de connexion, qui consiste essentiellement en l'établissement d'une règle de dérivation des sections d'un fibré vectoriel lisse donné. Pour commencer, on se placera sur une variété complexe X de dimension $n \geq 1$.

Définition 3.1.1. Une *connexion* sur un fibré vectoriel lisse $E \longrightarrow X$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$, satisfaisant la règle de Leibniz suivante, pour toutes sections $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, $s \in E$:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s. \tag{14}$$

La règle de Leibniz permet de définir, à partir d'une connexion donnée, des applications $\Omega^p \otimes E \longrightarrow \Omega^{p+1} \otimes E$, que l'on notera aussi ∇.

Proposition 3.1.1. *L'application $F_\nabla = \nabla^2 : E \longrightarrow \Omega^2 \otimes E$ est une section de $\Omega^2 \otimes \operatorname{End} E$, appelée* courbure *de la connexion ∇.*

On a alors la propriété suivante, qui détermine un invariant fondamental des fibrés lisses sur une surface de Riemann.

Proposition 3.1.2. *Soit ∇ une connexion sur un fibré. La classe de cohomologie de la forme $\frac{i}{2\pi} \operatorname{Tr} F_\nabla \in \Omega^2(X)$ ne dépend pas de la connexion ∇. On l'appelle* première classe de Chern *du fibré E. Sur une surface de Riemann, sa donnée est équivalente à celle de l'intégrale $\int_X \frac{i}{2\pi} \operatorname{Tr} F_\nabla$, qui appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.*

À rang fixé, la première classe de Chern détermine uniquement et est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme lisse du fibré E. On la note $c_1(E)$.

Définition 3.1.2. On appelera *degré du fibré lisse E* le nombre entier $\deg E = \int_X c_1(E)$.

Définition 3.1.3. Une *métrique hermitienne h sur un fibré lisse* est la donnée d'un produit scalaire hermitien $\langle , \rangle_p$ sur chaque fibré E_p, telle que pour toutes sections lisses η, ξ de E, la fonction $\langle \eta, \xi \rangle$ soit lisse.

Une métrique permet de définir des applications sesquilinéaires $\Omega^p(E) \otimes \Omega^q(E) \longrightarrow \Omega^{p,q}$, en définissant localement, pour toute p-forme ω, q-forme η, et pour toutes sections s_1, s_2 de E :

$$\langle \omega \otimes s_1, \eta \otimes s_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle \, \omega \wedge \bar{\eta}.$$

Définition 3.1.4. Soit $\mathcal{E}$ un fibré lisse. On dit qu'une connexion ∇ est *compatible* avec une métrique h sur ce fibré si pour toutes sections η, ξ de E, on a

$$d \langle \eta, \xi \rangle = \langle \nabla \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla \xi \rangle . \tag{15}$$

On dira aussi que la connexion est *unitaire pour la métrique h*, ou simplement *unitaire* s'il n'y a pas d'ambiguité possible.

On a maintenant la proposition fondamentale suivante, qui rend équivalentes, une métrique h étant donnée, la donnée d'une structure de fibré holomorphe sur un fibré lisse E et la donnée d'une connexion unitaire.

Proposition 3.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ un fibré holomorphe sur X, muni d'une métrique h. Il existe une unique connexion unitaire $d_{(\bar\partial_\mathcal{E}, h)}$ sur $\mathcal{E}$, appelée* connexion de Chern *de $(\bar\partial_\mathcal{E}, h)$, telle que $\nabla^{0,1} = \bar\partial_\mathcal{E}$, i.e. telle que pour toute section s du fibré lisse sous-jacent à $\mathcal{E}$, on ait*

$$\left[d_{(\bar\partial_\mathcal{E}, h)} s \right]^{0,1} = \bar\partial_\mathcal{E} s.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'écrire, dans une trivilisation locale σ de E, $\nabla \overset{\sigma}{=} d + A$, où d est la dérivée extérieure usuelle, et A est une matrice de 1-formes à valeurs dans E. En exprimant les conditions recherchées sur ∇, on obtient des équations déterminant uniquement la matrice A, ce qui prouve le résultat.

3.2 Représentations de groupes de surfaces et connexions plates

On s'intéresse maintenant au lien entre connexions et représentations de groupes de surfaces. À partir de ce point X désignera une surface de Riemann, i.e. une variété complexe de dimension 1.

On considère un fibré vectoriel lisse E de rang n sur X, que l'on suppose trivial, i.e. isomorphe à $\mathbb{C}^n$. Une connexion ∇ sur E est dite *plate* si sa courbure F_∇ est nulle. Soit ∇ une telle connexion. Fixons un point p de X, et soit γ un lacet basé en p. Alors pour tout vecteur $v \in E_p$, on peut *transporter parallèlement* v par rapport à ∇ le long de γ, i.e. résoudre en s l'équation $\nabla(s(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$ avec condition initiale $s(0) = v$, pour obtenir un vecteur $s(1) \in E_p$. La platitude de ∇ implique que $s(1)$ ne varie pas si l'on remplace γ par un lacet lui étant homotope. À une classe d'homotopie $[\gamma] \in \pi_1(X,p)$, on a ainsi associé un endomorphisme $\mathrm{hol}_\nabla(\gamma)$ de E_p, dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Par ailleurs, on a la règle de composition $\mathrm{hol}_\nabla(\gamma \cdot \zeta) = \mathrm{hol}_\nabla(\gamma) \circ \mathrm{hol}_\nabla(\zeta)$. Si l'on fixe une base de E_p, on peut considérer que hol_∇ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

En résumé, à une connexion plate ∇ sur le fibré E, on a associé une représentation de groupes $\mathrm{hol}(\nabla) : \pi_1(X,p) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, à un choix de base de E_p près. Voyons maintenant ce qu'il en est de la réciproque.

Soit $\rho : \pi_1(X,p) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation de groupes. Pour déterminer un antécédant (E, ∇) de ρ pour l'application hol, raisonnons par condition nécessaire et supposons que l'on ait trouvé un fibré vectoriel E trivial lisse muni d'une connexion plate ∇ telle que $\mathrm{hol}_\nabla = \rho$, une base de E_p convenable étant fixée. Soit $\tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X, et soit $\tilde{p}$ un point de $\tilde{X}$ au-dessus de p. La connexion ∇ étant plate, on peut tirer en arrière les sections plates (i.e. les sections satisfaisant $\nabla(s) = 0$), sur $\tilde{X}$, pour former un fibré trivial $\mathbb{C}^n \longrightarrow \tilde{X}$, dont les sections e_i du repère naturel sont plates, et telles que $(e_i(\tilde{p}))$ soit égal à la base de E_p que l'on s'est fixé initialement.

On remarque alors que si γ est un lacet basé en p, et si $v \in E_{\tilde{p}}$, la section de $\mathbb{C}^n \longrightarrow \tilde{X}$ identiquement égale à v représente une section plate, donc le vecteur $v \in E_{\tilde{p}}$ doit être identifié avec $v \cdot \rho(\gamma) \in E_{\tilde{p}\cdot\gamma}$. Ceci indique que $E \simeq \tilde{X} \times \mathbb{C}^n \big/ \equiv$, où $\equiv$ est la relation d'équivalence définie par $(x, v\rho(\gamma)) \equiv (x \cdot \gamma, v)$. Ceci fournit la réciproque de l'application hol : étant donnée une représentation ρ de $\pi_1(X,p)$, on construit E comme précédemment, et on définit les sections plates de ∇ comme étant les passages au quotient des sections localement constantes de $\tilde{X}$ (il est facile de vérifier que la donnée d'une connexion plate est équivalente à celle de ses sections plates). Là encore, ∇ est définie à un choix de base de E_p près. En outre on vérifie que le fibré E ainsi obtenu est trivial en tant que fibré lisse.

Notons $\mathcal{C}_E^{plat}$ l'espace des connexions plates sur le fibré E. On a une relation d'équivalence naturelle sur $\mathcal{C}_E^{plat}$, donnée par

$$\nabla \sim \nabla' \text{ s'il existe } g \in \mathrm{GL}(E) \text{ avec } g(p) = \mathbf{I}_{E_p} et\ \nabla = g\nabla' g^{-1}.$$

Les deux applications que l'on vient de détailler passent au quotient de $\mathcal{C}_E^{plat}$ par $\sim$, et sont alors réciproques l'une de l'autre, ce qui fournit la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *On a un homéomorphisme*

$$\mathrm{hol} : \mathcal{C}_E^{plat} \big/ \sim \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(X,p), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})). \tag{16}$$

3.3 Fibrés de Higgs

On a réussi à convertir la donnée d'une représentation du groupe $\pi_1(X,p)$ en celle d'une connexion plate sur le fibré E. Notre objectif, à présent, va être de déterminer cette connexion à partir de concepts exprimables uniquement dans le langage de la géométrie complexe.

Pour cela, fixons une métrique hermitienne h sur le fibré lisse trivial E. On remarque alors que pour toute connexion plate ∇, il existe une unique décomposition $\nabla = d_A + \Psi$, où d_A est une connexion unitaire pour h, et $\Psi \in \Omega^1(X, \mathrm{Herm}(E))$ est une 1-forme à valeurs dans les endomorphismes hermitiens de E. Par la proposition 3.1.3, on sait que, h étant fixée, la donnée de d_A est équivalente à celle d'une structure holomorphe sur le fibré E. En outre, on a une décomposition unique $\Psi = \Phi + \Phi^*$, où $\Phi \in \Omega^{1,0}(X, \mathrm{End}(E))$.

La connexion ∇ nous donne ainsi, par le biais de cette décomposition, accès à une structure complexe $\bar{\partial}_\mathcal{E}$ sur E et à une section $\Phi \in \Omega^{1,0}(X, \mathrm{End}(E))$, tels que $\nabla = d_{(\bar{\partial}_\mathcal{E}, h)} + \Phi + \Phi^*$. On va voir plus tard que dans la plupart des cas intéressants, on peut choisir h pour imposer une condition d'holomorphicie sur Φ, ce qui nous conduit à la définition suivante.

Définition 3.3.1. Un *fibré de Higgs* sur X est la donnée d'un couple $(\mathcal{E}, \Phi)$, où $\mathcal{E}$ est un fibré holomorphe, et $\Phi \in \Omega^{1,0}(X, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$ est une $(1,0)$-forme holomorphe (i.e. telle que $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}\Phi = 0$) à valeurs dans les endomorphismes du fibré $\mathcal{E}$. On appelle Φ le *champ de Higgs* de $(\mathcal{E}, \Phi)$.

On va voir qu'on peut établir une correspondance entre certains fibrés de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$ et certaines connexions plates ∇. La principale question va être de déterminer à quelle condition sur ∇ il sera possible de trouver une métrique h telle que le couple $(\mathcal{E}, \Phi)$ obtenu par la décomposition précédente satisfasse $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}\Phi = 0$. Pour l'autre sens de la correspondance, étant donné un fibré de Higgs, il va falloir déterminer à quelle condition sur $(\mathcal{E}, \Phi)$ il est possible de trouver une métrique h pour reconstruire une connexion $\nabla = d_{(\bar{\partial}_{\mathcal{E}}, \Phi)} + \Phi + \Phi^*$ plate.

3.4 Obtention de ∇ à partir de $(\mathcal{E}, \Phi)$. Théorème de Hitchin-Simpson

On voit que pour établir la correspondance évoquée précedemment, il faut déterminer dans les deux cas une condition pour trouver une métrique h convenable sur un fibré donné.

Commençons par établir comment reconstruire ∇ à partir de $(\mathcal{E}, \Phi)$. On se place sur un fibré lisse trivial E, que l'on munit d'une structure de fibré de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$. Soit h une métrique hermitienne sur $\mathcal{E}$, et notons $A = (\bar{\partial}_{\mathcal{E}}, h)$, $F_A = d_A^2$ la courbure de la connexion de Chern de $(\mathcal{E}, h)$. Alors $\nabla = d_A + \Phi + \Phi^*$ est plate si et seulement si

$$F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0, \tag{17}$$

où $[\Phi, \Phi^*] = \Phi \wedge \Phi^* + \Phi^* \wedge \Phi$.

On peut exprimer l'équation (17) dans une plus grande généralité si on ne suppose plus que le fibré lisse sous-jacent à $\mathcal{E}$ est trivial.

Définition 3.4.1. Soit $(\mathcal{E}, \Phi)$ un fibré de Higgs, tel que $\deg \mathcal{E} = d$. On dit qu'une métrique hermitienne h sur $\mathcal{E}$ *satisfait l'équation de Hitchin* si

$$\sqrt{-1}(F_A + [\Phi, \Phi^*]) = \frac{\deg \mathcal{E}}{\mathrm{rg}\, E}\mathbf{I}_E \omega,$$

où ω est une $(1,1)-$forme associée à une métrique kählerienne sur X par la proposition 2.4.1, et normalisée de sorte à avoir $\int_X \omega = 2\pi$.

Le critère d'existence d'une métrique satisfaisant les équations d'Hitchin-Simpson est connu : il s'agit de la *polystabilité*.

Définition 3.4.2. On dit qu'un fibré de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$ est *stable* si et seulement si pour tout sous-fibré holomorphe $0 \subsetneq \mathcal{V} \subsetneq \mathcal{E}$ tel que $\Phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V} \otimes \Omega^{1,0}$, on a

$$\frac{\deg V}{\mathrm{rg}\, V} < \frac{\deg E}{\mathrm{rg}\, E}.$$

On dit qu'un fibré de Higgs est *polystable* s'il s'écrit comme somme directe $(\mathcal{E}, \Phi) = \bigoplus_i (\mathcal{E}_i, \Phi_i)$, tel que $(\mathcal{E}_i, \Phi_i)$ soit stable pour tout i, avec

$$\frac{\deg E_i}{\mathrm{rg}\, E_i} = \frac{\deg E}{\mathrm{rg}\, E}.$$

On a alors le théorème suivant, qui fournit un sens de la correspondance recherchée.

Théorème 3 (Hitchin [14], Simpson [19])**.** *Un fibré de Higgs $(\mathcal{E}, \Phi)$ admet une métrique h satisfaisant les équations de Hitchin si et seulement s'il est polystable.*

Ce théorème a été démontré pour la première fois par Hitchin dans [14] dans le cas des surfaces de Riemann, avec un fibré de Higgs de rang 2. Une démonstration générale est fournie par Simpson ([19]) pour une classe de variétés kähleriennes de dimension quelconque, incluant notamment les variétés compactes, et avec un fibré de rang quelconque. Il est relativement aisé de montrer le sens direct du théorème. L'idée de base, pour prouver la réciproque, est de choisir une suite de métriques minimisant la fonctionnelle $\mathrm{YMH}(H) = \int_X |F_A + [\Phi, \Phi^*]|^2$, puis d'utiliser l'hypothèse de polystabilité pour montrer la convergence de cette suite vers une métrique limite, satisfaisant les équations de Hitchin.

3.5 Obtention de $(\mathcal{E}, \Phi)$. Théorème de Corlette-Donaldson

3.6 Obtention de $(\mathcal{E}, \Phi)$. Théorème de Corlette-Donaldson

Nous allons maintenant étudier la réciproque de la correspondance introduite à la section 3.3, en déterminant pour quelles connexions ∇ plates, il est possible de trouver une métrique hermitienne h leur associant une structure $(\mathcal{E}, \Phi)$ avec $\bar{\partial}_{\mathcal{E}} \Phi = 0$.

Définition 3.6.1. On dit qu'une métrique hermitienne h sur un fibré trivial avec connexion plate (E, ∇) est *harmonique*, si la structure $(\mathcal{E}, \Phi)$ associée est une structure de fibré de Higgs, i.e. si on a $\bar{\partial}_{\mathcal{E}} \Phi = 0$.

La réponse à notre problème est fournie par le *théorème de Corlette-Donaldson*, que nous allons maintenant énoncer. On rappelle qu'une représentation de groupes $G \xrightarrow{\rho} \mathbf{GL}(V)$ est dite *semi-simple* si elle s'écrit comme somme directe de représentations irréductibles.

Théorème 4 (Corlette [4], Donaldson [8]). *Une connexion ∇ plate sur un fibré lisse E admet une métrique harmonique si et seulement si la représentation du groupe $\pi_1(X, p)$ associée est semi-simple.*

L'argument de base pour prouver ce résultat est de commencer par prouver qu'une métrique est harmonique si et seulement si elle minimise une certaine fonctionnelle E_ρ, appelée *fonctionnelle d'énergie*. On peut alors montrer que cette fonctionnelle admet une suite minimisante de métriques. L'hypothèse selon laquelle la représentation de groupe est semi-simple permet ensuite d'obtenir un module de Lipschitz uniforme sur la suite de métriques, ce qui autorise à appliquer le théorème d'Ascoli pour obtenir une limite uniforme à la suite de métriques. Pour terminer la preuve du théorème, il reste à écrire la condition d'harmonicité sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, à laquelle on applique une méthode de *bootstrapping* pour montrer que la métrique limite en est bien solution.

3.7 Espaces modulaires

Les théorèmes de Hitchin-Simpson et Corlette-Donaldson permettent d'établir une correspondance entre fibrés de Higgs polystables de degré 0 (i.e. de fibré lisse sous-jacent trivial) et fibrés lisses triviaux avec connexions plates définissant une représentation semi-simple.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}, \Phi) \text{ polystable de degré } 0 & \underset{\text{Hitchin-Simpson}}{\xrightarrow{\exists H}} & \underset{F_A + [\Phi, \Phi^*] = 0}{(\mathcal{E}, \Phi, H)} \\ & & \updownarrow \\ (E, \nabla) \text{ avec } \rho \text{ semi-simple} & \underset{\text{Corlette-Donaldson}}{\xrightarrow{\exists H}} & \underset{d_A^{(0,1)} \Psi^{(1,0)} = 0}{(E, \nabla, H)} \end{array}, \tag{18}$$

où l'on a utilisé $\nabla = d_A + \Psi$ avec d_A unitaire, et $\Psi = \Phi + \Phi^*$.

On peut exprimer cette correspondance sous la forme d'un isomorphisme d'*espaces modulaires*. Ces espaces modulaires sont construits à partir des classes d'isomorphismes des structures considérées (en l'occurence, des fibrés de Higgs, et des représentations de groupes de surfaces). Cependant, pour éviter des problèmes de séparation des espaces modulaires, il faut considérer une relation d'équivalence un peu plus large que la relation d'isomorphisme pour construire ces espaces. La construction de tels espaces modulaires est l'objet de la Théorie des Invariants Géométriques (GIT), introduite par Mumford ([17]). Pour nos objectifs, il suffira de comprendre ces espaces comme les classes d'isomorphismes des fibrés polystables ou des représentations semi-simples que nous avons considérées.

Soit E un fibré lisse trivial. On définit l'*espace modulaire de Dolbeault* associé au fibré E par

$$\mathcal{M}_D(E) = \{\text{stuctures de fibrés de Higgs polystables sur} E\} \Big/ \mathbf{GL}(E),$$

où l'on pose que $(\bar{\partial}_{\mathcal{E}_1}, \Phi_1) \equiv (\bar{\partial}_{\mathcal{E}_1}, \Phi_2)$ sous l'action de $\mathbf{GL}(E)$ s'il existe $g \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $\bar{\partial}_{\mathcal{E}_1} = g^{-1}\bar{\partial}_{\mathcal{E}_2} g$ et $\Phi_1 = g^{-1}\Phi_2 g$.

La correspondance établie précédemment va nous donner un isomorphisme entre cet espace et l'espace des classes d'isomorphismes des représentations semi-simples de $\pi_1(X,p)$, à savoir l'*espace modulaire de Betti*, défini par

$$\mathcal{M}_B^n = \{\text{représentations semi-simples } \pi_1(X,p) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})\} \Big/ \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}),$$

où $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ agit sur les représentations semi-simples par conjugaison.

On a alors l'isomorphisme annoncé.

Théorème 5. *On a un homéomorphisme*

$$\mathcal{M}_D(E) \simeq \mathcal{M}_B^n,$$

où $n = \operatorname{rg} E$.

On a ainsi obtenu une manière différente de considérer l'espace modulaire des représentations de groupes, sous la forme d'objets appartenant au domaine de la géométrie complexe. Cette correspondance forme une source importante d'idées pour aborder des problèmes concernant l'un ou l'autre de ces domaines, puisqu'elle incite à considérer ces problèmes en les voyant de l'autre point de vue.

Ainsi, une classe particulière de représentations de groupes étant donnée, on peut tenter de déterminer à quels fibrés de Higgs elles correspondent. On sait par exemple que les représentations unitaires $\pi_1(X) \longrightarrow U(n)$ semisimples sont associées, par le théorème de Narasimhan-Seshadri (voir [18, 7]), aux fibrés holomorphes polystables. Les fibrés de Higgs correspondants sont donc simplement ceux pour lesquels le champ de Higgs Φ est nul. On a déterminé la structure des fibrés de Higgs associés aux représentations de la forme $\pi_1(X) \longrightarrow G$ pour un certain nombre de sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ – on citera notamment le cas du sous-groupe $\mathrm{U}(p,q)$ (voir [3], ou l'appendice de [24] pour un résumé des résultats fondamentaux).

De même, on peut chercher à transcrire une notion ayant trait aux fibrés de Higgs sous la forme d'une question reliée aux représentations de groupes. Par exemple, on peut considérer l'action suivante de $\mathbb{C}^*$ sur les fibrés de Higgs polystables :

$$\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^*,\ (\mathcal{E}, \Phi) \mapsto (\mathcal{E}, \lambda\Phi). \tag{19}$$

On peut maintenant tenter de déterminer l'action équivalente de $\mathbb{C}^*$ sur les représentations semi-simples de $\pi_1(X)$. On peut retrouver une étude de cette action, et notamment la recherche de points fixes *via* la notion de variation de structure de Hodge, dans l'article [21] de Simpson.

Références

[1] Michael F. Atiyah, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308 (1982) 523-615.

[2] Olivier Biquard, *Fibrés paraboliques stables et connexions singulières plates*, Bull. Soc. Math. France 119(2), 231-257, 1991.

[3] Steven B. Bradlow, Oscar Garcia-Prada et Peter B. Gothen, *Surface groups representations and* U(p, q)-*Higgs bundles*, J.Differential. Geom. 64 (2003), 111-170.

[4] Kevin Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geometry, 28 (1988) 361-382

[5] Georgios D. Daskalopoulos, Richard A. Wentworth, *Convergence properties of the Yang-Mills flow on Kähler surfaces*, Journal for die reine und angewandte Mathematik, 575, 69-99, 2004

[6] Jean-Pierre Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*

[7] Simon K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Differential Geometry, 18 (1983) 269-277

[8] Simon K. Donaldson, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math, 1985

[9] James Eells, Jr. and John H. Sampson, *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, American Journal of Mathematics, Vol. 86, No. 1, pp. 109-160, 1964

[10] Oscar Garcia-Prada, *Moduli spaces and Geometric structures*, Springer, Appendix of *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 2007.

[11] Alexandre Grothendieck, *Sur le mémoire de Weil "Généralisation des fonctions abéliennes"*, Séminaire Bourbaki, Exposé 141, (1956-57)

[12] Philip Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Canad. J. Math. 19(1967), 673-687

[13] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977

[14] Nigel J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987) 59-126.

[15] Kunihiko Kodaira, *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 1268-1273

[16] Robert B. Lockart, Robert C. McOwen, *Elliptic differential operators on noncompact manifolds*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 12 (1985) 409-447.

[17] David Mumford, John Fogarty, Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, 3rd edition, Springer, 1994

[18] Mudumbai S. Narasimhan, Conjeevaram S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Annals of Mathematics. Second Series 82 : 540-567

[19] Carlos T. Simpson, *Constructing variations of Hodge structures using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, Journal of the AMS, 1988

[20] Carlos T. Simpson, *Harmonic bundles on noncompact curves*, Journal of the AMS, Volume 3, Number 3, 1990

[21] Carlos T. Simpson, *Higgs bundles and local systems*, Ins. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 78, 5-95 (1992)

[22] Karen K. Uhlenbeck, *Connections with L^p Bounds on Curvature*, Commun. Math. Phys. 83, 31-42, 1982

[23] André Weil, *Généralisation des fonctions abéliennes*, J. Math. Pures et Appl., 17 (1938), 47-87.

[24] Raymond O. Wells, Jr., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer, 3rd Edition, 2007.

[25] Richard A. Wentworth, *Higgs bundles and local systems on Riemann surfaces*, Notes de cours, http ://www2.math.umd.edu/ raw/papers/barcelona.pdf, 2014.

[26] Graeme Wilkin, *Morse theory for the space of Higgs bundles*, Comm. Anal. Geom. 16 (2008), 283-332