

École Normale Supérieure de Paris
Département de Mathématiques et Applications
Année Universitaire 2012-2013

Introduction au Domaine de Recherche

GENERALISATIONS GEOMETRIQUES ET
COMBINATOIRES DE L ASSOCIAEDRE

Thibault Manneville
Élève à l'École Normale Supérieure de Paris

Introduction

Les associaèdres sont des polytopes dont l'étude mêle la géométrie et la combinatoire. Leurs sommets correspondent notamment aux triangulations d'un n -gone convexe. Le treilli de l'associaèdre est de fait isomorphe à ceux des dissections d'un n -gone. L'étude de ces polytopes a motivé de nombreux travaux, dans le but de pouvoir « voir » les propriétés combinatoires des objets concernés de façon géométrique. Et éventuellement de pouvoir prouver simplement grâce à la géométrie des résultats qui pourraient être moins évidents sans cela.

L'étude des associaèdres est un champ de recherche assez étendu, eu égard aux nombreuses méthodes de construction et généralisations que l'on peut en donner. Ces deux points motivent bien sûr toujours en grande partie la recherche sur les associaèdres. Notamment les objets auxquels on peut associer ces polytopes dépassent à présent largement les simples triangulations de polygones.

Nous allons donc présenter un petit historique des résultats déjà connus à leur sujet, et donnerons par la suite quelques pistes de recherche actuelles.

1 Définitions et notions de base

Dans cette section, nous abordons des notions de géométrie discrète de base ainsi que quelques propriétés des triangulations. Pour plus d'approfondissements dans ce domaine, on pourra aller voir dans [17] ou [9, chapitre 5].

Avant cela, nous rappelons qu'un *complexe simplicial abstrait* \mathcal{C} sur un ensemble E est un ensemble de parties de E clos par le bas. Les éléments de \mathcal{C} sont appelés ses *faces*. Les complexes simpliciaux sont particulièrement intéressants lorsqu'ils ont des réalisations géométriques, c'est-à-dire lorsque l'on peut trouver un objet géométrique auquel correspond une triangulation au sens de la topologie algébrique.

1.1 Les polytopes

Un *polytope* est un objet géométrique dont on peut donner deux définitions équivalentes. L'équivalence de ces définitions, appelées *V-représentation* et *H-représentation*, est un résultat fondamental de la théorie des polytopes.

Définition 1. Un *polytope* est une partie P de \mathbb{R}^n qui vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

V-représentation P est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^n ;

H-représentation P est l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces.

Où l'on appelle demi-espace les ensembles $\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x) \geq \alpha\}$, où α est un réel et λ une forme linéaire sur \mathbb{R}^n .

On se donne un polytope P pour la suite. Dans la définition, on ne donne pas plus de précision sur l'entier n car il n'est pas unique. Un polytope peut en effet être vu comme plongé dans son enveloppe affine, de dimension minimale, mais aussi dans n'importe quel espace de dimension supérieure.

Un résultat classique est qu'il existe un unique ensemble minimal V de points dont P est l'enveloppe convexe. Les points de cet ensemble sont appelés les *sommets* de P . Comme on le voit dans la définition, les bords des demi-espaces sont des hyperplans affines. Un hyperplan affine est dit *tangent* à P s'il est le bord d'un demi-espace qui contient P et si son intersection avec P est non vide.

L'intersection d'un hyperplan tangent avec P est appelé une *face* de P , ou k -face, k étant la dimension de l'enveloppe affine de la face. Par convention, on considère P lui-même et l'ensemble vide comme des faces de dimension respectives $\dim(\text{Aff}(P))$ et -1 . Les faces différentes de P et de dimension maximale sont appelées les *facettes* de P , les faces de dimension 1 sont appelées les *arêtes* de P . On a également que les 0-face de P sont exactement ses sommets. Le *graphe* de P est le graphe qui a pour sommets les sommets de P et pour arêtes les arêtes de P . Pour visualiser ces notions, cf figure 1.

Les faces de P présentent une pléthore de propriétés très intuitives mais laborieuses à montrer. Par exemple, une face de P est elle-même un polytope ; l'intersection de deux faces est une face ; les sommets d'une face de P sont les sommets de P qui appartiennent à cette face ; si une face F de P contient une face F' de P , alors F' est aussi une face de F .

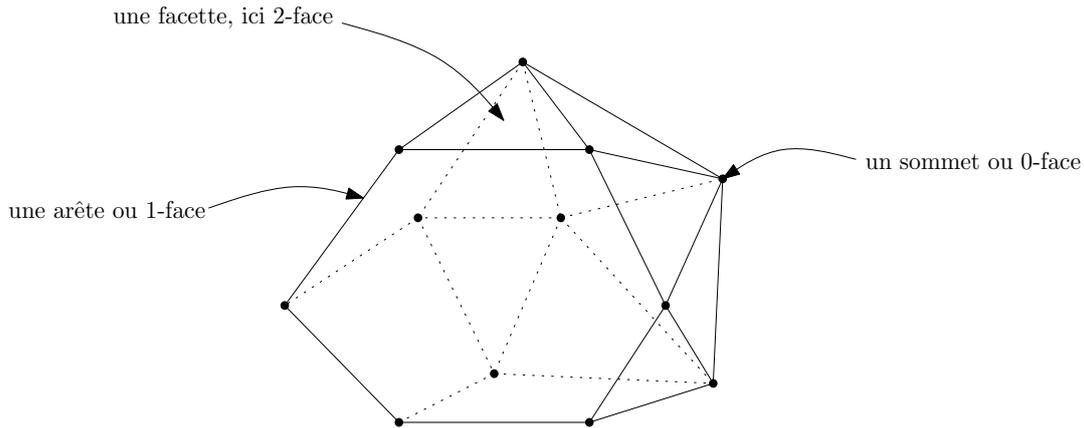


FIGURE 1 – Un 3-polytope.

Les faces de P sont naturellement ordonnées par inclusion. On constate que tout ensemble de faces de P a une borne inférieure dans P , à savoir l'intersection de ces faces. Comme il y a un nombre fini de faces, on sait alors que l'ordre partiel défini sur les faces est un *treillis*. On rappelle qu'un treillis est un ordre partiel dans lequel toute paire d'éléments a une borne sup et une borne inf.

Donnons finalement deux notions que nous utiliserons dans la suite, celles de cône normal et d'éventail normal de P .

- Définition 2.** – Un *cône convexe* dans \mathbb{R}^n est une partie stable par addition et multiplication par des scalaires positifs ;
- Le *cône normal* à P en la face F est le cône polyhédral

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = \max_{t \in P} \langle x, t \rangle \right\},$$

- où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire sur \mathbb{R}^n ;
- L'*éventail normal* de P est l'ensemble des cônes normaux des faces de P . Il est ordonné par l'inclusion et est un treillis pour cet ordre. Il est isomorphe comme treillis au dual du treillis des faces de P , c'est-à-dire ordonné par l'inclusion inverse.

1.2 Les triangulations

Étant donné un n -gone G_n dans le plan ayant une arête horizontale au-dessus de toutes les autres¹, $n \geq 3$, on appelle *dissection* de G_n un ensemble de diagonales de G_n d'intérieurs disjoints. Une dissection D *raffine* une dissection D' si D' est contenue dans D . Une *triangulation* de G_n est une dissection maximale de G_n au sens de l'inclusion. A toute triangulation, on peut associer un arbre binaire enraciné appelé *arbre dual*, dont les sommets sont les triangles de la triangulation, et les arêtes les diagonales communes à deux triangles ; sa racine est le triangle contenant l'arête horizontale supérieure de G_n . L'arbre dual est également naturellement orienté : si deux triangles ont une arête commune, l'un est au-dessus de cette arête, et l'autre est en dessous. On peut également le voir comme arbre binaire enraciné complet en ajoutant des feuilles sortant de G_n par ses arêtes, la racine étant alors la feuille qui sort par l'arête horizontale supérieure. Ces définitions et propriétés sont illustrées sur G_6 dans la figure 2.

Un résultat classique d'énumération est que les triangulations de G_{n+2} sont comptées par le nombre de Catalan $\text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. On voit que les dissections sont naturellement ordonnées par le raffinement. Leur ensemble est le treillis des faces d'un complexe simplicial abstrait.

On a également une opération sur les triangulations : le *flip*. Soit T une triangulation et δ une diagonale de T . Il existe une unique autre triangulation que T , qu'on notera T' ,

1. On fait ce choix pour des raisons techniques, notamment pour avoir une racine de l'arbre dual.

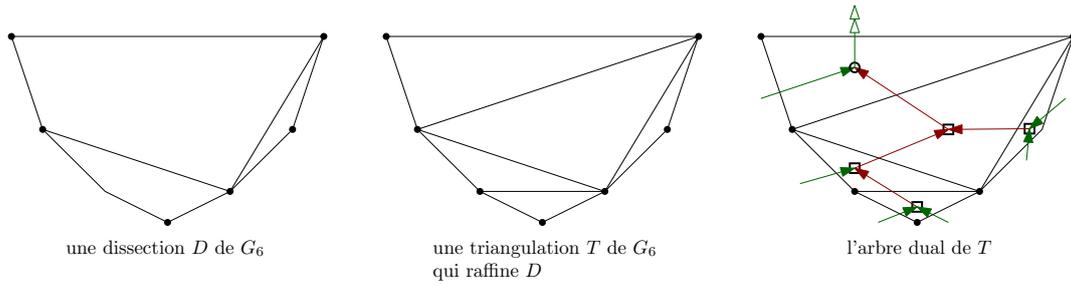


FIGURE 2 – Notions de base liées aux triangulations illustrées sur G_6 .

qui raffine $T \setminus \{\delta\}$. On dit que l'on flippe δ quand on « passe » de T à T' . On peut définir un dernier treillis, seulement sur les triangulations cette fois. Il s'agit du graphe des flips orienté dans le sens des pentes croissantes, c'est-à-dire que si T et T' sont reliés par un flip entre deux diagonales $\delta \in T$ et $\delta' \in T'$, l'arête $\{T, T'\}$ est orientée vers la triangulation dont la diagonale a la pente la plus forte. Le treillis obtenu est appelé *treillis de Tamari*. Cet objet a une grande importance en combinatoire, et on peut trouver ses propriétés principales dans [10].

2 L'exemple fondateur : le permutaèdre

Le permutaèdre est l'exemple fondateur de polytope qui a par la suite motivé l'étude des associaèdres. Le permutaèdre de dimension n , noté \mathcal{P}_n est le polytope défini comme l'enveloppe convexe des points $M(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n+1))$ pour σ parcourant le groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} . Comme pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on a $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n+1)\} = [n+1]$, tous les $M(\sigma)$ sont contenus dans un même hyperplan affine

$$\mathbb{H} : \sum_{1 \leq i \leq n+1} x_i = \binom{n+2}{2}.$$

Le polytope défini de la sorte a donc au plus dimension n . Et les points représentant $((1, i))_{i \in [2, n+1]}$ et la permutation $((n+1)12345 \dots n)$ sont affinement indépendants. On a donc bien que \mathcal{P}_n est de dimension n . La figure 3 montre comment on obtient \mathcal{P}_2 à partir de cette construction.

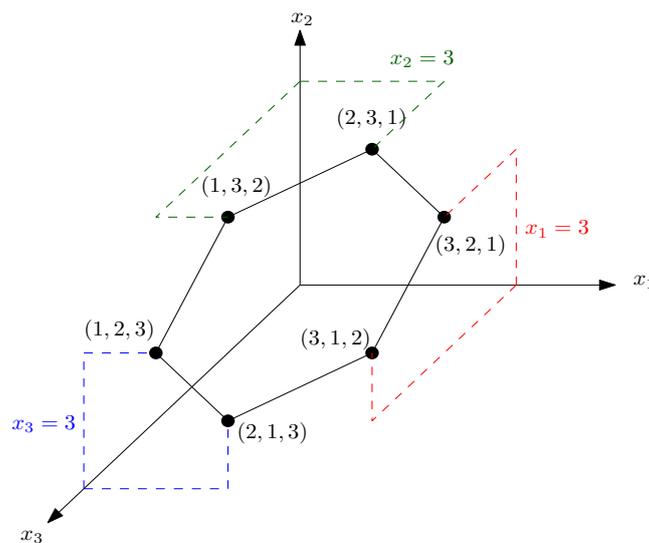


FIGURE 3 – \mathcal{P}_2 et son plongement dans \mathbb{R}^3 .

Rassemblons en une proposition les propriétés les plus classiques du permutaèdre :

Proposition 3. V-représentation *Les sommets de \mathcal{P}_n sont exactement les $M(\sigma)$ pour σ parcourant \mathfrak{S}_{n+1} ;*

H-représentation Pour toute partie $\emptyset \neq J \subsetneq [n+1]$, on pose

$$\mathcal{H}_J^+ : \sum_{i \in J} x_i \geq \binom{|J|+1}{2}.$$

Pour tout entier n , la description de \mathcal{P}_n comme intersection de demi-espaces fermés est

$$\mathcal{P}_n = \mathbb{H} \cap \bigcap_{J \subseteq [n+1]} \mathcal{H}_J^+;$$

Combinatoire des k -faces Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les k -faces de \mathcal{P}_n sont indexées par les surjections de $[n+1]$ dans $[n-k+1]$.

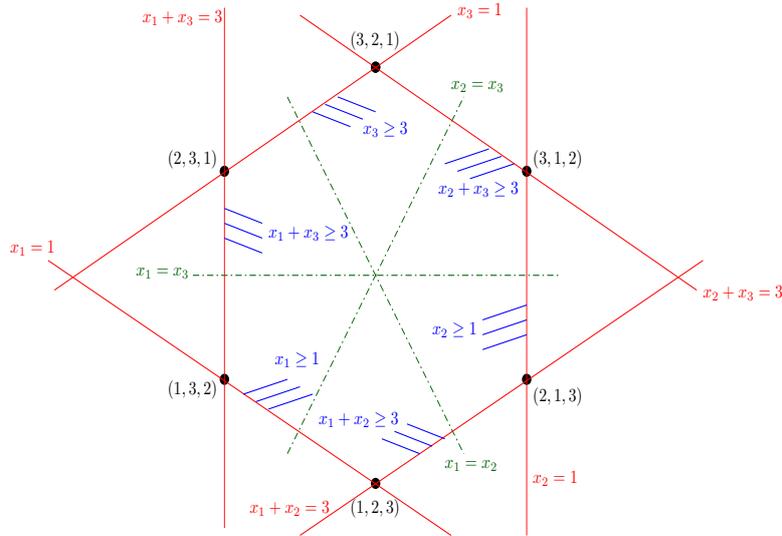


FIGURE 4 – \mathcal{P}_2 vue dans \mathbb{H} .

Remarque 4. Les deux premiers résultats sont à voir comme des cas particuliers géométriques du troisième. En effet les sommets de \mathcal{P}_n sont indexés par des permutations de $[n+1]$, que l'on peut voir comme des surjections de $[n+1]$ dans lui-même, et ses facettes sont indexées par des parties non vides propres de $[n+1]$, que l'on peut voir comme des applications surjectives de $[n+1]$ dans $\{1, 2\}$.

On remarque aussi que deux sommets de \mathcal{P}_n sont adjacents si et seulement si la permutation représentée par l'un est la multiplication de celle représentée par l'autre par une transposition adjacente. Pour voir cela, il suffit de reprendre la description des k -faces du permutaèdre avec ici $k = 2$. De fait, deux points adjacents s'obtiennent l'un par rapport à l'autre par une réflexion dans \mathbb{R}^{n+1} qui échange les coordonnées des valeurs adjacentes. En particulier, partant de l'identité, les permutations, lues comme les coordonnées des points, s'obtiennent de proche en proche en suivant l'ordre faible gauche, car on permute des valeurs et non des indices adjacents.

La figure 4 résume pour \mathcal{P}_2 ce qui a été mentionné précédemment.

3 Définition des associaèdres et réalisations géométriques

3.1 Définition et une première réalisation

On prendra comme notation $Asso_n$ pour les associaèdres n -dimensionnels. Mais comme nous allons le voir, il n'y en a pas qu'un, $Asso_n$ désigne donc la classe des polytopes qui vérifient la définition suivante :

Définition 5. Un *associaèdre de dimension n* est un polytope de dimension n dont le treillis des faces est isomorphe au dual du treillis des dissections de G_{n+3} .

En particulier les triangulations de G_{n+3} correspondent aux sommets de $Asso_n$, ses diagonales aux facettes et les arêtes aux flips entre deux triangulations. Et de manière générale, les k -faces correspondent aux k -dissections.

La première réalisation géométrique de l'associaèdre que nous présentons est due à Loday [8], bien que ce ne soit pas la construction la plus ancienne. Celui-ci se base sur les arbres duaux des triangulations du n -gone, avec une arête supérieure horizontale. En numérotant les sommets de la gauche vers la droite de 0 à $n + 2$, il peut donner des étiquettes aux sommets de l'arbre dual, qui sont des triangles (i, j, k) avec $i < j < k$. L'étiquette d'un tel triangle est \dot{j} . De plus l'arbre a une racine et est binaire. À chaque sommet de l'arbre, on peut donc associer un sous-arbre gauche et un sous-arbre droit. Le *poids* de ce sommet vaut alors le produit du nombre de feuilles de son sous-arbre gauche par le nombre de feuilles de son sous-arbre droit. Par exemple, sur la figure 5, si l'on note w la fonction de poids, on a : $w(\dot{1}) = 1, w(\dot{2}) = 8, w(\dot{3}) = 3, w(\dot{4}) = 2$ et $w(\dot{5}) = 1$.

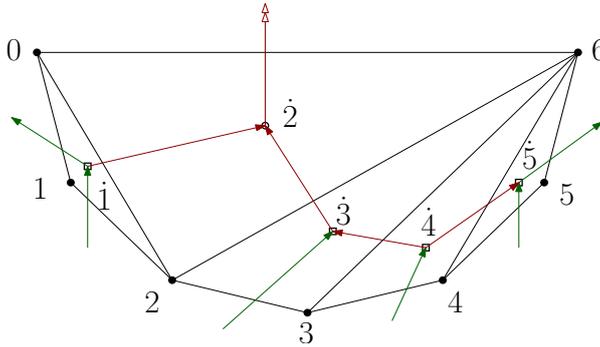


FIGURE 5 – Une triangulation de G_7 et son arbre dual étiqueté.

Les coordonnées d'une triangulation sont alors les poids des sommets de son arbre dual (figure 6).

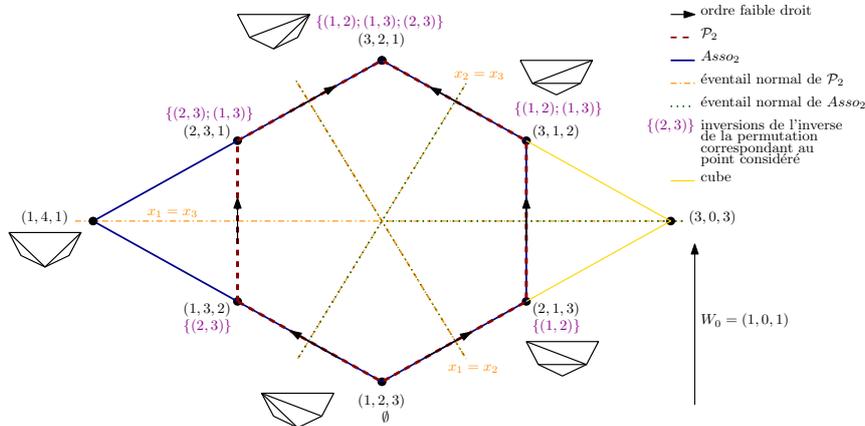


FIGURE 6 – Réalisation de $Asso_2$ de Loday et interprétations géométriques.

La même figure 6 illustre la propriété très importante de l'associaèdre de Loday :

Proposition 6. *L'associaèdre de Loday est obtenu à partir du permutaèdre en supprimant certaines inégalités qui le définissent. L'éventail normal du permutaèdre raffine celui de l'associaèdre de Loday, c'est-à-dire que les cônes du second sont des unions de cônes du premier.*

En particulier, on voit que l'inclusion des cônes des sommets définit une surjection de \mathfrak{S}_{n+1} dans les triangulations. En fait, l'associaèdre de Loday est lui-même contenu dans un cube. Et son éventail normal est un raffinement de ce cube, ce qui donne également une surjection des triangulations dans $\{+, -\}^n$. On remarque que la composée de ces deux surjections n'est autre que l'application qui à une permutation associe le n -uplet des reculs².

2. C'est-à-dire les descentes de sa permutation inverse.

Observons également que l'ordre faible gauche se lit sur le permutaèdre en suivant la direction particulière $W_0 = (n + 1, n, \dots, 1) - (1, 2, \dots, n + 1)$. Une propriété remarquable de l'associaèdre de Loday est que la même direction fait retrouver le treillis de Tamari.

Les résultats de la proposition et les observations qui précèdent sont également illustrées sur la figure 6. On voit bien ici la multitude de faits purement combinatoires transcrits de manière géométrique par la construction de Loday. Ce qui a donc motivé particulièrement la recherche d'autres réalisations, traduisant peut-être d'autres propriétés.

3.2 Beaucoup d'autres réalisations différentes

Après que Loday a proposé sa réalisation, de nombreuses constructions alternatives ont été trouvées.

On a vu que l'associaèdre de Loday avait un éventail normal inclus dans celui du permutaèdre. En lien avec cette propriété, on dit que deux polytopes sont *géométriquement équivalents* s'il existe un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^n qui envoie l'éventail normal de l'un sur l'éventail normal de l'autre.

Dans leur article [6], Hohlweg et Lange reprennent l'idée de Loday, mais en autorisant les points $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ de G_{n+3} à être au-dessus de l'axe défini par $(0, n + 2)$. L'arbre dual d'une triangulation n'a alors plus de racine naturelle et il faut un procédé légèrement différent pour définir les poids sur ses sommets. Cette construction, réexpliquée dans l'article de Lange et Pilaud [7] avec une autre approche, produit de fait 2^{n-1} réalisations, qui s'avèrent être *géométriquement non équivalentes*³ [1]. La figure 7 montre l'associaèdre tridimensionnel de Loday comme cas particulier de la construction de Hohlweg et Lange ainsi qu'un exemple plus générique de cette construction.

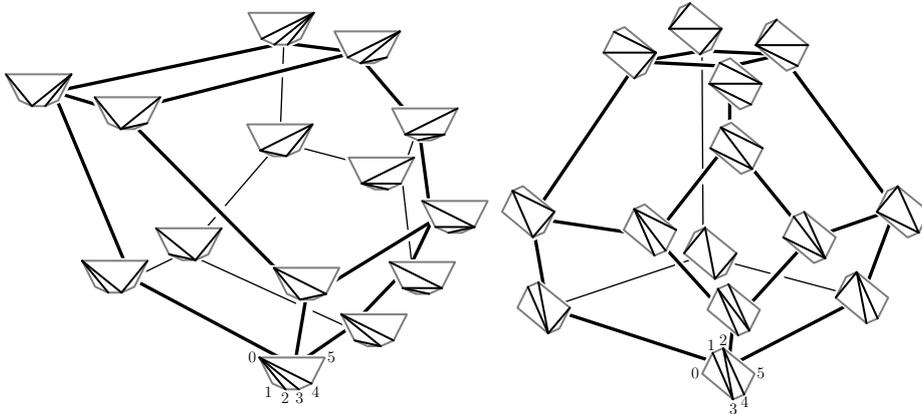


FIGURE 7 – À gauche le 3-associaèdre de Loday, à droite un autre 3-associaèdre obtenu par la construction de Hohlweg et Lange. Illustration tirée de [6].

Une dernière grosse source de réalisations provient d'un article de Ceballos, Santos et Ziegler [3], où les constructions précédentes sont rappelées, et surtout où une construction de Santos, jusqu'alors non publiée, est expliquée. Celui-ci choisit d'abord une triangulation particulière de G_{n+3} et construit sur cette base un éventail simplicial complet qui s'avère par la suite être l'éventail normal d'un associaèdre. Tous les associaèdres obtenus de la sorte sont différents à symétrie près de la triangulation choisie. Ainsi la méthode de Santos fournit un nombre d'exemples dont l'asymptotique est celle des nombres de Catalan.

Dans leur article, Ceballos, Santos et Ziegler montrent également qu'une seule réalisation de l'associaèdre est commune aux constructions de Santos et de Hohlweg et Lange au sens de l'équivalence définie précédemment. Ils concluent également qu'aucune de ces constructions n'est canonique si l'on s'en tient aux propriétés combinatoires. Cependant, celle de Loday est actuellement la mieux comprise et a motivé de nombreuses généralisations des associaèdres, dont nous parlerons dans la suite. Il paraît donc raisonnable de la choisir comme point de départ, au moins historique, pour une étude concernant les associaèdres.

3. A symétrie près en fait, ce qui ne change pas grand chose à l'asymptotique.

4 Généralisations connues des associaèdres

Dans cette section, nous présentons quelques généralisations des associaèdres que nous évoquions précédemment.

4.1 Les graphe-associaèdres et les nestoèdres

Une première extension de la notion d'associaèdre est due à Carr et Devadoss [2]. Elle consiste à voir les associaèdres comme des polytopes associés à des complexes sur des chemins, et à étendre cette définition des associaèdres à tous les graphes. Les polytopes obtenus sont appelés *graphe-associaèdres*. Une étape de plus de cette généralisation a été franchie par Postnikov [13], la nouvelle classe de polytopes étant à son tour appelée classe des *nestoèdres*. Nous donnons ici la façon d'obtenir l'associaèdre de Loday $Asso_n$ à partir d'un chemin sur $n + 1$ sommets.

On considère le $(n + 3)$ -gone G_{n+3} , dans la configuration de Loday, c'est-à-dire avec une arête horizontale supérieure et avec des sommets étiquetés de 0 à $n + 2$ de la gauche vers la droite. On choisit également une diagonale δ de G_{n+3} . Cette diagonale a deux extrémités étiquetées i et j , avec $0 \leq i < j + 1 \leq n + 2$ car δ est une diagonale. Et les points situés sous δ sont exactement les points de $\llbracket i + 1, j - 1 \rrbracket$. Réciproquement, si l'on se donne un intervalle de points $\llbracket k, l \rrbracket$ avec $1 \leq k \leq l \leq n + 1$, on peut définir l'unique diagonale ayant pour extrémités $k - 1$ et $l + 1$. Les intervalles de $\llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ sont donc en bijection avec les diagonales de G_{n+3} , appelons *tube* l'intervalle ainsi associé à une diagonale. On observe que ces intervalles sont exactement les sous-graphes connexes induits par un chemin sur $n + 1$ sommets.

Étant donné deux diagonales δ et δ' de G_{n+3} , on observe qu'elles ne se croisent pas si et seulement si leurs tubes respectifs sont dans l'une des configurations suivantes :

- l'un des deux tubes contient l'autre ;
- le sous-graphe induit par la réunion des deux tubes n'est pas connexe.

Si deux tubes vérifient l'une de ces propriétés, ils sont dits *compatibles*. Une dissection de G_{n+3} est donc un ensemble de tubes deux à deux compatibles du chemin sur $n + 1$ sommets. On appelle *tubage* un tel ensemble de tubes (voir figure 8). Les triangulations correspondent aux tubages maximaux pour l'inclusion.

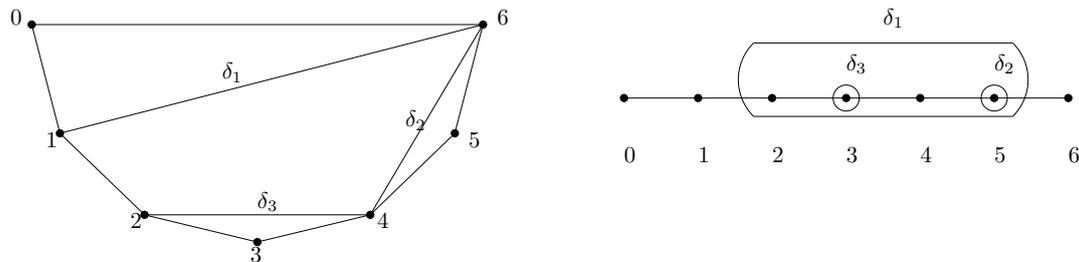


FIGURE 8 – Une dissection de G_7 et le tubage associé sur un chemin à 7 sommets.

L'ensemble des tubages forme un complexe simplicial abstrait qui s'avère donc avoir une réalisation polytopale dans le cas d'un chemin. Toutes ces notions s'étendent de façon naturelle aux graphes généraux, le résultat de Carr et Devadoss est que ce procédé fournit à nouveau des polytopes, qui sont donc des généralisations des associaèdres. La figure 9 montre le graphe-associaèdre obtenu à partir d'un chemin de longueur 4 et du graphe appelé *tripode*.

« L'étape supérieure » dans cette voie est la découverte et l'étude déjà quelque peu avancée des *nestoèdres* [4, 16, 13].

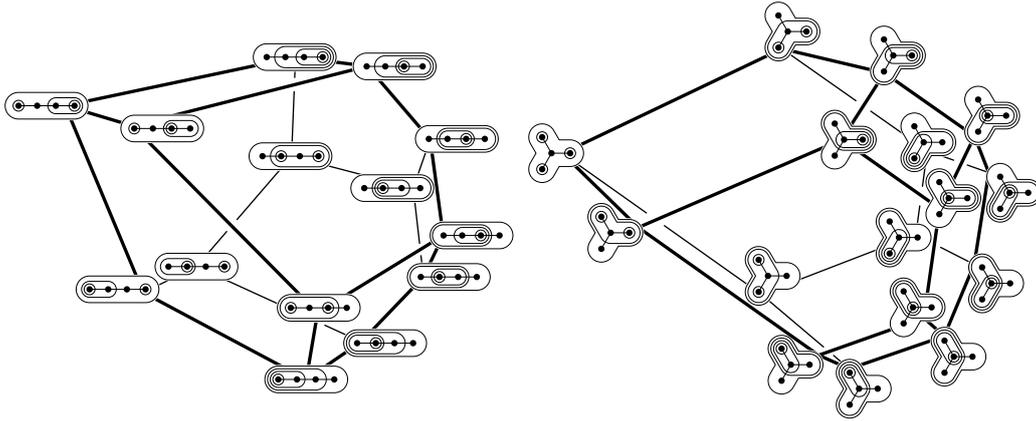


FIGURE 9 – Le graphe associaèdre du tripode. Illustration tirée de [11].

4.2 Les k -triangulations

Présentons à présent une autre façon de généraliser les associaèdres. On a vu qu'un associaèdre peut être vu comme un polytope réalisant le complexe simplicial des dissections de G_{n+3} , une dissection étant définie comme un ensemble de diagonales de G_{n+3} ne se croisant pas deux à deux. On peut étendre cette définition de la manière suivante :

Définition 7. Soit k un entier, une k -dissection (*multi-dissection* si k n'est pas précisé) D de G_{n+3} est un ensemble de diagonales de G_{n+3} tel que pour toute partie A de D de cardinal supérieur ou égal à $k + 1$, il existe deux diagonales de A ne se croisant pas.

De manière équivalente, une k -dissection est un ensemble A de diagonales de G_{n+3} dont le graphe de croisement n'a pas de $(k + 1)$ -clique.

À partir de cette définition, on définit une k -triangulation (*multi-triangulations* si k n'est pas précisé) comme étant une k -dissection maximale pour l'inclusion, l'ensemble des k -dissections de G_{n+3} est alors, comme pour les triangulations simples, le treillis des faces d'un complexe simplicial. Pilaud et Santos ont décrit dans [12] des propriétés éclairantes de ce complexe, que l'on sait être une sphère simpliciale, et dont la réalisation par un polytope est donc la prochaine étape, toujours ouverte à ce jour. Pilaud et Santos s'intéressent plus particulièrement dans l'article à ce que deviennent les flips dans le cas des multi-triangulations. Leur description nécessite une analyse de la structure des k -triangulations et serait trop longue à détailler ici. L'essentiel est que cette approche fournit une autre piste de généralisation que celle présentée dans la partie précédente.

5 Pistes envisagées

Nous avons vu une partie des travaux consécutifs à la construction de Loday dans la section précédente. Loin d'avoir clos le sujet, ils ont ouvert la voie à de nombreuses questions. Nous allons en présenter quelques unes dans ce qui suit.

5.1 Construction alternative des graphe-associaèdres et nestoèdres

Nous avons vu que la construction de Loday est la base des généralisations dont nous avons parlé. La première piste de recherche serait de viser des résultats similaires, en utilisant des constructions alternatives.

Notamment, la construction de Santos reste encore assez obscure, mais semble prometteuse. Pour mémoire, il s'agit de définir un polytope en donnant son éventail normal, puis en vérifiant quelques propriétés techniques de géométrie discrète permettant de conclure que cet éventail est bien celui d'un polytope.

Dans le cas des multi-triangulations, il semble naturel de commencer par s'en fixer une et de voir comment la construction de Santos supporte la généralisation. Pour ce qui est des graphe-associaèdres, l'interprétation en terme de triangulation a été remplacée par celle en termes de tubages. Il s'agit donc de comprendre l'effet de la construction de Santos sur les tubages d'un chemin avant de regarder là encore si la généralisation est possible.

Outre la recherche de constructions alternatives, on peut également chercher à généraliser davantage ce que nous avons évoqué.

5.2 k -complexes emboîtés

La correspondance que nous avons donnée entre les triangulations et les tubages d'un chemin est assez éclairante si l'on cherche à étendre les résultats de Pilaud et Santos sur les multi-triangulations. En effet nous avons vu qu'une triangulation correspond à un tubage avec des tubes deux à deux compatibles pour une notion de compatibilité correspondant à la non-intersection des diagonales. Il semble donc naturel de définir des *multi-tubages* d'un graphe général G de façon analogue aux multi-triangulations, à savoir comme des ensembles de tubes sans sous-ensemble de $k + 1$ tubes deux à deux non compatibles. Malheureusement, avec cette définition, on peut trouver assez facilement des exemples pour lesquels le complexe simplicial s'avère de façon assez triviale ne pas pouvoir avoir de réalisation par un polytope. Une autre définition à partir de sous-chemins, mais valable uniquement pour des arbres est à l'étude, sans que nous soyons encore en mesure ne serait-ce que de dire s'il s'agit de « la bonne » définition.

5.3 Propriétés des graphes des nestoèdres

Présentons maintenant un autre axe de recherche de nature plus combinatoire. Certains travaux ont permis de déterminer le diamètre des associaèdres [15, 14]. Les polytopes obtenus par les différentes généralisations que nous avons citées ont bien entendu également leur propre graphe, dont le diamètre n'a pas encore été étudié à notre connaissance.

Les graphes des associaèdres sont de plus hamiltoniens. Là encore, la question n'a pas été trop creusée jusqu'à présent pour les graphes-associaèdres ni pour les nestoèdres et pourrait motiver de futurs travaux.

5.4 Extension aux groupes de Coxeter

La dernière piste que nous présentons est probablement celle qui motivera le plus les recherches à venir sur les associaèdres. On peut définir des *permutaèdres généralisés* à partir des groupes de Coxeter finis [5]. Pour ce faire, on utilise le fait que ces groupes peuvent être décrits comme groupes engendrés par des réflexions dans un espace euclidien. L'action des différents éléments du groupe sur un point bien choisi produit les sommets des permutaèdres généralisés. Partant de ces polytopes, on peut également définir des *associaèdres généralisés* en prenant les demi-espaces définissant les permutaèdres généralisés et en ne gardant que certains d'entre eux.

Les permutaèdres généralisés possèdent beaucoup de propriétés combinatoires intéressantes, en particulier si l'on s'intéresse à leur treillis des faces, qu'on appelle les *treillis cambriens*. Le groupe symétrique étant un groupe de Coxeter fini, le treillis de Tamari est un cas particulier de treillis cambrien.

Le treillis des associaèdres généralisés possède également de bonnes propriétés, en lien direct avec les algèbres amassées, dont l'étude est un sujet particulièrement riche actuellement.

Références

- [1] N. Bergeron, C. Hohlweg, C. Lange, and H. Thomas. Isometry classes of generalized associahedra. *Sém. Lothar. Combin.*, 61A :Art. B61Aa, 13, 2009/10.
- [2] M. Carr and S.L. Devadoss. Coxeter complexes and graph-associahedra. *Topology and its Applications*, (153) :2155–2168, 2006.
- [3] C. Ceballos, F. Santos, and G.M. Ziegler. Many non-equivalent realizations of the associahedron. Preprint, arXiv :1109.5544v2, 2013.
- [4] E.M. Feichtner and B. Sturmfels. Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans. *Port. Math. (N.S.)*, 62(4) :437–468, 2005.
- [5] C. Hohlweg. Permutahedra and associahedra. In Folkert Müller-Hoissen, Jean Pallo, and Jim Stasheff, editors, *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures – Tamari Memorial Festschrift*, volume 299 of *Progress in Mathematics*, pages 129–159. Birkhäuser, 2012.

- [6] C. Hohlweg and C. Lange. Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete and Computational Geometry*, 37(4) :517–543, 2007.
- [7] C. Lange and V. Pilaud. Using spines to revisit a construction of the associahedron. Preprint, arXiv :1307.4391v2, 2013.
- [8] J.-L. Loday. Realization of the stasheff polytope. *Archives of Mathematics*, (83) :267–278, 2004.
- [9] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Springer-Verlag New York, 2001.
- [10] F. Müller-Hoissen, J.M. Pallo, and J. Stasheff, editors. *Associahedra, Tamari Lattices and Related Structures. Tamari Memorial Festschrift*, volume 299 of *Progress in Mathematics*. Springer, New York, 2012.
- [11] V. Pilaud. Signed tree associahedra. Preprint, arXiv :1309.5222v1, 2013.
- [12] V. Pilaud and F. Santos. Multitriangulations as complexes of star polygons. *Discrete Computational Geometry*, (41) :284–317, 2009.
- [13] A. Postnikov. Permutohedra, associahedra, and beyond. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6) :1026–1106, 2009.
- [14] L. Pournin. The diameters of associahedra. Preprint, arXiv:1207.6296, 2012.
- [15] D.D. Sleator, R.E. Tarjan, and W.P. Thurston. Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(3) :647–681, 1988.
- [16] A. Zelevinsky. Nested complexes and their polyhedral realizations. *Pure Appl. Math. Q.*, 2(3) :655–671, 2006.
- [17] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag GmbH, second edition, 1997.