Introduction au domaine de recherche

La conjecture de Guillemin-Sternberg sur la quantification géométrique et la réduction symplectique : un schéma de preuve

Martin Puchol

Paris, le 20 octobre 2011

Table des matières

Résumé

Dans ce texte, nous allons voir un exemple de techniques d'analyse sur les variétés permettant d'obtenir un résultat de nature géométrique.

Le but est ici d'énoncer et de donner une idée de la preuve de la conjecture de Guillemin-Sternberg, en suivant la méthode analytique de Y. Tian et W. Zhang dans [TZ98] qui s'appuie sur la technique de localisation de Bismut-Lebeau développée dans [BL91] .

Cette conjecture s'inscrit dans la question plus générale du calcul géométrique des multiplicités des représentations irréductibles de la représentation virtuelle d'un groupe de Lie compact donnée par l'indice de l'opérateur de Dirac. En effet, pour calculer ces coefficients, on voit grâce au "shifting trick" qu'il suffit de calculer celui de la représentation triviale. Ensuite, la conjecture étudiée ici permet de relier ce coefficient à l'indice de l'opérateur de Dirac sur une autre variété (la réduction symplectique de la variété de départ), qui peut se calculer grâce au théorème de l'indice d'Atiyah–Singer. Nous n'aborderons pas ici ces problèmes, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Ver01].

Pour comprendre ce texte, le lecteur devra être familier avec les bases de la géométrie différentielle, notamment avec les notions de variété différentielle, de champ de vecteurs et de différentielle extérieure.

Dans la première section, nous introduisons les outils de géométrie nécessaires à notre propos. Dans la deuxième section nous définirons la quantification géométrique. Nous construirons ensuite dans la troisième section la réduction symplectique. Enfin, dans la quatrième section, nous énoncerons la conjecture de Guillemin-Sternberg, et nous donnerons une idée des arguments permettant de la démontrer.

Pour avoir des démonstrations détaillées des résultat annoncés dans ce texte, le lecteur pourra se reporter à [Puc11]

1 Préliminaires de géométrie différentielle

Dans cette section, on se donne une variété différentielle réelle M, de dimension n.

1.1 Fibrés vectoriels et connexions

Soit E un espace vectoriel de dimension d.

Définition 1.1. Un *fibré vectoriel* de *fibre type* E au-dessus de M est la donnée d'une variété F et d'une application lisse $p\colon F \to M$ vérifiant :
- pour tout $x \in M$, la fibre $F_x \overset{\text{déf}}{=} p^{-1}(x)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel,
- pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un difféomorphisme $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times E$ tel que d'une part $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi_{U_i} = \mathrm{Id}_{U_i}$ et d'autre part $\varphi_U|_{F_x}$ soit un isomorphisme linéaire de F_x sur $\{x\} \times E$.

On dira que U est un *ouvert trivialisant* et φ_{U_i} une *trivialisation au-dessus de U*.

Une application lisse $s\colon M \to F$ qui vérifie $p\circ s = \mathrm{Id}$ sera appelée une *section* de F. L'ensemble des sections de F sera noté $\Gamma(F)$.

Dans la suite de cette section, tous les fibrés considérés seront des fibrés vectoriels de fibre type E, on ne précisera donc plus la nature des fibrés.

Exemple 1.2. Le fibré tangent TM est un fibré vectoriel, ainsi que le fibré des 1-formes T^*M (dont la fibre est $T_x^*M = (T_xM)^*$).

Si on se donne deux fibrés F_1 et F_2 sur M, on peut alors construire le fibré $F_1 \otimes F_2$ dont les fibres sont $(F_1 \otimes F_2)_x = F_{1,x} \otimes F_{2,x}$. Par exemple, on peut de cette manière construire les fibrés $\mathrm{End}(F_1) = {F_1}^* \otimes F_1$ des endomorphismes de F_1, et $\Lambda(T^*M) \otimes F_1$ des formes différentielles à valeurs dans F_1.

Quand on se donne un fibré trivial de la forme $F = M \times E$, une section de F n'est rien d'autre qu'une application lisse de M dans E. On peut donc dériver les sections d'un tel fibré. La notion de connexion permet de généraliser cela à des fibrés vectoriels non triviaux.

Définition 1.3. Soit F un fibré au-dessus de M. Une *connexion* sur F est une application bilinéaire

$$\begin{aligned} \nabla^F : \Gamma(TM) \times \Gamma(F) &\to \Gamma(F) \\ (X, s) \quad &\mapsto \nabla^F_X s \end{aligned}$$

telle que pour tout $X \in \Gamma(TM)$, $s \in \Gamma(F)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,
- d'une part $\nabla^F_{fX} s = f\nabla^F_X s$,
- et d'autre part $\nabla^F_X fs = df(X) + f\nabla^F_X s$.

Heuristiquement, $\nabla^F_X s$ correspond à la "dérivée" de s dans la direction X.

Propriété 1.4. *Soit F un fibré au-dessus de M. Alors il existe toujours une connexion sur F et deux connexions diffèrent d'une 1-forme à valeurs dans* $\mathrm{End}(F)$.

Si on se donne un base $(e_1, \dots, e_d)$ de F au voisinage d'un point $x \in M$ (i.e pour tout y voisin de x, $(e_1(y), \dots, e_d(y))$ est une base de F_y) on peut définir la connexion plate de F relativement à cette base, que l'on note ∇^p (ou simplement d quand il est entendu que l'on a trivialisé F au voisinage de x grâce à notre base) , par :

$$\text{si } s = \sum_i \lambda_i e_i \text{ est un section de } F \text{ au voisinage de } x, \text{ alors } \nabla^p s = \sum_i d\lambda_i e_i \,.$$

D'après ce qui précède, si on se donne une connexion ∇^F sur F, il existe donc une 1-forme Γ à valeurs dans $\mathrm{End}(F)$ telle que pour $X \in \Gamma(TM)$,

$$\nabla^F_X = \nabla^p_X + \Gamma_X = d_X + \Gamma_X \ ,$$

Γ est alors appelé le *symbole de Christoffel* de la connexion∇^F dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$.

Définition 1.5. Soit F un fibré sur M. Nous noterons $\Omega^*(M,F) = \Gamma(\Lambda(T^*M) \otimes F)$ l'ensemble des formes différentielles à valeurs dans F. Soit ∇^F une connexion sur F, alors il existe une unique extension $\nabla^F : \Omega^*(M,F) \to \Omega^*(M,F)$ vérifiant la règle de Leibniz : si $\alpha \in \Omega^k(M) = \Omega^k(M,\mathbb{C})$ et $s \in \Omega^l(M,F)$, alors

$$\nabla^F(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla^F s \ .$$

Supposons ici que E est un espace vectoriel réel (resp. complexe). Une *métrique riemannienne (resp. hermitienne)* sur un fibré F de fibre type E est alors une famille lisse $\{h^F_x\}_{x\in M}$ de produits scalaires (resp. hermitiens) $h^F_x : F_x \times F_x \to \mathbb{C}$. On dira alors que le fibré (F, h^F) est un *fibré riemannien (resp.hermitien).*

Définition 1.6. Une connexion ∇^F sur un fibré riemannien (resp. hermitien) $(F, \langle . , . \rangle)$ sera dite *riemannienne (resp. hermitienne)* si et seulement si pour tout s_1, $s_2 \in \Gamma(F)$,

$$d\langle s_1, s_2\rangle = \langle \nabla^F s_1, s_2\rangle + \langle s_1, \nabla^F s_2\rangle \ .$$

Remarquons que de telles connexions existent toujours

Théorème 1.7. *Supposons que TM soit muni d'une métrique riemannienne (on dit alors que M est une* variété riemannienne*), alors il existe une unique connexion ∇^{TM} sur le fibré tangent qui soit riemannienne et telle que pour tous champs de vecteurs X et Y,*

$$\nabla^{TM}_X Y - \nabla^{TM}_Y X = [X,Y] \ ,$$

où $[X,Y]$ désigne le crochet de Lie de X et de Y.

La connexion ∇^{TM} est appelée la connexion de Levi-Civita *de M*

1.2 Structures presque complexes

Nous supposerons ici que la dimension de M est paire : $n = 2m$.

Définition 1.8. Une *structure presque complexe* sur M est un endomorphisme $J \in \mathrm{End}(TM)$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Si M est munie d'une métrique riemannienne g, on dira que g est *invariante par J* (ou alors *compatible avec J*) si et seulement si pour tout u, v dans TM, $g(Ju, Jv) = g(u, v)$.

Si maintenant M est munie d'une *forme symplectique*, c'est-à-dire d'une 2-forme non dégénérée et fermée ω, on dira que ω est *compatible avec J* si et seulement si pour tout u, v dans TM, $\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v)$ et la formule $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ définie une métrique riemannienne sur TM.

Exemple 1.9. L'exemple qu'il faut garder en tête est que si $M = \mathbb{C}^m$, alors $J = \sqrt{-1}\mathrm{Id}$ est une structure presque complexe.

Définition 1.10. Soit J une structure presque complexe sur M. Sur le complexifié $TM \otimes \mathbb{C}$ du fibré tangent, J induit un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire diagonalisable (encore noté J). On a alors la décomposition

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M \ , \tag{1}$$

où on a noté $T^{(1,0)}M = \ker(J - \sqrt{-1}\mathrm{Id})$ et $T^{(0,1)}M = \ker(J + \sqrt{-1}\mathrm{Id})$. Soit $T^{*(1,0)}$ et $T^{*(0,1)}$ les duaux respectifs de $T^{(1,0)}M$ et $T^{(0,1)}M$.

Soit F un fibré sur M et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Nous noterons

$$\Omega^{p,q}(M,F) = \Gamma\left(\Lambda^p\left(T^{*(1,0)}\right) \otimes \Lambda^q\left(T^{*(0,1)}\right) \otimes F\right) .$$

Un élément de $\Omega^{p,q}(M,F)$ sera appelé une (p,q)*-forme différentielle à valeurs dans* F.

Remarquons que si g^{TM} est une métrique riemannienne sur M compatible avec J, alors g induit une métrique hermitienne sur

$$\Lambda^{0,*}(T^*M) \stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda^*(T^{*(0,1)}M) .$$

En effet, notons $\langle .\,,.\rangle$ la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire induite par g^{TM} sur $TM\otimes\mathbb{C}$. On pose alors, pour tout u, v dans $TM\otimes\mathbb{C}$, $h^{TM\otimes\mathbb{C}}(u,v) = \langle u, \overline{v}\rangle$, qui est une métrique hermitienne pour laquelle la décomposition (1) est orthogonale. Cette métrique induit une métrique hermitienne sur $T^{(0,1)}M$, puis sur son dual $T^{*(0,1)}M$, et donc finalement une métrique $h^{\Lambda^{0,*}}$ sur $\Lambda^{0,*}(T^*M) \stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda^*(T^{*(0,1)}M)$.

1.3 Opérateurs différentiels

Soit F un fibré vectoriel sur M.

Définition 1.11. Nous noterons $\mathscr{D}(M,F)$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\Gamma(F))$ engendrée par les éléments de $\Gamma(\mathrm{End}(F))$ et les dérivées ∇_X, où ∇ est une connexion sur F et X un champ de vecteurs sur M. Les éléments de $\mathscr{D}(M,F)$ seront appelés des *opérateurs différentiels.*

Pour k un entier, soit

$$\mathscr{D}_k(M,F) = \Gamma(\mathrm{End}(F)).\mathrm{Vect}\left(\{\nabla_{X_1}\dots\nabla_{X_j} \;/\; j \le k,\ X_1,\dots,X_j \in \Gamma(TM)\}\right) .$$

Les éléments de $\mathscr{D}_k(M,F)$ sont les *opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à* k. Les éléments de $\mathscr{D}_k(M,F)\backslash\mathscr{D}_{k-1}(M,F)$ seront appelés les *opérateurs différentiels d'ordre* k. L'algèbre graduée associée à ces sous-ensemble est définie par :

$$\mathrm{gr}(\mathscr{D}(M,F)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathscr{D}_k(M,F)/\mathscr{D}_{k-1}(M,F) .$$

Théorème 1.12. *L'ensemble* $\mathrm{gr}(\mathscr{D}(M,F))$ *est une algèbre, qui est isomorphe à l'espace des sections du fibré* $S(TM)\otimes\mathrm{End}(F)$.

L'isomorphisme σ_k *entre* $\mathscr{D}_k(M,F)/\mathscr{D}_{k-1}(M,F)$ *et* $\Gamma(S^k(TM)\otimes\mathrm{End}(F))$ *s'exprime comme suit : si* $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, *alors*

$$\sigma_k(D)(x,\xi) = \lim_{t\to+\infty} t^{-k}(e^{-\sqrt{-1}tf}.D.e^{\sqrt{-1}tf})(x) \in \mathrm{End}(F_x) ,$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *est telle que* $d_xf = \xi$.

Remarque 1.13. Ce qu'il faut retenir, c'est que si dans une carte on a $D = a\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\dots\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$, alors

$$\sigma_k(D)(x,(\xi_1,\dots,\xi_n)) = \sqrt{-1}^k\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k}a(x) .$$

Définition 1.14. Si D est un opérateur d'orde k, alors $\sigma_k(D)$ est appelé le *symbole principal de* D.

Soit π la projection de T^*M sur M. Nous définissons le fibré π^*F sur T^*M en posant $(\pi^*F)_{(x,\xi)} = F_x$: sur la fibre T^*_xM, le fibré π^*F est constant égal à F_x. Une section du fibré $S^k(TM) \otimes \mathrm{End}(F)$ au-dessus de M peut alors être vu comme une section de $\pi^*\mathrm{End}(F)$ au-dessus de T^*M, qui est polynomiale en ξ le long des fibres T^*_xM.

Définition 1.15. Un opérateur différentiel sur M sera dit *elliptique* si et seulement si son symbole principal est inversible sur l'ouvert $\{(x,\xi) \,/\, \xi \neq 0\}$ de T^*M.

Supposons ici que F est muni d'une métrique g. On peut alors définir sur $\Gamma(F)$ le produit scalaire $\langle s_1, s_2 \rangle = \int_M g(s_1, s_2)$. On pourra donc parler d'opérateur auto-adjoint pour ce produit scalaire, ou de section L^2 de F.

Théorème 1.16 (estimée elliptique)**.** *Si D est un opérateur auto-adjoint positif elliptique d'ordre 2 sur M, et si s est une section L^2 de F. On a alors*

$$\langle Ds, s \rangle \geq C_1 ||s||_1^2 - C_2 ||s||_0^2 \,, \tag{2}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes strictement positives, et $||.||_0$ et $||.||_1$ sont les normes Sobolev d'ordre 0 et 1.

2 Quantification géométrique

Dans cette section, on se donne une variété réelle lisse de dimension $2n$. Supposons que M est munie d'un structure presque complexe J et d'une métrique g^{TM} qui est J-invariante.

Comme on l'a fait dans la sous-section 1.2, on considère $\langle . , . \rangle$ la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire et la métrique $h^{TM\otimes\mathbb{C}}$ sur $TM \otimes \mathbb{C}$ induites par g^{TM}.

2.1 Connexion de Clifford

Nous allons ici définir une connexion particulière sur $\Lambda^{0,*}(T^*M)$. Commençons par la

Définition 2.1 (action de Clifford)**.** Soit $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)}$ un élément de $TM \otimes \mathbb{C}$, on notera $\bar{v}^{(1,0)*} \in T^{*(0,1)}$ le dual de $\bar{v}^{(1,0)}$ pour la métrique $h^{TM\otimes\mathbb{C}}$. On peut alors définir l'*action de Clifford* de TM sur $\Lambda^{0,*}(T^*M)$ par :

$$c(v)(\alpha) = \sqrt{2}(\bar{v}^{(1,0)*} \wedge \alpha - i_{v^{(0,1)}}(\alpha)).$$

Propriété 2.2. *Cette action vérifie :*

$$c(u)c(v) + c(v)c(u) = -2\langle u, v \rangle \,.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base orthonormée locale de TM, et $(w_1, \ldots, w_n)$ une base locale orthonormée de $T^{(1,0)}M$. On choisit ces bases de telle sorte que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ e_{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i + \overline{w_i}) \text{ et } e_{2i} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(w_i - \overline{w_i}).$$

Dans les coordonnées locales $\{e_i\}$, on définit Γ^{TM} le symbole de Christoffel de la connexion de Levi-Civita ∇^{TM} de M, et dans la coordonnée $\overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{w}_n$ de $\det(T^{(1,0)}M)$, on définit $\Gamma^{\det}$ le symbole de Christoffel d'une connexion hermitienne $\nabla^{\det}$ sur $\det(T^{(1,0)}M)$.

Définition 2.3 (connexion de Clifford)**.** On définit sur $\Lambda^{0,*}(T^*M)$ une connexion ∇^{Cl}, appelée *connexion de Clifford*, par :

$$\nabla^{Cl}_V = d_V + \frac{1}{4}\sum_{i,j}\langle \Gamma^{TM}(V)e_i, e_j\rangle c(e_i)c(e_j) + \frac{1}{2}\Gamma^{det}(V).$$

Propriété 2.4. *On définit bien ainsi une connexion, indépendamment de la base choisie. Cette connexion préserve la parité du degré des formes et est hermitienne. De plus, pour tout V et W dans TM, on a $[\nabla^{Cl}_V, c(W)] = c(\nabla^{TM}_V W)$.*

2.2 Opérateur de Dirac spin^c

Soit (E, h^E) un fibré hermitien sur M, muni d'une connexion hermitien ∇^E.

On munit le fibré $\Lambda^{0,*}(T^*M) \otimes E$ de la connexion $\nabla^{Cl} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^E$ (que l'on note encore ∇^{Cl}) et de la métrique hermitienne $h = h^{\Lambda^{0,*}} \otimes h^E$, où $h^{\Lambda^{0,*}}$ est la métrique définie dans la sous-section 1.2. De plus, comme on l'a fait dans la fin de la sous-section 1.3, on munit $\Omega^{0,*}(M,E)$ du produit hermitien induit par h.

Définition 2.5 (opérateur de Dirac spin^c)**.** Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base orthonormée de TM, on définit l'*opérateur de Dirac spin^c* par :

$$D^E : \Omega^{0,*}(M,E) \to \Omega^{0,*}(M,E)$$
$$D^E = \sum_{j=1}^{2n} c(e_j)\nabla^{Cl}_{e_j}.$$

Remarque 2.6. Cet opérateur dépend de la connexion de Clifford, et donc du choix de la connexion $\nabla^{\det}$. Cependant, nous verrons dans la proposition 2.10 que la quantité intéressante, à savoir son indice, ne dépend pas d'un tel choix.

Propriété 2.7. *Nous avons les propriétés suivantes :*
- *D^E échange $\Omega^{0,pair}(M,E)$ et $\Omega^{0,impair}(M,E)$;*
- *D^E est auto-adjoint et, plus précisément, en notant*

$$D^E_+ = D^E|_{\Omega^{0,pair}(M,E)} \text{ et } D^E_- = D^E|_{\Omega^{0,impair}(M,E)} ,$$

  on a :

$$D^{E*}_+ = D^E_- \text{ et } D^{E*}_- = D^E_+ ;$$

- *D^E est un opérateur elliptique d'ordre 1, et son symbole principal est :*

$$\sigma(D^L) \colon \alpha \in T^*M \mapsto \sqrt{-1}c(\alpha^*) ,$$

  où $\alpha^* \in TM$ est le dual métrique de α.
- *si M est compacte, alors D^E est un opérateur de Fredholm.*

2.3 Quantification géométrique

Dans cette sous-section, nous supposons de plus que M est compacte et munie d'une forme symplectique ω compatible avec J. Supposons de plus qu'il existe un fibré en droite hermitien L muni d'une connexion hermitienne ∇^L vérifiant $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\nabla^L)^2 = \omega$ (nous dirons alors que M est *préquantifiée*).

Nous pouvons alors définir $D^L : \Omega^{0,*}(M,L) \to \Omega^{0,*}(M,L)$ l'opérateur de Dirac spin^c associé.

Définition 2.8 (quantification géométrique)**.** On appelle *quantification géométrique de M* l'indice de D^L, c'est-à-dire l'entier

$$Q(M,L) = \mathrm{ind}(D^L) = \dim\left(\Omega^{0,pair}(M,L) \cap \ker(D^L)\right) - \dim\left(\Omega^{0,impair}(M,L) \cap \ker(D^L)\right) .$$

Remarque 2.9. D'après la proposition 2.7, $Q(M,L)$ est bien fini.

Propriété 2.10. *L'entier $Q(M,L)$ est invariant par déformation $\mathcal{C}^\infty$ et conservant le symbole principal de D^L.*

3 Réduction symplectique

On se donne dans cette section un variété symplectiue (M,ω).

3.1 Action hamiltonienne et application moment

Définition 3.1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on appelle *hamiltonnien de f* le champ de vecteurs X^f tel que

$$i_{X^f}\omega = df .$$

Un champ de vecteurs X sera dit *hamiltonnien* si et seulement si $i_X\omega$ est exacte, c'est-à-dire si X est le hamiltonnien d'une certaine fonction. Si $i_X\omega$ est simplement fermée, X sera dit *symplectique*.

Sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ on définit le *crochet de Poison* $\{.,.\}$ par :

$$\{f,g\} = -\omega(X^f, X^g) = X^f(g) = -X^g(f) .$$

Propriété 3.2. *Muni du crochet de Poisson, $\mathcal{C}^\infty(M)$ est une algèbre de Lie et l'application $f \mapsto X^f$ est un morphisme d'algèbres de Lie entre $\mathcal{C}^\infty(M)$ et l'ensemble des champs de vecteurs sur M.*

Soit G un groupe de Lie compact connexe agissant sur M. Nous noterons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On suppose que pour tout $g \in G$, $g^*\omega = \omega$.

Étant donnée une telle action, on en déduit une application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\to \Gamma(TM) \\ V &\mapsto V^M \end{aligned}$$

où le champ de vecteurs V^M est défini par

$$V^M(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-tV}.x\right)|_{t=0} . \tag{3}$$

Par ailleurs, puisque pour tout t, e^{-tV} préserve ω, on en déduit que V^M est un champ de vecteurs symplectique. De plus, un calcul permet de montrer que cette application est un morphisme d'algèbres de Lie : pour tout V et W dans $\mathfrak{g}$, on a $[V^M, W^M] = [V,W]^M$.

Définition 3.3. On dira que l'action de G sur M est *hamiltonienne* si et seulement si il existe un morphisme d'algèbres de Lie $V \in \mathfrak{g} \mapsto \phi^V \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que pour tout $V \in \mathfrak{g}$ le champ de vecteurs V^M est l'hamiltonien de ϕ^V, c'est-à-dire :

$$d\phi^V = i_{V^M}\omega . \tag{4}$$

Dans toute la suite, nous supposerons que l'action de G sur M est hamiltonienne.

Définition 3.4 (application moment)**.** Nous appellerons *application moment* associée à l'action de G sur M (et au choix du morphisme $V \mapsto \phi^V$) l'application $\mu\colon M \to \mathfrak{g}^*$ telle que pour tout $x \in M$ et tout $V \in \mathfrak{g}$ on ait

$$\mu(x)(V) = \phi^V(x)\,. \tag{5}$$

Propriété 3.5. *Pour tout $g \in G$ et tout $x \in M$, on a $\mu(g.x) = g.\mu(x)$, où l'action de G sur $\mathfrak{g}^*$ est l'action coadjointe définie par $\mathrm{Ad}^*(g)(\varphi) = \varphi \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})$.*

3.2 Réduction symplectique

On se donne ici encore une action hamiltonnienne d'un groupe de Lie compact connexe G sur M, et on note μ l'application moment associée. D'après la proposition 3.5, $\mu^{-1}(0)$ est stable par G.

Nous supposerons ici d'une part que 0 est une valeur régulière de μ, de sorte que $\mu^{-1}(0)$ est une sous-variété de M, et d'autre part que G agit librement sur $\mu^{-1}(0)$. Ainsi l'ensemble

$$M_G \overset{\text{déf}}{=} \left(\mu^{-1}(0)\right)/G$$

est une variété différentielle.

Théorème 3.6. *Il existe sur M_G une forme symplectique ω_G telle que si $\pi\colon \mu^{-1}(0) \to M_G$ est la projection canonique et $i\colon \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ l'inclusion, alors on a l'égalité entre formes sur $\mu^{-1}(0)$:*

$$\pi^*\omega_G = i^*\omega\,. \tag{6}$$

Supposons maintenant que l'on se donne $(M, \omega, L, h^L, \nabla^L)$ une variété préquantifiée. Nous supposerons de plus que h^L est G-invariante. Le but de ce qui suit est de trouver une préquantification sur M_G.

Commençons par définir une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ sur les sections de L due à Kostant :

Définition 3.7 (formule de Kostant)**.** La formule suivante définit une action de $\mathfrak{g}$ sur les sections de L : pour $V \in \mathfrak{g}$ et $s \in \Gamma(L)$,

$$\mathcal{L}_V s = \nabla^L_{V^M} s - 2\pi\sqrt{-1}(\mu\,, V)s\,, \tag{7}$$

où $(\,.\,,.)$ est le produit de dualité.

Pour pouvoir préquantifier M_G, il faut supposer (ce que nous ferons donc) que l'action de G vérifie la définition suivante :

Définition 3.8. Nous dirons que l'action de G *préserve la préquantification de M* si et seulement si l'action donnée par la formule de Kostant (7) dérive d'une action de G sur L, c'est-à-dire que l'on a une action $(g, l) \mapsto g.l$ de G sur L telle que $g.L_x = L_{g.x}$ et si s section de L et $V \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $x \in M$,

$$\mathcal{L}_V s(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tV}.\left(s\left(e^{-tV}x\right)\right)\right)|_{t=0}\,.$$

Grâce à la définition de μ et à (7), on vérifie que cette action de G préserve ∇^L.

Théorème 3.9. *Il existe un unique fibré en droites muni d'une connexion* (L_G, ∇^{L_G}) *sur* M_G *tel que*

$$\pi^* L_G = i^* L \text{ et } \pi^* \nabla^{L_G} = i^* \nabla^L \,, \tag{8}$$

où on a encore noté $\pi \colon \mu^{-1}(0) \to M_G$ *la projection canonique et* $i \colon M \hookrightarrow \mu^{-1}(0)$ *l'inclusion.*

Remarque 3.10. Comme $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\nabla^L)^2 = \omega$, les équations (6) et (8) impliquent que

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\nabla^{L_G})^2 = \omega_G \,.$$

De plus, comme le produit hermitien h^L est G-invariant, il existe un unique produit hermitien h^{L_G} sur L_G tel que

$$\pi^* h^{L_G} = i^* h^L \,.$$

Définition 3.11. Nous appellerons la variété préquantifiée $(M_G, \omega_G, L_G, h^{L_G}, \nabla^{L_G})$ la *réduction symplectique* de M.

4 La conjecture de Guillemin-Sternberg

4.1 Énoncé de la conjecture

Soit G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Considérons une variété symplectique compacte préquantifiée $(M, \omega, L, h^L, \nabla^L)$. Supposons que G agit sur M avec une action hamiltonienne et préservant la préquatification. Quitte à intégrer par rapport à la mesure de Haar sur G, nous pouvons alors supposer que la métrique h^L est G-invariante.

Notons $\mu : M \to \mathfrak{g}*$ l'application moment associée, et supposons que 0 est une valeur régulière de μ et que G agit sur $\mu^{-1}(0)$ librement. Nous pouvons alors considérer la réduction symplectique de M : $(M_G, \omega_G, L_G, h^{L_G}, \nabla^{L_G})$.

Considérons une structure presque complexe J sur M qui soit G-invariante et compatible avec ω (un tel J existe).

Nous pouvons donc considérer d'une part D^L l'opérateur de Dirac spin^c associé à $(M, \omega, J, L, \nabla^L)$, et d'autre part D^{L_G} celui associé à $(M_G, \omega_G, J_G, L_G, \nabla^{L_G})$. Enfin, puisque G préserve toutes nos données, il est facile de voir que l'action de G commute avec D^L, de sorte que $\ker D^L_+$ et $\ker D^L_-$ sont stables par G. Ainsi, nous pouvons définir *l'indice équivariant* $Q(M,L)^G$ de D^L par :

$$Q(M,L)^G = \dim\left(\Omega_G^{0,pair}(M,L) \cap \ker(D^L)\right) - \dim\left(\Omega_G^{0,impair}(M,L) \cap \ker(D^L)\right) \,,$$

où $\Omega_G^{0,*}(M,L)$ désigne l'ensemble des éléments invariants par G de $\Omega^{0,*}(M,L)$.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat qui nous intéresse ici :

Théorème 4.1 (conjecture de Guillemin-Sternberg)**.** *La réduction symplectique et la quantification géométrique commutent, au sens où :*

$$Q(M,L)^G = Q(M_G, L_G) \,.$$

Avant d'aller plus loin, donnons une idée de la stratégie employée ici. L'idée de départ est que, si l'on déforme l'opérateur D^L, comme on l'a vu dans la proposition 2.10, $Q(M,L)^G$ reste inchangée. On va donc définir une déformation D^L_T de l'opérateur D^L, telle que $D^L_0 = D^L$ et telle que, quand $T \to \infty$, la restriction de D^L_T aux formes G-invariantes se "concentre" au voisinage de $\mu^{-1}(0)$. Après passage au quotient, D^L_T donnera à la limite un opérateur sur M_G qui aura le même indice que D^{L_G}. On en déduira donc que l'indice de D^L restreint aux formes G-invariantes est égal à celui de D^{L_G}, ce que l'on veut démontrer.

4.2 Localisation

Soit $|.|$ une norme sur $\mathfrak{g}^*$ qui est $\mathrm{Ad}^*(G)$-invariante.

Définition 4.2. Soit $\mathscr{H} = |\mu|^2$ et $X^{\mathscr{H}}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé. Nous définissons l'opérateur de Dirac déformé D^L_T pour $T \geq 0$ par

$$D^L_T = D^L + \sqrt{-1}\frac{T}{2}c(X^{\mathscr{H}}) \,.$$

Théorème 4.3. *Pour tout voisinage ouvert U de $\mu^{-1}(0)$, il existe des constantes $C > 0$ et $b > 0$ telles que pour tout $T \geq 1$ et tout $s \in \Omega^{0,*}_G(M,L)$ à support dans $M \setminus U$, on ait*

$$||D^L_T s||_0^2 \geq C\left(||s||_1^2 + (T-b)||s||_0^2\right) \,. \tag{9}$$

Remarque 4.4. Remarquons que $\mu^{-1}(0)$ est contenu dans l'ensemble des points critiques de $\mathscr{H}$. Cependant la difficulté du théorème précédent est qu'il peut y avoir d'autres points critiques.

D'autre part, ce théorème montre bien que le noyau de D^L_T se localise au voisinage de $\mu^{-1}(0)$.

4.3 Passage au quotient

Soit U un voisinage de $\mu^{-1}(0)$ stable par l'action de G et suffisamment petit pour que G agisse sur U librement. Notons π la projection canonique de U sur U/G.

Si on se donne un fibré vectoriel F sur U muni d'une action de G telle que $F_{g.x} = g.F_x$, on peut alors considérer le fibré $F_{U/G}$ sur U/G tel que $(F_{U/G})_{\pi(x)} = F_x$. Dans la suite nous noterons ζ le fibré

$$\zeta = \left(\Lambda^{0,*}(T^*U) \otimes L\right)_{U/G} \,.$$

De plus, on peut aussi faire passer la connexion ∇^{Cl} au quotient, ce qui donne une connexion ∇^{ζ} sur ζ.

Propriété 4.5. *Il existe une isométrie R entre $\Omega^{0,*}_G(U,L)$ et $\Gamma(U/G,\zeta)$. Cette isométrie permet donc de descendre une forme G-invariante sur U en une section de ζ sur U/G.*

Définition 4.6. Posons $A_T = RD^L_T R^{-1}$, qui est un opérateur sur U/G. Un calcul permet de montrer que

$$A_T = \mathcal{D} + M + TV \,, \tag{10}$$

où M et V sont dans $\mathrm{End}(\zeta)$ et où l'opérateur $\mathcal{D}$ est défini à partir d'une base orthonormée $\{f_i\}$ de $T(U/G)$ par :

$$\mathcal{D} = \sum_i c(f_i)\nabla^{\zeta}_{f_i} \,.$$

4.4 Développement asymptotique de A_T au voisinage de M_G

Soit N_G le fibré normal à la sous-variété M_G de U/G. Si ε est assez petit, alors il existe un difféomorphisme ψ entre $\{(y,Z) \in N_G \,/\, |Z| < \varepsilon\} = B_\varepsilon$ et un voisinage ouvert $\mathscr{U}_\varepsilon$ de M_G dans U/G.

Soit ϖ la projection de N_G sur M_G. Soit ξ le fibré sur B_ε défini par $\xi = \varpi^*\left(\zeta|_{M_G}\right)$. On peut alors montrer que $\zeta|_{\mathscr{U}_\varepsilon} \simeq \xi$ au sens où on a un difféomorphisme Ψ entre $\zeta|_{\mathscr{U}_\varepsilon}$ et ξ tel que pour tout $x \in \mathscr{U}_\varepsilon$, Ψ induit un isomorphisme linéaire entre ζ_x et $\xi_{\psi(x)}$.

Il existe alors une fonction lisse k telle que l'application $s \in \Gamma(\zeta) \mapsto k^{1/2}s \in \Gamma(\xi)$ soit un isométrie.

Théorème 4.7. *On a*

$$k^{1/2}A_Tk^{-1/2} = D_T^{N_G} + \mathcal{D}^H + M + TA + O(|Z|^2\partial^N + |Z|\partial^H + |Z| + T|Z|^3)\,,$$

où $D_T^{N_G}$ est l'opérateur de Dirac déformé de la fibre de N_G (qui est un espace vectoriel), $\mathcal{D}$ un opérateur de "type Dirac" ne prenant que des dérivations "horizontales", c'est-à-dire parallèles à M_G, en compte, et M une matrice.

4.5 Convergence de A_T vers un opérateur sur $\Omega^{0,*}(M_G, L_G)$

Pour $\mu \geq 0$, nous noterons :
- $\mathbb{E}^\mu$ l'ensemble des sections de ξ au-dessus de N_G qui sont dans le μ^{e} espace de Sobolev,
- F^μ l'ensemble des sections de $\Lambda^{0,*}(T^*M_G)\otimes L_G$ au-dessus de M_G qui sont dans le μ^{e} espace de Sobolev.

Nous munirons ces espaces de normes Sobolev $||.||_{\mathbb{E}^\mu}$ (resp. $||.||_{\mathrm{F}^\mu}$).

Soit γ une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ telle que $\gamma(t) = 1$ si $t \leq 1/2$ et $\gamma(t) = 0$ si $t \geq 1$. Pour $Z \in N_G$, posons $\rho(Z) = \gamma\left(\frac{|Z|}{\varepsilon}\right)$.

Nous allons donner une façon de voir F^μ comme un sous-espace de $\mathbb{E}^\mu$, en localisant les sections au voisinage de M_G :

Définition 4.8. Soit $T > 0$. Soit $\beta_T \colon N_G \to \mathbb{R}$ défini, pour $y \in M_G$ et $Z \in N_{G,y}$, par :

$$\beta_{T,y}(Z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_T}}\rho(Z)\exp\left(-\frac{T}{2}|d\mu(Z)|^2\right)\,,$$

où α_T est une constante de normalisation.

Soit I_T l'application linéaire :

$$I_T \colon \sigma \in \mathrm{F}^\mu \mapsto \beta_T\sigma \in \mathbb{E}^\mu\,.$$

Par le choix de α_T, on voit que I_T est une isométrie. Soit $\mathbb{E}_T^\mu$ l'image de I_T dans $\mathbb{E}^\mu$. Nous noterons p_T la projection orthogonale de $\mathbb{E}^0$ sur $\mathbb{E}_T^0$ et $p_T^\perp$ la projection orthogonale sur $\mathbb{E}_T^{0,\perp}$.

Propriété 4.9. *L'espace $\mathbb{E}_T^0$ est exactement le noyau de $D_T^{N_G}$.*

Dans la décomposition $\mathbb{E}^0 = \mathbb{E}_T^0 \oplus \mathbb{E}_T^{0,\perp}$, on écrit $k^{1/2}A_Tk^{-1/2}$ comme une matrice :

$$k^{1/2}A_Tk^{-1/2} = \begin{pmatrix} A_{T,1} & A_{T,2} \\ A_{T,3} & A_{T,2} \end{pmatrix}\,.$$

Théorème 4.10. *Quand $T \to \infty$, on a l'identité entre opérateur agissant sur $\Omega^{0,*}(M_G, L_G)$:*

$$I_T{}^{-1}A_{T,1}I_T = D_Q^{L_G} + \frac{1}{\sqrt{T}}O(\partial + 1)\,, \tag{11}$$

où $D_Q^{L_G}$ est un opérateur ayant le même symbole principal que D^{L_G}.

D'autre part, pour T assez grand, $A_{T,4}$ est inversible.

Soit $\tilde{A}_T(u) = \begin{pmatrix} A_{T,1} & 0 \\ 0 & A_{T,2} \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & A_{T,2} \\ A_{T,3} & 0 \end{pmatrix}$. Par la proposition 2.10 et le théorème 4.10, on voit alors que $\mathrm{ind}(A_T) = \mathrm{ind}(\tilde{A}_T(1)) = \mathrm{ind}(\tilde{A}_T(0)) = \mathrm{ind}(D_Q^{L_G})$, et donc :

$$Q(M_G, L_G) = \mathrm{ind}(D^{L_G}) = \mathrm{ind}(D_Q^{L_G}) = \mathrm{ind}(D_T^L|_{\Omega_G^{0,*}(M,L)}) = Q(M,L)^G\,.$$

Références

[BL91] J.-M. Bismut et G. Lebeau – « Complex immersion and Quillen metrics », *Publ. Math. IHES* **74** (1991), p. 1–297.

[Puc11] M. Puchol – *Une démonstration analytique de la conjecture de Guillemin-Sternberg*, Mémoire, Paris Diderot, 2011.

[TZ98] Y. Tian et W. Zhang – « An analytic proof of the geometric quantization conjecture of Guillemin-Sternberg », *Invent. Math.* **132** (1998), p. 229–259.

[Ver01] M. Vergne – « Quantification géométrique et réduction symplectique », *Séminaire Bourbaki* **888** (2000-2001).