L'équation de Szegő, un cas d'école de système hamiltonien

Joseph Thirouin
sous la direction de Patrick Gérard

Introduction à un domaine de recherche
septembre 2013

Remerciements

Je voudrais remercier Patrick Gérard d'avoir accepté d'encadrer mon travail de M2. Il m'a patiemment introduit à ce domaine de recherche des systèmes hamiltoniens, dont je ne soupçonnais ni l'étendue, ni l'intérêt.

Je remercie chaleureusement Cécile Huneau et Bénédicte Haas pour leur lecture, leur présence et leurs conseils.

Préambule

Si la géométrie symplectique, en tant que domaine, s'est consacrée à l'étude des variétés de dimension finie que l'on pouvait munir d'une certaine structure (dite « symplectique », précisément), ce n'est que récemment que les analystes ont pris conscience que l'on pouvait, dans une certaine mesure, transposer ces notions géométriques au cadre de la dimension infinie, dans l'idée d'interpréter certaines équations aux dérivées partielles comme des systèmes hamiltoniens. Cette théorie, toute jeune et encore dénuée de cadre formel abstrait, manque pour l'instant d'exemples à son actif. L'équation de Korteweg - de Vries (KdV) en est un fameux :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

mais son étude s'avère fastidieuse (on peut se référer par exemple au livre très complet de Kappeler et Pöschel, [6]).

En revanche, une autre équation a attiré l'attention des chercheurs : l'équation de Szegő cubique. Introduite pour des raisons totalement étrangères, elle s'est pourtant révélée un cas d'école de système hamiltonien. Un formalisme très simple, et quelques outils d'analyse fonctionnelle, suffisent à exhiber ses principales caractéristiques. Son étude aujourd'hui bien avancée ouvre néanmoins sur de nombreuses questions, qui feront certainement l'objet d'une thèse de doctorat.

Dans une première partie, nous passerons en revue quelques généralités pour présenter les outils des analystes dans l'approche des problèmes hamiltoniens. Ensuite, nous présenterons l'équation de Szegő en elle-même, en tâchant de nous arrêter à quelques unes des propriétés qui en font le prix. Enfin, nous aborderons le cas de l'équation de demi-onde focalisante, un autre système hamiltonien dont l'étude – du moins l'espère-t-on – pourra tirer parti des résultats déjà connus sur l'équation de Szegő.

Table des matières

1 Systèmes hamiltoniens en dimension infinie

1.1 Définitions fondamentales

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), séparable. On appelle *structure symplectique* sur H la donnée d'une forme bilinéaire $\omega : H \times H \to \mathbb{K}$, antisymétrique et non-dégénérée.

On désigne par D un sous-espace vectoriel de H, dense dans H.

Champ hamiltonien. Soit $\mathcal{H} : D \to \mathbb{K}$ une fonctionnelle sur D. On suppose que $\mathcal{H}$ est différentiable au sens de Fréchet : pour tout $u \in D$, il existe une application $d\mathcal{H}(u) : D \to \mathbb{K}$ linéaire continue, telle que

$$\forall h \in D, \quad \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{H}(u+th) - \mathcal{H}(u)}{t} = d\mathcal{H}(u) \cdot h.$$

Grâce à la densité de D, pour tout $u \in D$, la forme linéaire continue $d\mathcal{H}(u)$ se prolonge de manière unique en une forme linéaire f_u continue sur H. Puisque ω est non-dégénérée, il existe donc un unique vecteur $X_{\mathcal{H}}(u)$ tel que $f_u(\cdot) = \omega(\cdot, X_{\mathcal{H}}(u))$, ou encore

$$\forall h \in D, \quad d\mathcal{H}(u) \cdot h = \omega(h, X_{\mathcal{H}}(u)).$$

Définition 1.1.
- L'application $u \mapsto X_{\mathcal{H}}(u)$ est appelée le *champ hamiltonien* de $\mathcal{H}$.
- Le *système hamiltonien* associé à $\mathcal{H}$ est l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{u} = X_{\mathcal{H}}(u), \quad u|_{t=0} = u_0 \in H.$$

  Par définition, une solution de cette équation est une application $u : \mathbb{R} \to H$ dérivable, telle que $u(0) = u_0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}u(t) = X_{\mathcal{H}}(u(t))$.
- Le *flot hamiltonien* associé à $\mathcal{H}$ est, lorsqu'elle est bien définie, l'application

$$\varphi : \begin{cases} H \times \mathbb{R} \longrightarrow H \\ (u_0, t) \longmapsto u(t). \end{cases}$$

Grâce à ces définitions, on voit immédiatement que $\mathcal{H}$ est une loi de conservation du système. Formellement,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(u(t)) = d\mathcal{H}(u(t)) \cdot \dot{u}(t) = \omega(X_{\mathcal{H}}(u(t)), X_{\mathcal{H}}(u(t))) = 0,$$

puisque ω est antisymétrique.

Crochet de Poisson. On définit aussi sur l'ensemble des fonctionnelles Fréchet-différentiables une structure de *crochet de Poisson* : pour F, G : $D \to \mathbb{K}$, on pose
$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G),$$
ce qui définit donc une nouvelle fonctionnelle (de D dans $\mathbb{K}$).

Le même calcul que précédemment permet de prouver la proposition suivante :

Proposition 1.1. *G est une loi de conservation pour le système hamiltonien associé à F si et seulement si*
$$\{F, G\} = 0.$$

Remarque (Comparaison avec la dimension finie). Ces définitions sont inspirées du cas de l'étude des variétés symplectiques : soit M une variété compacte de dimension paire. Une structure symplectique sur M est la donnée d'une 2-forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur M, non-dégénérée et *fermée*. À chaque fonction $F \in C^\infty(M)$, on peut ainsi associer un champ hamiltonien X_F, qui est le champ de vecteurs défini par : pour tout $m \in M$, $X_F(m)$ est le vecteur de l'espace tangent $T_m M$ tel que
$$\forall x \in T_m M, \quad dF(m) \cdot x = \tilde{\omega}_m(x, X_F(m)).$$
Le flot hamiltonien associé à F est le flot du champ de vecteur X_F, qui est globalement défini en temps puisqu'on a supposé M compacte.

La condition de fermeture ($\mathrm{d}\tilde{\omega} = 0$) s'avère nécessaire pour que les hamiltoniens se conservent le long du flot qui leur est associé. En dimension infinie, elle était implicitement contenue dans le fait que la forme ω était constante dans l'espace de Hilbert H (à la différence de $\tilde{\omega}$, qui varie en fonction du point m de M).

1.2 Paire de Lax

La clef de l'étude des systèmes hamiltoniens en dimension finie est la recherche de lois de conservation du système.

Il en va de même en dimension infinie, et Lax, dans son article [8], a introduit un outil fondamental pour l'étude de ces lois de conservation. Son idée majeure est d'interpréter les lois de conservation d'un système comme les valeurs propres d'un opérateur dépendant du temps.

On suppose donc donnée une application
$$\Phi : \begin{cases} H \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ u \longmapsto L_u, \end{cases}$$
où L_u est un opérateur autoadjoint.

Soit $u : \mathbb{R} \to H$ une fonction $\mathcal{C}^1$. On note $L(t) := \Phi(u(t))$, et l'on voudrait montrer que les valeurs propres de $L(t)$ sont conservées au cours du temps. Ce serait le cas si $L(t)$ était unitairement équivalent à $L(0)$, c'est-à-dire s'il existait une famille d'opérateurs unitaires $t \mapsto U(t)$, avec $U(0) = I$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^*.$$

Cela revient à demander que $\frac{d}{dt}(U(t)^*L(t)U(t)) = 0$, autrement dit,

$$(\partial_t U)^* LU + U^*(\partial_t L)U + U^* L \partial_t U = 0. \tag{1}$$

Ici intervient un résultat simple :

Lemme. *Une famille (régulière) à un paramètre $U : t \mapsto U(t)$, avec $U(0) = I$, est une famille d'opérateurs unitaires si et seulement si il existe une famille $t \mapsto B(t)$ d'opérateurs antisymétriques, tels que U satisfasse l'équation différentielle ordinaire*

$$\begin{cases} \partial_t U(t) = B(t)U(t), \\ U(0) = I. \end{cases}$$

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de différentier l'identité $UU^* = I$. Cela donne

$$(\partial_t U)U^* + U(\partial_t U)^* = 0.$$

Si nous posons $B := (\partial_t U)U^*$, cette égalité signifie exactement que $B(t)$ est antisymétrique pour tout t. Et l'on a bien $\partial_t U = (\partial_t U)U^*U = BU$.

Réciproquement, si $\partial_t U = BU$, alors la dérivée en t de UU^* et U^*U est nulle. □

De la sorte, en substituant dans 1, nous trouvons

$$-U^*BLU + U^*(\partial_t L)U + U^*LBU = 0,$$

ou encore $\partial_t L = BL - LB$. D'où le théorème suivant :

Théorème 1. *La famille $L(t)$ est unitairement équivalente à $L(0)$ si et seulement si il existe une famille $B(t)$ d'opérateurs antisymétriques tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{dL}{dt}(t) = [B, L](t).$$

En particulier, les valeurs propres de L sont conservées au cours du temps.

On dit que (L, B) est une paire de Lax associée à u.

2 L'équation de Szegő cubique

L'équation de Szegő cubique a été introduite par Patrick Gérard et Sandrine Grellier en 2008 (voir [2]), comme un modèle d'équation non-dispersive. Ils ont observé que cette équation illustre remarquablement le formalisme hamiltonien introduit ci-dessus.

2.1 Formulation hamiltonienne

On considère le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On note $L^2(\mathbb{T})$, ou tout simplement L^2, l'ensemble des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, et localement de carré intégrable. Si u, $v \in L^2$, la formule

$$(u,v) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u\bar{v}$$

définit un produit hermitien, qui fait de L^2 un espace de Hilbert. On dispose alors d'une base hilbertienne, la famille des fonctions $e_k : x \mapsto e^{ikx}$, où k décrit $\mathbb{Z}$.

Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $\hat{f}(k) := (f, e_k)$. Nous pouvons à présent définir l'espace de Hardy :

Définition 2.1. On appelle *espace de Hardy* du tore, et on note $L^2_+(\mathbb{T})$ (ou seulement L^2_+), l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\mathbb{T})$ dont les modes de Fourier de fréquence négative sont nuls :

$$L^2_+(\mathbb{T}) = \left\{u \in L^2(\mathbb{T}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{Z}^*_-,\ \hat{u}(n) = 0\right\}.$$

Pour $s > 0$ et $p \geq 2$, on note de même $H^s_+ := H^s \cap L^2_+$, et $L^p_+ := L^p \cap L^2_+$.

On introduit également la projection sur cet espace :

Définition 2.2. Le *projecteur de Szegő*, noté Π_+, est la projection orthogonale (pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$) sur l'espace de Hardy dans L^2 : si $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx} \in L^2$, alors

$$\Pi_+(u) = \sum_{n\geq 0} u_n e^{inx}.$$

On note aussi $\Pi_- := I - \Pi_+$.

Enfin, on peut munir L^2 (et semblablement L^2_+) d'une structure symplectique, en posant $\omega(u,v) := \Im\mathrm{m}(u,v)$, la partie imaginaire du produit hermitien.

À présent, soit $H = L^2_+$, et $D = L^6_+$. Posons, pour $u \in D$,

$$\mathcal{H}(u) := \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4} = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |u(e^{ix})|^4 dx.$$

Alors $\mathcal{H}$ est Fréchet-différentiable, et si $h \in D$,

$$d\mathcal{H}(u) \cdot h = \Re\mathrm{e}(h, |u|^2 u) = \omega(h, -i|u|^2 u).$$

Ainsi, $X_{\mathcal{H}}(u) = -i\Pi_+(|u|^2 u)$. Le système hamiltonien associé à $\mathcal{H}$ est donc l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\boxed{i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u).}$$

C'est cette équation que l'on appelle *équation de Szegő cubique.*

Existence d'un flot. P. Gérard et S. Grellier ont prouvé dans [3] le théorème suivant, qui montre que la bonne régularité de la donnée initiale est d'une « demi-dérivabilité » :

Théorème 2. *Soit $s \geq \frac{1}{2}$. Étant donné $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$, il existe une unique application $u : \mathbb{R} \to H^s_+$ continue telle que*

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{S}$$

2.2 Opérateurs de Hankel, tores invariants

La particularité majeure de l'équation de Szegő, qui fait toute son originalité, est le fait qu'elle possède non seulement une, mais même deux paires de Lax.

Pour voir ce fait, quelques notations sont à préciser :

Définition 2.3 (Opérateur de Hankel)**.** Soit $u \in H^{1/2}_+$. L'*opérateur de Hankel* de symbole u est l'application

$$H_u : \begin{cases} L^2_+ \longrightarrow L^2_+ \\ \quad h \longmapsto \Pi_+(u\bar{h}). \end{cases}$$

L'opérateur H_u est $\mathbb{C}$-antilinéaire, et $\mathbb{R}$-linéaire. Il est borné, compact (c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt), et vérifie la propriété suivante : $\forall h_1,\, h_2 \in L^2_+$,

$$(H_u(h_1), h_2) = (H_u(h_2), h_1). \tag{2}$$

En particulier, H_u est autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle := \Re\mathrm{e}(\cdot, \cdot)$.

Introduisons une seconde famille d'opérateurs sur L^2_+.

Définition 2.4 (Opérateur de Hankel décalé)**.** Notons z la fonction $x \mapsto e^{ix}$.

– Soit $b \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'*opérateur de Toeplitz* de symbole b est l'application

$$T_b : \begin{cases} L^2_+ \longrightarrow L^2_+ \\ \quad h \longmapsto \Pi_+(bh). \end{cases}$$

– Soit $u \in H^{1/2}_+$. L'*opérateur de Hankel décalé* de symbole u, noté K_u est donné par l'une des formules suivantes

$$K_u := H_u T_z = T_{\bar{z}} H_u = H_{T_{\bar{z}} u}.$$

Comme les opérateurs de Toeplitz sont $\mathbb{C}$-linéaires et continus, K_u est $\mathbb{C}$-antilinéaire et compact. Il vérifie également une relation du type de (2), donc est autoadjoint réel.

Le théorème majeur est le suivant :

Théorème 3 ([3], [5]). *Soit $u : \mathbb{R} \to H^{1/2}_+$ une solution de (S). Alors*

- $$\frac{d}{dt} H_{u(t)} = \left[B_{u(t)}, H_{u(t)}\right],$$
  où $B_u := -iT_{|u|^2} + \frac{i}{2} H_u^2$ est antisymétrique.
- $$\frac{d}{dt} K_{u(t)} = \left[C_{u(t)}, K_{u(t)}\right],$$
  où $C_u := -iT_{|u|^2} + \frac{i}{2} K_u^2$ est antisymétrique.

Pour $u \in H^{1/2}_+$, en s'appuyant sur le théorème spectral, on peut trouver une base hilbertienne complexe de $(L^2_+)_{\mathbb{C}}$, notée $(e_j)_{j \geq 1}$, telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_u(e_j) = \rho_j(u) e_j$. Les $\rho_j(u)$ sont des valeurs propres de H_u, réelles, telles que

1. pour tout $j \geq 1$, $\rho_j(u) \geq \rho_{j+1}(u) \geq 0$,
2. la suite $(\rho_j(u))$ tend vers 0,
3. pour tout $j \geq 1$, on a la formule du min-max

$$\rho_j(u) = \min_{\substack{F \subset L^2_+ \\ \dim F \leq j-1}} \max_{\substack{h \in F^\perp \\ \|h\|=1}} \|H_u(h)\|.$$

On a de même une suite $(\sigma_j(u))_{j \geq 1}$ de valeurs propres de K_u, qui vérifient les mêmes propriétés.

Soit u une solution de (S). Grâce à la paire de Lax, nous savons que $H_{u(t)}$ et $K_{u(t)}$ sont unitairement équivalents à H_{u_0} et K_{u_0} respectivement. Ainsi, en utilisant la formule du min-max, nous aboutissons

Corollaire 2.1. *Pour tout $j \geq 1$, les fonctions ρ_j et σ_j sont des lois de conservation de (S).*

Ici intervient un lemme remarquable, qui permet de tirer tout le parti de ces deux paires de Lax :

Lemme (Entrelacement des valeurs propres). *Soit $u \in H^{1/2}_+$. On a les encadrements suivants :*

$$\rho_1(u) \geq \sigma_1(u) \geq \rho_2(u) \geq \sigma_2(u) \geq \dots$$

Démonstration. Il s'agit encore d'une utilisation de la formule du min-max, où intervient le fait élémentaire que

$$(K_u^2(h), h) = (H_u^2(h), h) - |(h, u)|^2,$$

pour $h \in L^2_+$. $\square$

La grande idée de Gérard et Grellier, dans [3], est de s'intéresser au cas où H_{u_0} est de rang fini. En effet, cette propriété de conserve au cours du temps (puisqu'elle se lit sur la suite (ρ_j)), et de plus, le lemme d'entrelacement offre une disjonction de cas très simple : $\operatorname{rg} K_{u_0} \in \{\operatorname{rg} H_{u_0}, \operatorname{rg} H_{u_0} - 1\}$.

Or, un résultat dû à Kronecker ([7]) permet de relier l'information selon laquelle $\operatorname{rg} H_{u_0} < \infty$ à l'expression elle-même de u_0.

Théorème 4. *Soit $N \geq 1$ un entier, et $u \in H^{1/2}_+$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\operatorname{rg} H_u = \operatorname{rg} K_u = N$.

(ii) il existe deux polynômes A, B à coefficients complexe, premiers entre eux, avec $\deg(A) \leq N-1$, $\deg(B) = N$, $B(0) = 1$, *et de plus* $B(z) \neq 0$ *pour* $|z| \leq 1$, *tels que*

$$u(e^{ix}) = \frac{A(e^{ix})}{B(e^{ix})}.$$

De même, les propositions suivantes sont équivalents :

(i') $\operatorname{rg} H_u = \operatorname{rg} K_u + 1 = N$.

(ii') il existe deux polynômes A, B à coefficients complexe, premiers entre eux, avec $\deg(A) \leq N-1$, $\deg(B) = N-1$, $B(0) = 1$, *et de plus* $B(z) \neq 0$ *pour* $|z| \leq 1$, *tels que*

$$u(e^{ix}) = \frac{A(e^{ix})}{B(e^{ix})}.$$

Autrement dit, si H_u est de rang fini, u est une fraction rationnelle.

On note $\mathcal{V}(2N)$ l'ensemble des fonctions vérifiant *(ii)*, et $\mathcal{V}(2N-1)$ l'ensemble des fonctions vérifiant *(ii')*. Ces ensembles sont donc stables par le flot.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{V}(K)$ possède une structure de sous-variété complexe de dimension K (une seule carte suffit) ; elle est de dimension $2K$ réelle. C'est même une variété kählerienne, puisque la forme symplectique ω se restreint à $\mathcal{V}(D)$, et que pour tout $u \in \mathcal{V}(D)$, la forme $\omega \restriction_{T_u(\mathcal{V}(D)) \times T_u(\mathcal{V}(D))}$ est non-dégénérée.

Sur ces variétés donc, on peut appliquer la théorie de la dimension finie (exposée dans [1] par exemple) : le système est intégrable au sens de Liouville, et l'on trouve que les solutions évoluent le long de tores invariants par le flot. Ce type de solution est appelé *quasi-périodique*.

2.3 Deux exemples : les variétés $\mathcal{V}(1)$ et $\mathcal{V}(2)$

Dans ce paragraphe, nous allons exploiter les résultats mentionnés ci-dessus pour les basses dimensions, et en déduire quelques informations sur la dynamique des solutions.

La variété $\mathcal{V}(1)$ est l'ensemble des fonctions

$$\left\{ e^{ix} \mapsto \frac{\alpha}{1 - pe^{ix}} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C}^*, |p| < 1 \right\}.$$

La stabilité de $\mathcal{V}(1)$ par le flot entraîne que si $u_0 \in \mathcal{V}(1)$, la solution sera de la forme

$$u(t) \longmapsto \frac{\alpha(t)}{1 - p(t)e^{ix}}.$$

Des calculs explicites montrent que $|\alpha(t)| = |\alpha(0)|$, et $|p(t)| = |p(0)|$. Cela confirme bien que la trajectoire s'effectue le long d'un tore de dimension 2 réelle (sauf dans le cas trivial où $p(0) = 0$).

Ce trajectoire torique possède une propriété de stabilité, que nous énonçons : pour $\varphi \in \mathcal{V}(1)$, on notera T^{φ} le tore (potentiellement) parcouru par la trajectoire issue de φ (c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions $e^{ix} \mapsto e^{ia}\varphi(e^{ix}e^{-ib})$, où a et b décrivent $\mathbb{R}$). On note également d la distance d'un point à un ensemble pour la norme $\|\cdot\|$.

Proposition 2.2 (cf. [3]). *Soit $\varphi \in \mathcal{V}(1)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in H^{1/2}_+$ vérifiant*

$$d(u_0, T^{\varphi}) \leq \delta,$$

la solution u du problème (S) associé vérifie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(u(t), T^{\varphi}) \leq \varepsilon.$$

Dans $\mathcal{V}(2)$, à présent, les fonctions sont de la forme

$$e^{ix} \mapsto \frac{\alpha e^{ix} + \beta}{1 - pe^{ix}}.$$

On démontre cette fois (également dans [3]) un résultat d'instabilité, concernant le comportement des normes de Sobolev en grand temps :

Proposition 2.3. *Il existe une famille de données initiales $(u_0^{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ dans $\mathcal{V}(2)$, convergeant quand $\varepsilon \to 0$ (ainsi que toutes leurs dérivées) vers un $u_0 \in \mathcal{V}(2)$, telle que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un $t^{\varepsilon} \geq \frac{1}{\varepsilon}$ tel que la solution u^{ε} correspondant à u_0^{ε} vérifie*

$$\forall s > \frac{1}{2}, \quad \|u^{\varepsilon}(t^{\varepsilon})\|_{H^s} \gtrsim (t^{\varepsilon})^{2s-1}.$$

Remarque. Ce résultat prouve en particulier qu'il n'existe aucune loi de conservation pour la norme H^s des solutions de l'équation de Szegő.

3 L'équation de demi-onde : quelques enjeux

L'équation de demi-onde à linéarité cubique (que j'ai étudiée dans mon mémoire de M2) est une équation aux dérivées partielles hamiltonienne, qui est une « simplification » de l'équation des ondes en ce qu'elle est d'ordre 1 en temps, et ne conserve d'elle qu'un seul des deux aspects focalisant ou défocalisant. On introduit donc un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1, $|D|$, plus complexe que ∂_x, et défini de la manière suivante : si $w = \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k e^{ikx}$ est une fonction sur le tore,

$$|D|w = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| w_k e^{ikx}.$$

Avec cette définition, il apparaît que $|D|^2 = -\partial_x^2$.

L'équation de demi-onde défocalisante est alors la suivante :

$$i\partial_t u - |D|u = |u|^2 u, \tag{3}$$

avec une donnée initiale $u(0,\cdot) = u_0$. Elle dérive du hamiltonien $\mathcal{H}_2(u) = \frac{1}{2}(|D|u,u)+\frac{1}{4}\|u\|_{L^4}^4$ pour la même structure symplectique que précédemment.

Outre $\mathcal{H}_2$, cette équation possède des lois de conservation (on note $D := -i\partial_x$) :

$$Q(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2,$$
$$M(u) := (Du,u),$$

grâce auxquelles on peut établir qu'elle admet un flot sur $H^{1/2}$.

Proximité avec l'équation de Szegő. Le calcul qui suit a une portée heuristique : il met en évidence que les deux équation de Szegő et de demi-onde ont une certaine parenté.

Soit $u_0 \in H_+^{1/2}$, et u la solution de (3) dans $H^{1/2}$ qui a pour donnée initiale u_0. Notons $u^\pm = \Pi_\pm u$, et observons que $\Pi_\pm$ et D (et $\Pi_\pm$ et ∂_t) commutent. Nous voyons ainsi que (3) équivaut au système d'équations :

$$\begin{cases} i\partial_t u^+ - Du^+ = \Pi_+(|u|^2 u), \\ i\partial_t u^- + Du^- = \Pi_-(|u|^2 u). \end{cases} \tag{4}$$

Supposons de plus que $\|u_0\|_{H^{1/2}} \leq \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit). Alors

Lemme. $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u^-(t)\|_{H^{1/2}} = O(\varepsilon^2)$.

Démonstration. La preuve est très simple, et repose sur une exploitation astucieuse des lois de conservations évoquées plus haut. La conservation du hamiltonien $\mathcal{H}_2$ et celle de M, combinées au fait que u_0, par hypothèse, n'a que des modes de fréquence positive, donnent les égalités suivantes, valables pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(|D|u(t), u(t)) + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 = (Du_0, u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^4}^4,$$
$$(Du(t), u(t)) = (Du_0, u_0).$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, on trouve

$$2(|D|u^-(t), u^-(t)) + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^4}^4 = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^4}^4,$$

et donc $(|D|u^-(t), u^-(t)) \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^4}^4$. Cependant, nous savons que $H^{1/2}$ s'injecte continûment dans L^4, de sorte que $\|u_0\|_{L^4}^4 \leq C\varepsilon^4$.

Mais comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, par définition, $\widehat{u^-(t)}(0) = 0$, la norme $\|u^-(t)\|_{H^{1/2}}$ équivaut à la norme de Sobolev homogène $\sqrt{(|D|u^-(t), u^-(t))}$, d'où le résultat. □

Ce lemme, exposé dans [4], suggère donc de négliger u^-, et de faire l'approximation $u \simeq u^+$. Le système (4) se réduit alors à l'équation $i\partial_t u - Du = \Pi_+(|u|^2 u)$. Après le changement de variable $w(t, e^{ix}) := u(t, e^{i(x-t)})$, cette dernière équation devient

$$i\partial_t w = \Pi_+(|w|^2 w).$$

Autrement dit, w est solution de l'équation de Szegő cubique.

Perspectives. Tout l'enjeu du travail commencé dans mon mémoire de M2 est donc d'explorer cette ressemblance entre l'équation de Szegő et l'équation de demi-onde (focalisante ou défocalisante), si possible de manière à déduire de nos certitudes sur la première des renseignements sur la seconde, encore très mal connue. Par exemple, nul ne sait si l'équation de demi-onde admet une paire de Lax.

Une grande question est aussi l'existence de tores invariants : le but de mon mémoire consiste à en trouver qui soient de dimension 2, en déformant des tores de l'équation de Szegő grâce au théorème des fonctions implicites. La question de leur stabilité (selon la définition donnée plus haut) est ouverte. Et surtout, il serait intéressant de trouver des tores invariants de dimension 3, car ils présenteraient sans doute, à la manière de la variété $\mathcal{V}(2)$, des phénomènes d'instabilité.

Les perspectives de recherche sont donc surtout dans l'utilisation de l'arsenal de la théorie KAM, de manière à déformer les tores connus en tores pour l'équation de demi-onde.

Références

[1] Arnold, V.I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1978.

[2] Gérard, P. et Grellier, S., *L'équation de Szegő cubique*, Séminaire X-EDP, École polytechnique, 2008.

[3] Gérard, P. et Grellier, S., *The cubic Szegő equation*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4^e série, t. 43 (2010), pp. 761–810.

[4] Gérard, P. et Grellier, S., *Effective integrable dynamics for a certain nonlinear wave equation*, Analysis and PDE, volume 5 n° 5 (2012), pp. 1139-1155.

[5] Gérard, P. et Grellier, S., *Invariant tori for the cubic Szegő equation*, Inventiones Mathematicae, volume 187 n° 3 (2012), pp. 1139-1155.

[6] Kappeler, T. et Pöschel, J., *KdV & KAM*, Ergebnisse Math. Grenzg., volume 45, Springer (2003).

[7] Kronecker, L., *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen* (1881), réédité dans Mathematische Werke, volume 2, pp. 113-192.

[8] Lax, P.D., *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, CPAM n° 21 (1968), pp. 467-490.

[9] Pocovnicu, O., *Study of a nonlinear, non-dispersive, completely integrable equation and of its perturbations*, thèse de Doctorat sous la direction de Patrick Gérard.