MAGISTERE 1ère ANNEE

# Partiel d'intégration-probabilités

**Jeudi 17 Novembre 2005**

Durée 2h

Ni notes ni calculettes ni portables (etc.) SVP.

Il vous est demandé de justifier soigneusement vos réponses; il sera tenu compte de la rédaction.

Barème approximatif:
**3 + 4 + 7 + 6** = (3) + (1 + 1 + 1 + 1) + (1+1+2+3) + (2+1+1+2)

**Exercice 1.** On se donne deux mesures positives $\mu$ et $\nu$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, et on suppose que $\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[) < +\infty$ pour tout choix de $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.

**Exercice 2.** Soit $f : [0,\infty[ \to [0,\infty[$ une fonction borélienne.

1. Montrer que la formule $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{Arctg}(xf(t))}{1+t^2}\,dt$, $x \geq 0$, définit une fonction $F : [0,\infty[ \to \mathbb{R}$ continue.

2. Montrer que la limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe.

3. Montrer que $F$ est continûment dérivable sur $]0,\infty[$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $f$ pour que $F$ soit de classe $C^1$ sur $[0,\infty[$.

**Exercice 3.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $X$, à valeurs complexes, et intégrables pour $\mu$. On suppose que la suite $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ converge, pour $\mu$-presque tout $x \in X$, vers une limite $f(x)$. On suppose également que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|\,d\mu = 1. \tag{1}$$

1. Montrer que $f$ est intégrable, et que $\int |f|\,d\mu \leq 1$.

2. Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.

A partir de maintenant, on suppose de plus que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|\, d\mu = \int |f|\, d\mu, \tag{2}$$

et on veut montrer que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. S'il vous plait, n'utilisez pas l'exercice fait en TD où l'on démontre ce résultat de manière différente!

3. On suppose dans cette question que $f$ et les $f_n$, $n \geq 1$, sont à valeurs réelles positives sur $X$. On pose $g_n = \mathrm{Min}\{f_n, f\}$ pour $n \geq 1$.

a. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\big(\int g_n\, d\mu\big) = \int f\, d\mu$.

b. Déterminer les limites $\lim_{n\to\infty}\big(\int |f - g_n|\, d\mu\big)$ et $\lim_{n\to\infty}\big(\int |f_n - g_n|\, d\mu\big)$, et en déduire que $\lim_{n\to\infty}\big(\int |f_n - f|\, d\mu\big) = 0$.

4. On revient au cas général (on ne suppose plus que $f$ et les $f_n$ sont positives). Pour $n \geq 1$ et $x \in X$, on pose $h_n(x) = f_n(x)$ si $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et $h_n(x) = f_n(x)\,\frac{|f(x)|}{|f_n(x)|}$ si $|f_n(x)| > |f(x)|$.

a. Montrer que $h_n$ est intégrable et que $\lim_{n\to\infty}\big(\int |h_n - f|\, d\mu\big) = 0$.

b. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\big(\int |h_n - f_n|\, d\mu\big) = 0$. Conclure.

**Exercice 4.** On se donne un entier $n \geq 1$, on se place dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on identifie $\mathbb{R}^n$ au sous-espace $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et on note $\pi$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle la formule pour la mesure de Hausdorff $H^n$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$: pour $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $H^n(E) = \lim_{\delta\to 0} H^n_\delta(E)$, où

$$H^n_\delta(E) = c_n \inf\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} diam(A_k)^n \,;\, E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \text{ et } diam(A_k) \leq \delta \text{ pour tout } k\Big\},$$

et $c_n$ est choisi pour que $H^n$ coincide avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $I = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ le cube unité de $\mathbb{R}^n$, on se donne un ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, et on suppose que pour tout $x \in I$, l'image réciproque de $x$ par $\pi$ contient au moins trois points de $E$. On veut montrer qu'alors $H^n(E) \geq 3$.

1. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \inf\big\{t \in \mathbb{R}\,;\,(x,t) \in E\big\}$. Montrer que $\big\{x \in I\,;\, f(x) > \lambda\big\}$ est ouvert dans $I$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On note $E_1$ l'ensemble des points $z \in E$ tels que $\pi(z) \in I$ et la demi-droite ouverte verticale descendante issue de $z$ ne rencontre pas $E$ (autrement dit, $z - t(0,\ldots 0,1) \notin E$ pour $t > 0$). Montrer que $E_1$ est borélien.

3. Montrer que $H^n(E_1) \geq H^n(I) = 1$.

4. Montrer que $H^n(E) \geq 3$.