Partiel du cours d'intégration-probabilités

Le 25 Novembre 2013

Durée: 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

Question de cours. Citer le lemme de Fatou et théorème de convergence dominée. Prouver le théorème de convergence dominée à partir du lemme de Fatou.

Exercice I. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Etudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^{n+2}}\, dx .$$

2) Soient $a, b \in]0,\infty[$. Justifier l'égalité suivante:

$$\int_{]0,\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2} .$$

3) Soient $a, b \in]0,\infty[$ tels que $a < b$. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_{]0,\infty[} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$

Représenter cette intégrale comme une intégrale double et la calculer explicitement en fonction de a et de b (justifier soigneusement sa réponse).

Exercice II. On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $h \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(R), \ell)$. On rappelle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est C^∞ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}} |h - \psi|\, d\ell < \epsilon$.

1) Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(R), \ell)$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée et soit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle telle que $\lim_n \omega_n = \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\omega_n x + \varphi_n)\, \ell(dx) \;=\; 0.$$

2) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites réelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = a_n \sin(2\pi n x) + b_n \cos(2\pi n x)$. On fait l'hypothèse suivante:

$$\exists A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \;:\quad \ell(A) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 .$$

On pose $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\varphi_n \in [0, 2\pi]$, tel que $f_n(x) = \rho_n \cos(2\pi n x + \varphi_n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) On pose $g = \sup_n |f_n|$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = [-p, p] \cap A \cap \{g \leq p\}$. Montrer qu'il existe $p_0 \geq 1$ tel que $0 < \ell(A_{p_0}) < \infty$. En déduire que $\lim_n \int_{A_{p_0}} f_n^2 \, d\ell = 0$.

4) Montrer que $\lim_n \int_{A_{p_0}} \big(1 + \cos(4\pi n x + 2\varphi_n)\big) \, d\ell(x) = \ell(A_{p_0})$.

5) On rappelle que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Déduire du **3)** et du **4)** que $\lim_{n\to\infty} \rho_n^2 = 0$ et donc que $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$.

Exercice III. Soit (E, d), un espace métrique séparable. On note $\mathscr{B}(E)$ la tribu Borélienne. Pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, on note $B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. Une mesure positive $\mu : \mathscr{B}(E) \to [0, \infty]$ est dite *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante:

$$\forall x, y \in E, \ \forall r > 0, \qquad 0 < \mu\big(B(x, r)\big) = \mu\big(B(y, r)\big) < \infty \, .$$

On fixe μ et ν, deux mesures uniformément réparties. Pour tout $r > 0$, on pose $g(r) = \mu\big(B(x, r)\big)$ et $h(r) = \nu\big(B(x, r)\big)$. Dans ce qui suit U désigne un ouvert non-vide de E.

1) Montrer que $\big\{(x, y) \in U \times E : d(x, y) < r\big\} \in \mathscr{B}(E) \otimes \mathscr{B}(E)$. Expliquer pourquoi $x \in E \mapsto \nu\big(U \cap B(x, r)\big)$ est $\mathscr{B}(E)$-mesurable.

2) Montrer $\int_U \nu(U \cap B(x, r)) \, \mu(dx) = \int_U \mu(U \cap B(y, r)) \, \nu(dy)$. *Indication: on peut montrer que ces intégrales valent $\mu \otimes \nu(V)$, pour un certain sous-ensemble V de $E \times E$, différent de celui du* **1)**.

3) On suppose que $\nu(U) < \infty$. Montrer que $\mu(U) = \int_U \big(\lim_{r\to 0+} \frac{1}{h(r)} \nu(U \cap B(x, r))\big) \mu(dx)$. À l'aide du **2)**, en déduire que

$$\mu(U) \leq \Big(\liminf_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)}\Big) \nu(U) \, .$$

4) Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $\mu = c\nu$.

5) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme Euclidienne canonique $\|\cdot\|$. On note la sphère unité par $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. On note $\mathscr{B}(S)$ la tribu Borélienne de S. Soit $\mu : \mathscr{B}(S) \to \mathbb{R}_+$, une mesure positive finie telle que pour toute matrice orthogonale M et tout Borélien B de S, on ait $\mu(B) = \mu(M(B))$. Montrer que μ est un multiple de la mesure de surface de S.

Exercice IV. Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$, une mesure de probabilité, c'est-à-dire que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. On note $\widehat{\mu}$ sa transformée de Fourier: pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \, \mu(dx)$. On suppose qu'il existe $v \neq 0$ tel que $|\widehat{\mu}(v)| = 1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\mathbb{R} \backslash A) = 0$, où $A = \{ak + b \, ; \, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice V. On note $\|\cdot\|$ la norme Euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$ et ℓ_n la mesure de Lebesgue.

1) On pose $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a-t-on $\int_D \|x\|^{-\alpha} \, \ell_n(dx) < \infty$?

2) Pour quels $\beta \in \mathbb{R}_+$ a-t-on $\sum_{p,q\geq 1} (p^2 + q^2)^{-\beta} < \infty$?