Équations de transport à coefficients BV

Oana Ivanovici
Sujet proposé par François Bouchut

21 Juin 2004

Table des matières

Introduction

On s'intéresse à l'unicité des solutions faibles pour une classe d'équations de transport dont le coefficient est á variation bornée. L'outil principal pour démontrer des résultats d'unicité est, dans les deux cas, un lemme de commutation du champ de vecteur avec un opérateur de régularisation.

On introduit la notion de solution ´ renormalisée ˇ (i.e. une solution faible de (TR) qui vérifie $\forall \beta \in C^1(\mathbb{R}) \quad \partial_t \beta(w) + b(t,x)\beta'(w) = cw\beta'(w)$) et on démontre que toute solution faible est une solution renormalisée.

Ce résultat est le point clé pour l'obtention de l'unicité des solutions bornées pour des équations de transport.

1 Fonctions BV

Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

On rappelle quelques propriétés élémentaires des espaces de Sobolev, et on introduit les fonctions BV.

1.1 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Pour $p \geq 1$, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distributions sont encore dans $L^p(\Omega)$.

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \exists g_1, \cdots, g_d \in L^p(\Omega), \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \right\}$$

On note alors $\partial u/\partial x_i = g_i, \nabla u = (\partial u/\partial x_i, \cdots, \partial u/\partial x_d)$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est normé par $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}$, ce qui en fait un espace de Banach.

- $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

  Démonstration. Voir [3], Ch.IX. □

- **Densité**

  Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite u_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec

  $$\begin{cases} u_{n|\Omega} \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et p.p. sur } \Omega \\ \nabla u_{x|\omega} \longrightarrow \nabla u_{|\omega} \text{ dans } (L^p(\omega))^d \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \end{cases}$$

  Démonstration. Voir [3], Thm.IX-2. □ □

- **Dérivation d'un produit de composition (« chain rule ») dans** $(W^{1,p}(\Omega))$

  Soit $\beta \in C^1(\Omega)$ où Ω est de fermeture compacte, et $u \in (W^{1,p}(\Omega)^m)$. On a alors :

  $$\frac{\partial}{\partial x_i}(\beta \circ u) = \beta'(u).\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

  Démonstration. Voir [3], Prop IX.5. □

1.2 L'espace $BV(\Omega)$

Si $u \in (L^1(\Omega))^m$, on sait que Du, sa dérivée au sens des distributions, est une mesure de Radon sur Ω. Plus précisément, Du est une matrice $m \times d$ de mesures $(D_i u_j)_{i,j}$ avec

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_i} u_j dx = -\int_\Omega \phi d D_i u_j dx.$$

Définition 1. $(BV(\Omega))^m$ est l'ensemble des fonctions de $(L^1(\Omega))^m$ dont la dérivée est une mesure finie.

En particulier, pour tout i et j, $|D_i u_j|(\Omega) < \infty$

$V(u, \Omega) = |Du|(\Omega)$ est la variation totale de u. ($V(u, \Omega) < \infty$)

$$\begin{aligned} V(u,\Omega) = |Du|(\Omega) &= \sup\left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^d \int_\Omega \phi_i dD_i u_j \mid \phi \in (C_c^1(\Omega))^m, \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{j=1}^m \int_\Omega u_j \text{div } \phi_j \, dx \mid \phi \in (C_c^1(\Omega))^m, \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

- L'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ est inclus dans $BV(\Omega)$, car $\forall u \in W^{1,1}(\Omega)$, la dérivée faible est donnée par ∇u et que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$

- L'inclusion est stricte ! $\chi_{[0,\infty]}$, fonction de Heaviside a pour dérivée δ_0, donc elle est dans BV et pas dans $W^{1,1}$. D'où l'idée d'une généralisation de la théorie de Di Perna-Lions pour les fonctions BV.
- On considère la décomposition de Radon-Nykodim $Du = D^a u + D^s u$ où $D^a u \ll \lambda_d$ et $D^s u \perp \lambda_d$, la décomposition polaire de $D^s u$, $D^s u = M(x)|D^s u|$, qui existe car comme $u \in BV$, $(D^s u)(\mathbb{R}^d) < \infty$ et ∇u la densité de D^u par rapport à λ_d ($D^a u = \nabla u \lambda_d$).
  Si $m = d$, la divergence au sens des distributions d'une fonction $u \in BV$ est donnée par
  $$D.u = \text{trace}(\nabla u)\lambda_d + (\text{trace}M)|D^s u|$$
  Notons que $D.u \ll \lambda_d \Longleftrightarrow \text{trace}M = 0 \ \ |D^s u| - p.p.$ dans $\mathbb{R}^d$.

- $((BV(\Omega))^m, \| \bullet \|_{BV})$ est un espace de Banach pour la norme $\|u\|_{BV} = \int_\Omega |u|dx + |Du|(\Omega)$. Voir [7], Ch.3.
- $C^1(\Omega)$ n'est pas dense dans $BV(\Omega)$.
  En effet si $u \in BV$, telle que $Du \neq 0$ et $Du \perp \lambda$, et si $v \in C^1 \cap BV$, $\|u - v\|_{BV} = |D(u-v)|(\Omega) = |Du|(\Omega) + |Dv|(\Omega) \geq |Du|(\Omega) > 0$ (en effet $\lambda \perp \mu \Rightarrow |\lambda - \mu| = |\lambda| + |\mu|$). En revanche on a le résultat suivant de densité.
- $\forall z \in \mathbb{R}^d, \forall K \subset \Omega, K$ compact, on a : $\int_K |u(x+z) - u(x)|dx \leq |\sum_{i=1}^d z_i D_i u|(K_{|z|})$ (où $|z| < d(K, \partial\Omega), K_{|z|} = \{x \in \Omega | d(x,K) < |z|\}$)

Démonstration. D'après la propriété précédente, on peut supposer $u \in C^1(\Omega)$ et on a $u(x+z) - u(x) = \int_0^1 < \nabla u(x+tz), z > dt \Rightarrow \int_K |u(x+z) - u(x)|dx \leq \int_K dx \int_0^1 < \nabla u(x+tz), z > dtdx \leq |\sum_{i=1}^d z_i D_i u|(K_{|z|})$ (par Fubini) □ □

1.3 Différentiabilité approchée

Définition 2. Points de Lebesgue
Soit $u \in (L^1(\mathbb{R}^d))^m$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On dit que x est un point de Lebesgue si

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|dy = 0$$

Théorème 1 (Théorème de Lebesgue de différentiabilité). *Si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue pour u.*

Démonstration. Voir [9], Thm. 7.7. □

Définition 3 (Limite approchée). .
Soit $u \in (L^1_{loc}(\Omega))^m$ et $x \in \Omega$. On dit que u a une limite approchée en x s'il existe $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} |u(y) - z|dy = 0.$$

z est la limite approchée de u en x, on la note $\tilde{u}(x)$.
On note Su l'ensemble des points où u n'a pas de limite approchée.

Définition 4. On dit que u est approximativement continue en x si $x \notin \Omega$ et si $u(x) = \tilde{u}(x)$, i.e. si x est un point de Lebesgue de u.

Définition 5 (Différentiabilité approchée). Soit $u \in (L^1_{loc}(\Omega))^m$ et $x \in \Omega \setminus Su$. On dit que u est approximativement différentiable en x si

$$\exists L \in \mathcal{M}_{m\times d}, \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^d} \int_{B(x,r)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - L(y-x)|}{r} dy = 0.$$

Dans ce cas L est unique, c'est la différentielle approchée de u en x, notée $\nabla u(x)$.

Théorème 2 (Théorème de Caldéron-Zygmund). *Toute fonction $u \in (BV(\Omega))^m$ est approximativement différentiable $\lambda_d - p.p.$ dans Ω. De plus, ∇u (définie presque partout) est la densité de $D^a(u)$, où est $D^a(u)$ est la partie absolument continue de Du par rapport à λ_d.*

Démonstration. Voir [7], Thm.3.82. □

- Restriction des fonctions BV à une dimension :
  Soit $u \in (BV_{loc}(\Omega))^m$. Pour $x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose $u_{x'}(x_d) = u(x)$. Alors $u_{x'} \in BV_{loc}(\Omega^{e_d})$ où $\Omega^{e_d} = \{t | (x', t) \in \Omega\}$

Proposition 1 (Propriétés de la différentielle d'une fonction BV). *Soit $u \in (BV_{loc}(\mathbb{R}^d))^m$, $z \in \mathbb{R}^d$ et $\delta > 0$. Alors il existe $u^1_\delta(x,z)$ et $u^2_\delta(x,z)$ telles que :*

$$\frac{u(x+\delta z) - u(x)}{\delta} = u^1_\delta(x,z) + u^2_\delta(x,z)$$

avec les propriétés suivantes, où K et K' sont deux compacts quelconques de $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ll} (i) & u^1_\delta(x,z) \longrightarrow_{\delta\to 0} < \nabla u(x), z > \ \text{dans } (L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))^m \\ (ii) & \limsup_{\delta\to 0} \int_K |u^2_\delta(x,z)| dx \le |z| \cdot |D^s u|(K) \\ (iii) & \forall \epsilon > 0, \sup_{z\in K'} \sup_{\delta\in(0,\epsilon)} \int_K \left(|u^1_\delta(x,z)| + |u^2_\delta(x,z)|\right) dx \le \sup_{z\in K'} |z| \cdot |Du|(K_\epsilon) \end{array}$$

Démonstration. En prenant $u^i_\delta(z) = u^i_{\delta|z|}(z/|z|)$, on se ramène au cas où $|z| = 1$, puis en faisant une rotation, au cas $z = e_d$. Dans la suite, on pose $u_{x'}(s) = u(x', s)$.

On prend $u^1_\delta(x', x_d) = \frac{1}{\delta}\int_{x_d}^{x_d+\delta} \frac{\partial u}{\partial x_d}(x', s) ds = \frac{1}{\delta}\int_{x_d}^{x_d+\delta} \frac{\partial u_{x'}}{\partial x_d}(s) ds$ (où $\frac{\partial u}{\partial x_d} =< \nabla u(x), e_d >$) (car $D^a u_{x'}(\cdot) = \frac{\partial u}{\partial x_d}(x', \cdot)\lambda$-p.p. $t \in \Omega^{e_d}_x$).

Soit $K \subset \mathbb{R}$, K compact, $x \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\delta > 0$. On a alors :

$$\int_K |u^1_\delta(x', x_d)| dx_d = \int_K |\frac{1}{\delta} \int_{x_d}^{x_d+\delta} \frac{\partial u_{x'}}{\partial x_d}(s) ds| dx_d = \int_K |\mu * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta}|(x_d) dx_d,$$

où $\mu = \dfrac{\partial u_{x'}}{\partial x_d} \cdot \lambda$ est une mesure finie sur K, car $u \in BV_{loc}$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_K |\mu * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta}|(x_d) dx_d &\le \int_K \int \frac{\chi_{[0,\delta]}(x-y)}{\delta} d|\mu|(y) dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{K_\delta} \left(\int \chi_{[0,\delta]}(x-y) dx \right) d|\mu|(y) \end{aligned}$$

$\le |\mu|(K_\delta)$, alors $u^1_\delta \in L^1_{loc}$

De ceci découle immédiatement que u_δ^1 converge vers $\partial u/\partial x_d$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$.

On se sert ensuite des propriétés suivantes, voir [7], Théorème 3.107, 3.108.

$$\begin{array}{ll}
(a) & u_{x'} \in BV_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \\
(b) & u'_{x'}(s) = \dfrac{\partial u}{\partial x_d}(x', s) \text{ pour } \lambda\text{-p.p. } s >\in \mathbb{R} \\
(c) & \forall \delta > 0 \quad u_{x'}(s+\delta) - u_{x'}(s) = Du_{x'}([s, s+\delta]) \\
(d) & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |D^s u_{x'}| dx' \leq |D^s u|
\end{array}$$

Pour $\delta > 0$, on a pour $\lambda - p.p.\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$\begin{aligned}
\frac{u(x', x_d + \delta) - u(x', x_d)}{\delta} &= \frac{u_{x'}(x_d + \delta) - u_{x'}(x_d)}{\delta} \\
&= Du_{x'}([x_d, x_d + \delta]) \\
&= u'_{x'} * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta} + D^s u_{x'} * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta} \\
&= u_\delta^1(x', x_d) + D^s u_{x'} * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta}
\end{aligned}$$

Et donc finalement :

$$\begin{aligned}
\int_k |u_\delta^2| dx_d dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\{x_d : (x', x_d) \in K\}} |D^s u_{x'}| * \frac{\chi_{[0,\delta]}}{\delta}(x_d) dx_d dx' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |D^s u_{x'}|(\{x_d : (x', x_d) \in K\}) dx' \\
&\leq |D^s u|(K_\delta)
\end{aligned}$$

□

2 Théorème du commutateur

2.1 Dans le cas $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$

Soit ϕ noyau de convolution à support inclus dans la boule unité, ie

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \phi \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1, \text{supp } \phi \subset B(0,1).$$

Théorème 3 (Lemme du commutateur). *i) Soit $b \in (W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d))^d, w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On a alors*

$$(b \cdot \nabla w) * \phi_\delta - b.\nabla(w * \phi_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

ii) Soit $b \in L^1(0,T; (W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d))^d), w \in L^\infty(0,T; L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d))$. On a alors

$$(b \cdot \nabla w) * \phi_\delta - b \cdot \nabla(w * \phi_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \text{ dans } L^1(0,T; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$$

Démonstration. ii) est une conséquence directe de i), par le théorème de convergence dominée. Prouvons donc i).

Soit $\theta \in D(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$
\begin{aligned}
&< (b \cdot \nabla w) * \phi_\delta - b \cdot \nabla(w * \phi_\delta), \theta > \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} b(y) \cdot \nabla w(y) \phi_\delta(x-y) \theta(x) dy dx - \int_{\mathbb{R}^d} b(x)\theta(x) \cdot (\int_{\mathbb{R}^d} w(y) \nabla \phi_\delta(x-y) dy) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) \left(\mathrm{div} b(y) w(y) \phi_\delta(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^d} w(y) b(y) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) dy \right) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^d} b(x)\theta(x) \cdot (\int_{\mathbb{R}^d} w(y) \nabla \phi_\delta(x-y) dy) dx \\
&= - < (w \mathrm{div} b) * \phi_\delta, \theta > + < \int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy, \theta >
\end{aligned}
$$

On obtient donc,

$$
(b \cdot \nabla w) * \phi_\delta - b \cdot \nabla(w * \phi_\delta) = \int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy - (w \mathrm{div} b) * \phi_\delta
$$

Or $w \mathrm{div} b$ est dans L^1_{loc} (car $w \in L^\infty_{loc}$ et $\mathrm{div} b \in L^1_{loc}$) et donc $(w \mathrm{div} b) * \phi_\delta$ converge vers $w \mathrm{div} b$ dans L^1_{loc}.

Maintenant, soit $R > 0$. On fait l'estimation suivante pour le premier terme :

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy \right\|_{L^1(B_R)} \\
&= \int_{B_R} | \int_{\mathbb{R}^d} w(y)(b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) dy | dx \\
&\leq \int_{B_R} \|w\|_{L^\infty(B_{R+1})} \int_{B_{R+1}} |(b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y)| dx dy \\
&\leq C \|w\|_{L^\infty(B_{R+1})} \int_{B_{R+1}} \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{|b(y) - b(x)|}{\delta} dx dy
\end{aligned}
$$

où on a posé $C = \sup_{B(0,1)}(|\nabla \phi(z)|)$, la dernière inégalité provenant du fait que $\nabla \phi_\delta(x-y) = \frac{1}{\delta} \nabla \phi(\frac{x-y}{\delta})$, et qu'on a supp $\phi_\delta \subset B(0, \delta)$. Continuons :

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{|b(y) - b(x)|}{\delta} dy \\
\leq \quad &\int_{B_{R+1}} dx \int_{|z| \leq 1} dz \int_0^1 |\nabla b(x + tz)| dt \\
\leq \quad &\|\mathrm{div}\ b\|_{L^1(B_{R+2})}
\end{aligned}
$$

car $b(x + \delta z) - b(x) = \epsilon \int_0^1 < \nabla b(x + t\epsilon z), z > dt$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy \right\|_{L^1(B_R)} \leq C \|w\|_{L^\infty(B_{R+1}} \|\mathrm{div}\ b\|_{L^1(B_{R+2})} \\
\Rightarrow \quad &\int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}
$$

Soit

$$
I_\delta(w, b) = \int_{\mathbb{R}^d} w(y) \left\{ (b(y) - b(x)) \cdot \nabla \phi_\delta(x-y) \right\} dy
$$

On veut montrer que

$$
I_\delta(w, b) \xrightarrow[\delta \to 0]{} w \mathrm{div} b \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)
$$

La densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ nous donne une suite b_δ dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tendant vers b dans $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Comme b_δ tend vers b a fortiori dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{array}{rl} & \|I_\delta(w,b) - I_\delta(w,b_\delta)\|_{L^1(B_R)} \\ \leq & C\|w\|_{L^\infty(B_{R+1})} \cdot \|\text{div } b - \text{div } b_\delta\|_{L^1(B_{R+2})} \\ \longrightarrow_{\delta\to 0} & 0 \end{array}$$

À présent, il suffit de montrer que la propriété $I_\delta(w,b) \to w \text{ div} b$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est vraie pour b lisses. Si b appartenait à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} w(y)(b(y)-b(x)) \cdot \nabla\phi_\delta(x-y)dy \\ = & \displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{1}{\delta} w(x-\delta z)(b(x-\delta z) - b(x)) \cdot \nabla\phi(z)dz \\ = & \displaystyle\int_{B(0,1)} \frac{1}{\delta} w(x-\delta z) \sum_{i=1}^d \left[(b^i(x-\delta z) - b^i(x)) \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_i} \right] dz \\ \longrightarrow_{\delta\to 0} & \displaystyle\int_{B(0,1)} -w(x) \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} z_j \frac{\partial\phi(z)}{\partial z_i} dz \\ = & \displaystyle -w(x) \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial b_i(x)}{\partial x_j} \cdot \int_{B(0,1)} z_j \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_i} dz \\ = & w \text{ div} b \end{array}$$

La convergence dans la quatrième ligne a lieu car $w \in L^\infty_{loc} \subset L^1_{loc}$ et que dans L^1_{loc} on a continuité forte des translations. Écrivons la dernière étape :

$$\begin{array}{rl} & \|I_\delta(w,b) - w \text{ div} b\|_{L^1(B_R)} \\ \leq & \|I_\delta(w,b) - I_\delta(w,b_\delta)\|_{L^1(B_R)} + \|I_\delta(w,b_\delta) - w \text{ div} b_\delta\|_{L^1(B_R)} + \|w\|_{L^\infty(B_{R+1})} \cdot \|\text{div} b_\delta - \text{div} b\|_{L^1(B_{R+2})} \\ \longrightarrow & 0 \text{ dans } L^1_{loc} \end{array}$$

(div $b_\delta \to$ div b à cause de la convergence dans $W^{1,1}$). □

Voir [4], LemmeII.1.

Remarque. Pour démontrer la propriété de renormalisation dans le cas $W^{1,1}$ voir [4], ThmII.3.

Remarque. On a utilisé la densité des fonctions C_c^∞ dans $W^{1,1}_{loc}$. Si $b \in BV_{loc}$ (et div $b \in L^1_{loc}$ pour que tous les termes aient un sens), div b sera remplacé par $D \cdot b$ et on n'a plus la convergence vers 0.

2.2 Dans le cas $BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$

Comme on ne peut plus rien dire sur la convergence vers 0 du commutateur (comme dans le cas $W^{1,1}$), on essaie de trouver de « bonnes »estimations de r_δ.
L'approche consiste à introduire une régularisation dont le noyau est une inconnue.

Soit $T \in (0,\infty)$, $b(\cdot,\cdot) : (0,T) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, vérifiant :

$(H1)$ $b_t(\cdot) = b(t,\cdot) \in (BV_{loc}(\mathbb{R}^d))^d$ pour $\lambda -$ p.p. $t \in (0,T)$

$(H2)$ $\forall R > 0, \forall \bar{I} \subset (0,T) \displaystyle\int_{I\times B_R} |b_t| dxdt + \int_I |Db_t|(B_R)dt < \infty$ (i.e. $b \in L^1_{loc}(0,T; BV_{loc}(\mathbb{R}^d))$)

$(H3)$ $\lambda -$ p.p. $t \in (0,T), D \cdot b_t \ll \lambda_d$, i.e. $D \cdot b_t$ est représentable par div $b_t \cdot \lambda_d$

Définition 6. On définit la distribution $b \cdot \nabla w$ dans $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ (où $w \in L^\infty_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d)$) par

$$\begin{aligned}
&\forall \phi \in C_c^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d)\\
&< b \cdot \nabla w, \phi >: \quad = \quad < D_x(bw), \phi > - < wD_x b, \phi >\\
&\qquad\qquad = \quad -\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} w\nabla\phi b dtdx - \int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} w\phi \mathrm{div} b_t dtdx
\end{aligned}$$

Notation. Pour $M \in \mathcal{M}_{d\times d}$, et ϕ noyau de convolution ($\phi \in C_c^\infty(B(0,1)), \phi \geq\ 0, \int \phi = 1$), on définit

$$\Lambda(M,\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} | < Mz, \nabla\phi(z) > |dz$$

$$I(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} |z||\nabla\phi(z)|dz.$$

Théorème 4 (Lemme du commutateur). *Soit* $w \in L^\infty_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d), \phi$ *noyau de convolution pair* ($\phi(x) = \phi(-x)$).
On définit $r_\delta = (b \cdot \nabla w) * \phi_\delta - b \cdot \nabla(w * \phi_\delta)$.

Soit $Q \subset A$ *ouvert*$A \subset\subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$, Q *compact, et* $L = \|w\|_{L^\infty(A)}$.
Alors, dans les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a

$$(i) \quad \limsup_{\delta\downarrow 0} \int_Q |r_\delta|dtdx \leq L\int_Q \Lambda(M_t,\phi)d|D^s b|(t,x) + L(d + I(\phi))|D^a b|(Q)$$

$$(ii) \qquad\qquad \limsup_{\delta\downarrow 0} \int_Q |r_\delta|dtdx \leq LI(\phi)|D^s b|(Q)$$

Démonstration. Soit $\tau = d(Q, \partial A), \delta < \tau, \theta \in C_c^\infty(A), d = (\text{supp } \theta, \partial A) \geq \delta$.

$$\begin{aligned}
< r_\delta, \theta > &= < (b \cdot \nabla w) * \phi_\delta, \theta > - < b \cdot \nabla(w * \phi_\delta), \theta >\\
&= < b \cdot \nabla w, \theta * \phi_\delta > - < b \cdot \nabla(w * \phi_\delta), \theta > \quad (\text{car } \breve{\phi_\delta} = \phi_\delta)\\
&= - < w(t,\cdot)b_t, \nabla(\theta * \phi_\delta) > - < w\mathrm{div}\ b_t, \phi_\delta * \theta > - < b \cdot \nabla(w * \phi_\delta, \theta >\\
&= \int (\int w(t,y)b_t(y) \cdot \nabla\phi_\delta(x-y)dy)\theta(t,x)dtdx -\\
&\quad \int b_t(x) \cdot (\int w(t,x)\nabla\phi_\delta(x-y)dy)\theta(t,x)dtdx - < (w(t,\cdot)\mathrm{div}\ b_t * \phi_\delta, \theta >\\
&\quad (\text{car } \phi \text{ est pair })\\
&= < \int w(t,y)(b_t(y) - b_t(x)) \cdot \nabla\phi_\delta(x-y)dy, \theta > -\\
&\quad < (w(t,\cdot)\mathrm{div}\ b_t) * \phi_\delta, \theta >
\end{aligned}$$

On a donc $r_\delta(t,x) = \int w(t,y)(b_t(y) - b_t(x)) \cdot \nabla\phi_\delta(x-y)dy \ - \ (w(t,\cdot)\mathrm{div}\ b_t) * \phi_\delta(t,x)$ dans $D'(A)$.

Prouvons (ii) :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0} \int_Q | \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x-\delta z)\frac{b_t(x-\delta z) - b_t(x)}{\delta}\nabla\phi(z)dz - (w(t,\cdot)\mathrm{div}\ b_t) * \phi_\delta(t,x)|dtdx\\
\leq\ &\lim_{\delta\downarrow 0} \int_Q | \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x-\delta z)b^1_{t\delta}(x)(-z)\nabla\phi(z)dz - (w(t,x-\delta z)\mathrm{div}\ b_t(x-\delta z))\phi(z)dz|dtdx \quad +\\
&\limsup_{\delta\downarrow 0} \|w\|_{L^\infty(A)} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi(x)| \int_Q |b^2_{t\delta}(x)(-z)|dtdxdz
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0} \int_Q | \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x-\delta z)b^1_{t\delta}(x)(-z)\nabla\phi(z)dz - (w(t,x-\delta z)\mathrm{div}\ b_t(x-\delta z))\phi(z)dz|dtdx\\
= \ &\int_Q |w(t,x)(\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial b^j_t}{\partial x_i}(x).z_i.\frac{\partial\phi}{\partial z_j}(z)dz + \mathrm{div}\ b_t(x))|dtdx = 0 \quad ,\text{car } \int z_i\frac{\partial\phi}{\partial z_j}dz = -\delta_{i,j}
\end{aligned}$$

La convergence précédente a lieu car $b^1_{t\delta}(x)(-z) \longrightarrow^{L^1_{loc}} < \nabla b_t(x), z >$, par la propriété du quotient différentiel (BV), et $w \in L^\infty_{loc} \subset L^1_{loc}$, où on a continuité forte des translations.

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi(x)| \int_Q |b^2_{t\delta}(x)(-z)| dtdxdz \leq I(\phi)|D^s b_t|(Q),$$

$$\text{car } \limsup_{\delta \downarrow 0} \int_Q |b^2_{t\delta}(x)(-z)| dtdx \leq |z||D^s b_t|(Q)$$

Prouvons (i) :

$$\int_Q |M_\delta| dtdx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|W\|_{L^\infty(A)} \int_Q |\frac{b_t(x-\delta z) - b_t(x)}{\delta} \nabla\phi(z)| dtdxdz + \|\text{div } b_t\|_{L^1(Q_F)}$$

Soit $v_{tz} = b_t \nabla\phi(z), z \in \mathbb{R}^d (\Longrightarrow v_{tz} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^d))$

$$\forall \theta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d) < D_i v_{tz}, \theta > = < D^a_i v_{tz}, \theta > + < D^s_i v_{tz}, \theta >$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \text{div } b_t(x)\theta(x)\nabla\phi(z)dx + < D^s b_t.\nabla\phi(z), \theta >$$

$$\Rightarrow D_i v_{tz} = \text{div } b_t.\nabla\phi(z) d\lambda_d + M_{ti}.\nabla\phi(z)|D^s b_t| = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial b^j_t}{\partial x_i}.\frac{\partial \phi}{\partial z_j}\lambda_d + M^j_{ti}.\frac{\partial \phi}{\partial z_j}.|D^s b_t|\right)$$

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \int_Q |\frac{b_t(x - \delta_x z) - b_t(x)}{\delta} \nabla\phi(z)| dtdx \leq \int_0^T |\sum_{i=1}^d z_i D_i v_{tz}(\{x|(t,x) \in Q\}) dt$$

$$\leq \int_Q |\nabla b_t||z||\nabla\phi(x)| dtdx + \int_Q | < M_t(x)(z), \nabla\phi(z) > |d|D^s b|(t,x)$$

$$\text{, car } \int_K |v_{t,z}(x - \delta z) - v_{t,z}(x)| dx \leq |\sum_{i=1}^d \delta z_i.D_i v_{t,z}|(K_{|z|})$$

$$\text{Alors : } \limsup_{\delta \downarrow 0} \int_Q |r_\delta| dtdx \leq \int_Q |\nabla b_t| \int_{\mathbb{R}^d} |z||\nabla\phi(z)| dzdtdx +$$

$$\int_Q \int_{\mathbb{R}^d} | < M_t(x)(z), \nabla\phi(z) > |dzd|D^s b|(t,x) + \|\text{div } b_t\|_{L^1(Q)}$$

$$\leq (I(\phi) + d)|D^a b|(Q) + \int_Q \Lambda(M_t(x), \phi) d|D^s b|(t,x) dtdx$$

□

Voir [1], Lemme 3.1.

Remarque. L'inégalité (i) est utile dans les régions où la partie $D^s b$ est dominante, (ii) là où la partie $D^a b$ domine.

Remarque. En regardant le premier terme de (i), on se pose le problème de minimiser la fonctionelle $\{\phi \to \Lambda(M, \phi)\ \}$ pour obtenir une norme assez petite du commutateur.

On note que si la matrice M est antisymétrique il est possible de prendre ϕ noyau de convolution dépendent seulement de $|z|^2$, de sorte que ${}^t z M z = 0$.

On se sert du lemme suivant :

Lemme 1 (Alberti). *Soit* $M \in \mathcal{M}_{d\times d}$ *et* $\Lambda(M) = \inf\{\Lambda(M,\phi); \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \phi \geq 0, \int \phi = 1\}$. *On a alors* $\Lambda(M) = |trace\ M|$.

Démonstration. Une inégalité est immédiate car on a

$$\Lambda(M,\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} |< Mz, \nabla\phi(z) > |dzx \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} < Mz, \nabla\phi(z) > dz \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j} m_{ij} z_j \frac{\partial \phi}{\partial z_i}(z) dz \right|$$

$$= |\sum_{i=1}^d m_{ii}| = |\text{trace } M|, \text{ car } \int_{\mathbb{R}^d} z_i \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(z) dz = -\delta_{ij}$$

Pour l'inégalité inverse, on a $< Mz, \nabla\phi(z) >= \text{div}(Mz \cdot \phi(z)) - \text{div}(Mz) \cdot \phi(z) = \text{div}(Mz \cdot \phi(z)) - (trace\ M) \cdot \phi(z)$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} | < Mz, \nabla\phi(z) > |dz \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\text{div}(Mz \cdot \phi(z))|dz + |\text{trace } M| \int_{\mathbb{R}^d} \phi(z) dz$$

Il suffit alors de montrer que $\inf\{\int_{\mathbb{R}^d} |\text{div}(Mz \cdot \phi(z))|dz; \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \phi \geq 0, \int \phi = 1\} = 0$.

On va d'abord montrer que

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\text{div}(Mz \cdot \mu)|dz \;\middle|\; \mu - \text{mesure de probabilité sur } \mathbb{R}^d \right\} = 0.$$

Soit $\mu = \frac{\alpha}{|Mz|}\mathcal{H}^1 \llcorner \mathcal{N}$, où $\mathcal{N} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ vérifie

$\forall t \in [0,T], \;\; \mathcal{N}'(t) = M \cdot \mathcal{N}(t)$

et $\mathcal{N}$ n'a pas de points d'intersection sur $[0,T)$.

Soit une constante α telle que $\int d\mu = 1$. On a alors :

$$\alpha \int_{\mathcal{N}} \frac{1}{|Mz|} d\mathcal{H}^1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \int_0^T \frac{|\mathcal{N}'(t)|}{M\mathcal{N}(t)|} dt = 1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{T}$$

On a :

$$\begin{aligned} Mz \cdot \mu &= \frac{1}{T} \frac{Mz}{|Mz|} \mathcal{H}^1 \llcorner \mathcal{N} \\ &= \frac{1}{T} \nu_N \mathcal{H}^1 \llcorner \mathcal{N} \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{Mz}{|Mz|} = \frac{\mathcal{N}'}{|\mathcal{N}'|} = \nu_N \quad \text{où } \nu_N \text{ est la normale à } \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \forall \psi \in C_c^1(\mathcal{R}^d) \quad < \mathrm{div}(Mz\cdot\mu), \psi(z) > &= \frac{1}{T}\int_{\mathcal{N}} \frac{\partial}{\partial \nu_N}\psi(\mathcal{N}(t))\,|\mathcal{N}'(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{T}(\psi(\mathcal{N}(T)) - \psi(\mathcal{N}(0)))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\ (Mz\cdot\mu) = \frac{1}{T}(\delta_{\mathcal{H}(T)} - \delta_{\mathcal{N}(0)})$$

Alors

$$\int |\mathrm{div}(Mz\cdot\mu)| \qquad (= \text{la variation totale de } \mathrm{div}(Mz\cdot\mu))$$

$$= \quad \sup\left\{ \frac{1}{T}\left(\psi(\mathcal{N}(T)) - \psi(\mathcal{N}(0))\right) \middle| \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d); \|\psi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

$$= \quad \begin{cases} 0, & \text{si } \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(0) \\ \frac{2}{T}, & si \mathcal{N}(T) \neq \mathcal{N}(0), \quad \text{car } \|\psi\|_\infty \leq 1 \text{et on peut choisir } \psi \text{ t.q. } \psi(\mathcal{N}(T)) = -\psi(\mathcal{N}(0)) = 1 \end{cases}$$

On considère une courbe intégrale maximale $\mathcal{N}$ du champ Mz (i.e. $\mathcal{N}' = M\mathcal{N}$ sur $[0,\infty)$), $\mathcal{N}$ est injective et on peut considérer la restriction de $\mathcal{N}$ à $[0,T]$ pour T arbitrairement grand. Alors

$$\forall T \geq 0, \qquad \int |\mathrm{div}\ (Mz\cdot\mu)| \leq \frac{2}{T}$$

et on a fini.

Revenons à l'énoncé initial.
Soit $T > 0$ et

$$A = \left\{ z \in \mathbb{R}^d \middle| \exists \mathcal{N}_z \text{ injective sur } [0,T] \ \ t.q. \begin{cases} \mathcal{N}_z' = M\mathcal{N}_z \\ \mathcal{N}_z(0) = z \end{cases} \right\}$$

Alors A est ouvert (voir [Spivak, ch.5]).

Si $A \neq \emptyset$, soit $\phi \in C_c^\infty(A), \phi \geq 0, \int \phi = 1$.

Remarque. On peut réduire le problème aux fonctions ϕ dont le support est inclus dans D une boulle ouverte quelconque, car on a $\forall \mathcal{U}$-inversible, $\Lambda(M,\phi) = \Lambda(\mathcal{U}^{-1}M\mathcal{U})$ donc $\Lambda(M) = \Lambda(\mathcal{U}^{-1}M\mathcal{U})$.

Soit

$$\mu = \frac{1}{T|Mz|}\mathcal{H}^1 \llcorner \mathcal{N}_z \quad \text{et} \quad \mu = \int \mu_z \cdot \phi(z)dz$$

Alors

$$\int d\mu = \int\int d\mu_z \cdot \phi(z)dz = \int d\mu_z \cdot \int \phi(z)dz \ \ (\text{par Fubini}) = 1$$

$$\mathrm{supp}\ \mu \subseteq \mathrm{supp}\ \phi \ - \ \text{compact} \Rightarrow \mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

et

$$\mathrm{div}(My\cdot\mu) = \int \mathrm{div}(My\cdot\mu_z)\phi(z)dz$$

car

$$\begin{aligned}
\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d) < \operatorname{div}(My \cdot \mu), \psi > &= -\int < \int My\mu_z \cdot \phi(z)dz, \nabla\psi(y) > dy \\
&= -\int\int < My\mu_z, \nabla\psi(z) > \phi(z)dz \\
&= \int\int \operatorname{div}(My \cdot \mu_z)\psi(y)\phi(z)dzdy \\
&= < \int \operatorname{div}(My \cdot \mu_z) \cdot \phi(z)dz, \psi > \text{ (par Fubini)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\int |\operatorname{div}(My \cdot \mu)| \leq \int \operatorname{div}|My \cdot \mu_z| \cdot \int \phi(z)dz \leq \frac{2}{T} \cdot 1 = \frac{2}{T}$$

Si $A = \emptyset$, toutes les courbes intégrales se ferment en un temps inférieur à T et on est réduit au cas précédent.

On a donc obtenu $\Lambda(M) = |\mathrm{Tr}M|$. □

Remarque. Dans les hypothèses du théorème du commutateur on a supposé que $D.b_t \ll \lambda_d \quad \lambda - p.p.t \in (0,T)$, ce qui revient à dire que

$$\begin{aligned}
&\text{trace } M_t = 0 \quad |D^s b_t| - p.p., \lambda - p.p.t \in (0,T), \\
\text{car} \quad &D \cdot b_t = \operatorname{trace}(\nabla b_t))\lambda_d + (\text{trace } M_t)|D^s b_t|
\end{aligned}$$

3 Théorème de renormalisation

Définition 7 (Solution renormalisée). Supposons $D \cdot b_t \ll \lambda_d - p.p \quad t \in (0,T)$. et que $|b_t| + |\operatorname{div} b_t| \in L^1_{loc}((0,T), \mathbb{R}^d)$. Soit $w \in L^\infty_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ solution faible de l'équation

$$(*) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + b \cdot \nabla w = f\lambda^{d+1} \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T) \times \mathbb{R}^d)$$

pour un certain $f \in L^1_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$.

Sous ces hypothèses, w est une **solution renormalisée** si

$$\frac{\partial \beta(w)}{\partial t} + b \cdot \beta'(w) = f\beta'(w)\lambda_{d+1} \text{ dans } \mathcal{D}'((0,T) \times \mathbb{R}^d)$$

pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème 5 (Théorème de renormalisation). *Supposons (H1),(H2) et (H3). Toute solution $w \in L^\infty_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ de l'équation $(*)$ pour un certain $f \in L^1_{loc}((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ est une solution renormalisée.*

Démonstration. Puisque la propriété à démontrer est de nature locale, il suffit de la vérifier dans un ouvert $A \subset\subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$.
Soit $\delta_0 = \mathrm{dist}(A, \partial(0,T)\times\mathbb{R}^d)$, et L la norme L^∞ de w dans le voisinage $\delta_0/2$ de A.

1. : Montrons que $\partial\beta(w)/\partial t + b\cdot\beta'(w)$ est une mesure signée à variation totale finie dans A. Pour ce faire, soit ρ un noyau de convolution lisse et pair avec supp $\rho \subset B_1$ et soit r_δ donné par le théorème du commutateur. La fonction $r_\delta : A \to \mathbb{R}$ est bien définie, du moment que $\delta < \delta_0$.

Notons que $(w*\rho_\delta)(t,x)$ est C^∞ par rapport à x dans A pour $\delta < \delta_0$ (car $\rho_\delta \in C_c^\infty$ et $w \in L^\infty_{loc}$) et que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(w*\rho_\delta)}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}*\rho_\delta &= -(b\cdot\nabla w)*\rho_\delta + f*\rho_\delta\lambda^{d+1}\\ &= -r_\delta\lambda^{d+1} - b\cdot\nabla(w*\rho_\delta) + f*\rho_\delta\lambda^{d+1} \ll \lambda^{d+1} \text{ dans } \mathcal{D}'(A)\end{aligned}$$

conséquemment $w*\rho_\delta \in W^{1,1}(A,\mathbb{R})$ et la règle de dérivation d'un produit de composition dans $W^{1,1}$ peut être appliquée.
On a alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\beta(w*\rho_\delta)}{\partial t} + b\cdot\beta'(w*\rho_\delta)\\ =\ &\beta'(w*\rho_\delta)\left[\frac{\partial(w*\rho_\delta)}{\partial t} + b\cdot\nabla(w*\rho_\delta)\right]\\ =\ &\beta'(w*\rho_\delta)\left[\frac{\partial w}{\partial t}*\rho_\delta + (b\cdot\nabla w)*\rho_\delta - r_\delta\lambda^{d+1}\right]\\ =\ &\beta'(w*\rho_\delta)\left[f*\rho_\delta\lambda^{d+1} - r_\delta\lambda^{d+1}\right].\end{aligned}$$

Puisque $\beta'(w*\rho_\delta)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(A)$ (en effet $\beta\in C^1$ et que $\|w*\rho_\delta\|_{L^\infty(A)} \leq \|w\|_{L^\infty(A)}$), et que $|r_\delta|$ l'est dans $L^1(A)$ quand $\delta\downarrow 0$ (grâce à l'une ou l'autre des inégalités du théorème du commutateur), en faisant tendre δ vers 0, on obtient que $\partial\beta(w)/\partial t + b\cdot\beta'(w)$ est une mesure signée dans A, qui est de plus à variation totale finie car $b\in BV$.

2. Montrons que

$$\sigma = \frac{\partial\beta(w)}{\partial t} + b\cdot\beta'(w) - f\beta'(w)\lambda^{d+1}$$

qui par 1. et l'hypothèse $f\in L^1(A)$ est une mesure signée à variation totale finie, est singulière dans A par rapport à λ^{d+1}. Notons tout d'abord que les fonctions $\beta'(w*\rho_\delta)(f*\rho_\delta)$ convergent vers $\partial\beta/\partial y_i(w)f$ dans $L^1(A)$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned}\|\beta'(w*\rho_\delta)(f*\rho_\delta) - \beta'(w)f\|_{L^1(A)} &\leq \|\beta'(w*\rho_\delta)(f*\rho_\delta - f)\|_{L^1(A)} + \|\beta'(w*\rho_\delta)-\beta'(w))f\|_{L^1(A)}\\ &\leq \|\beta'(w*\rho_\delta)\|_{L^\infty(A)}\|f*\rho_\delta - f\|_{L^1(A)} +\\ &\quad\ \|\beta'(w*\rho_\delta)-\beta'(w)\|_{L^\infty(A)}\|f\|_{L^1(A)}.\end{aligned}$$

Le premier membre tend vers 0 car $\beta'(w*\rho_\delta)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(A)$, et le second aussi car $w*\rho_\delta \to w$ dans $L^1(A)$.

Par conséquent, si $A'\subset A$ est ouvert et que $\phi\in C_c^\infty(A')$ avec $|\phi|\leq 1$, en appliquant la deuxième partie du théorème du commutateur pour $Q = \mathrm{supp}\phi$, on obtient

$$\begin{aligned}
| < \sigma, \phi > | &= \lim_{\delta \downarrow 0} < \frac{\partial \beta(w * \rho_\delta)}{\partial t} + b \cdot \beta'(w * \rho_\delta) - \beta'(w * \rho_\delta)(f * \rho_\delta)\lambda^{d+1}, \phi > \\
&\leq \sup_{B_L} |\beta'| \limsup_{\delta \downarrow 0} \int_Q |r_\delta| dt dx \\
&\leq \sup_{B_L} |\beta'| I(\rho) |D^s b|(A')
\end{aligned}$$

Comme ϕ est arbitraire, on a donc que $|\sigma|(A') \leq L \sup_{B_L} |\beta'| I(\rho) |D^s b|(A')$ pour tout ouvert $A' \subset A$, et donc que $|\sigma| \leq L \sup_{B_L} |\beta'| I(\rho) |D^s b|$ dans A, ce qui montre que σ est singulière par rapport à λ^{d+1}.

3. Montrons que σ est nulle dans A.
Pour cela, soit encore un ouvert $A' \subset A$ et $\phi \in C_c^\infty(A')$ avec $|\phi| \leq 1$, et appliquons maintenant la première partie du théorème du commutateur, avec Q =supp ϕ, pour obtenir, par le même raisonnement que dans 2. :

$$| < \sigma, \phi > | \leq L \sup_{B_L} |\beta'| \int_A \Lambda(M_t, \rho) d|D^s b| + L \sup_{B_L} |\beta'| (d + I(\rho)) |D^a b|(A)$$

Comme ϕ est arbitraire, cela conduit à l'inégalité de mesure suivante :

$$|\sigma| \leq L \sup_{B_L} |\beta'| \Lambda(M_t, \rho) |D^s b| + L \sup_{B_L} |\beta'| (d + I(\rho)) |D^a b|$$

et comme on sait déjà que $\sigma \perp \lambda^{d+1}$ et que $|D^a b| \ll \lambda^{d+1}$, on en déduit que

$$|\sigma| \leq L' \Lambda(M_t, \rho) |D^s b| \quad \text{dans } \ A, \text{avec } \ L' = L \sup_{B_L} |\beta'|$$

Notons que σ ne dépend pas du noyau de convolution ρ, et on peut donc optimiser cette estimation de la façon suivante : soit g la dérivée de Radon-Nikodym de $|\sigma|$ par rapport à $|D^s b|$; l'inégalité précédente donne $g \leq L' \Lambda(M_t, \rho) \ \ |D^s b| p.p.$ pour tout noyau ρ à support compact. À présent, soit $D \subset C_c^\infty(B_1)$ un sous-ensemble dénombrable de

$$R = \left\{ \rho \in W^{1,1}(B_1) : \rho \geq 0, \int_{B_1} \rho = 1 \right\}$$

qui soit dense par rapport à la norme $W^{1,1}(B_1)$. D existe car $W^{1,1}$ est séparable et que C_c^∞ est dense dans $W^{1,1}$. Comme D est dénombrable, $g \leq L' \inf_{\rho \in D} \Lambda(M_t, \rho) |D^s b| p.p.$ et comme D est dense, on obtient que :

$$g(t,x) \leq L' \inf_{\rho \in R} \Lambda(M_t(x), \rho) \quad \text{pour } |D^s b| \ \ p.p.(t,x) \in A$$

On applique alors le lemme d'Alberti : on a $\Lambda(M_t(x)) = |\mathrm{Tr} M_t(x)| = 0 \ \ |D^s b| \ \ p.p.$. Donc $|\sigma| = 0$. $\square$

Voir [1], Thm.3.5.

4 Théorème d'unicité

Dans cette section on applique le théorème de renormalisation pour déduire l'unicité des solutions de l'équation de transport.

On suppose que $b(t,x) : (0,T)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait (H1),(H2) et (H3), et de plus que

$$\forall R>0 \quad \int_0^T \|\text{div} b_t\|_{L^\infty(B_R)}dt<\infty$$

Soit $w:(0,T)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ dans $L^\infty((0,T)\times B_R)$ pour tout $R>0$. On notera $w_t(x)=w(t,x)$. En prenant $f=w_tc_t$, l'équation aux dérivées partielles étudiée dans la précédente section devient :

$$\frac{\partial w_t}{\partial t}+b_t\cdot\nabla w_t=c_tw_t \qquad \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^d$$

Ceci est immédiatement équivalent à

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} w_t\phi dx=\int_{\mathbb{R}^d}(c_t+\text{div} b_t)w_t\phi dx+\int_{\mathbb{R}^d} w_tb_t\cdot\nabla\phi dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0,T))$$

quel que soit $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, si

$$\forall R>0 \quad \int_0^T (\|e_t+\text{div } b_t\|_{L^1(B_R)})\|w_t\|_{L^\infty(B_R)}dt<\infty$$

toutes les fonctions $t\to\int w_t\phi dx$ sont $W^{1,1}((0,T))$.

En modifiant éventuellement w_t sur un ensemble λ-négligeable de temps, on peut supposer que $t\to w_t$ est continue pour la topologie $w^*-L^\infty(B_R)$ pour tout $R>0$. De plus il existe des fonctions uniques $w_0,w_T\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^d} w_t\phi dx=\int_{\mathbb{R}^d} w_0\phi dx$$
$$\lim_{t\uparrow T}\int_{\mathbb{R}^d} w_t\phi dx=\int_{\mathbb{R}^d} w_T\phi dx$$

quel que soit $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Finalement, il sera utile d'étendre notre équation aux dérivées partielles pour des temps négatifs. Cela peut-être effectué en posant

$$\forall t<0 \quad b_t(x)=0, \quad c_t(x)=0, \quad w_t(x)=w_0(x)$$

de sorte qu'on a toujours $D\cdot b_t\ll\lambda_{d+1}$ pour $\lambda-p.p.t\in(-\infty,T)$ et

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} w_t\phi dx=\int_{\mathbb{R}^d}(c_t+\text{div} b_t)w_t\phi dx+\int_{\mathbb{R}^d} w_tb_t\cdot\nabla\phi dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'((0,T))$$

En d'autre termes, l'équation de transport

$$\frac{\partial w_t}{\partial t}+b_t\cdot\nabla w_t=c_tw_t \qquad \text{dans } (-\infty,T)\times\mathbb{R}^d$$

reste vérifiée.

Théorème 6 (Théorème d'unicité). *Soit w_t une solution de l'équation de transport dans $(0,T)\times\mathbb{R}^d$, avec*

$$\forall R>0 \quad \int_0^T \|c_t\|_{L^\infty(B_R)}dt<\infty$$

On suppose de plus qu'il existe des constantes $C\geq 0, R\geq 0$ telles que

$$\|w_t\|_\infty\leq C, w_t=0 \quad \lambda_d-p.p.dans\ \mathbb{R}^d\backslash B_R \qquad (5.1)$$

Alors $w_0\leq 0$ implique $w_t\leq 0$ quel que soit $t\in(0,T)$.

Démonstration. On étend b_t, e_t, w_t pour les temps négatifs, comme on l'a vu.

Soit maintenant $\beta(s) = \sqrt{1+(s^+)^2} - 1 \in C^1(\mathbb{R})$. Le théorème de renormalisation appliquée à w_t donne

$$\frac{\partial \beta(w_t)}{\partial t} + b_t \cdot \beta'(w_t) = e_t \beta'(w_t) w_t \lambda \quad \text{dans } (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$$

donc, en utilisant l'inégalité $0 \leq s\beta'(s) \leq 2\beta(s)$ et l'hypothèse $\|w_t\|_\infty \leq C$,
$w_t = 0 \;\; \lambda_d - p.p.$dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \beta(w_t) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} e_t \beta'(w_t) w_t dx + \int_{\mathbb{R}^d} \text{div } b_t \beta(w_t) dx \\ &\leq (2\|e_t\|_{L^\infty(B_R)} + \|\text{div } b_t\|_{L^\infty(B_R)}) \int_{\mathbb{R}^d} \beta(w_t) dx \quad \text{dans } \mathcal{D}'((-\infty, T)) \end{aligned}$$

Puisque $\beta(w_t) = 0$ pour $t < 0$, on déduit du lemme de Gronwall que $\forall t \in (-\infty, T) \quad \beta(w_t) \; = \; 0$

L'unicité en découle. □

Voir [1], Thm.4.1.

Références

[1] Luigi Ambrosio. *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields.* preprint, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2003.

[2] François Bouchut. Renormalised solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 157 :75–90, 2001.

[3] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson.

[4] P.L. Lions Di Perna. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. math.*, 98 :511–547, 1989.

[5] S. Mancini F. Bouchut, F. James. Uniqueness and weak stability for multi-dimensional tranport equations with one Lipschitz dimensions. 2004.

[6] N. Lerner. Équations de transport dont les vitesses sont partiellement bv. *preprint, Univ. Rennes 1*, 2004.

[7] D.Pallara Luigi Ambrosio, N.Fusco. *Functions of bounded variations and free discontinuity problems.* Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[8] N.Spivak. *Differential Geometry vol.1.* Berkeley, 1970.

[9] W.Rudin. *Real and complex analysis. Third Edition.* McGraw-Hill.