

Ergodicité du flot dans un billard polygonal

Olivier Jaulent

Octobre 2004

Pour représenter l'évolution d'un système physique, on considère généralement un espace, appelé espace des phases, dans lequel un point représente un état du système à un temps donné. L'évolution se traduit par un déplacement du point. Comme nous l'expliquerons dans la première partie qui motive l'étude qui suit, dans des cas relativement simples, on peut ramener l'évolution de certains systèmes à la loi de déplacement d'une boule dans un billard polygonal.

On s'intéresse ici à l'ergodicité du flot dans un billard de ce type. On présentera dans un premier temps le résultat d'ergodicité pour les billards à angles rationnels, c'est-à-dire pour lesquels les angles sont tous multiples rationnels de π . On donnera pour cela un aperçu des notions géométriques qui sont utiles pour cette démonstration. Enfin un schéma de la démonstration du cas général permettra de se faire une idée des méthodes d'approximation par densité, utilisées pour exploiter le premier résultat obtenu pour les seuls billards rationnels.

1 Exemple tiré de la physique

Déplacement de deux objets sur une barre. On considère deux objets de masse respective m_1 et m_2 se déplaçant le long d'une barre horizontale de longueur L limitée par deux arrêts en ses extrémités, sans frottements. Le comportement du système est décrit par les abscisses x_1 et x_2 des objets et leurs vitesses v_1 et v_2 . On peut donc représenter une trajectoire du système dans le triangle du plan \mathbb{R}^2 formé des points (x_1, x_2) vérifiant $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq L$. On suppose de plus que les collisions entre les deux objets ou entre un objet et un butoir de la barre sont élastiques. On en déduit la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement.

Mise en équation du problème. Lors d'un choc entre un objet et une extrémité, ceci entraîne immédiatement que la vitesse est changée en son opposée. En notant v_i la vitesse avant le choc et v'_i la vitesse après le choc, on obtient les équations suivantes pour le choc des deux objets :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

Afin d'obtenir dans l'espace \mathbb{R}^2 des positions des 2 objets une trajectoire à vitesse constante - que l'on pourra supposer égale à 1 - on effectue les changements de variable suivants : $y_1 = \sqrt{m_1}x_1, y_2 = \sqrt{m_2}x_2$ pour les positions ce qui donne $w_1 = \sqrt{m_1}v_1, w_2 = \sqrt{m_2}v_2$ pour

les vitesses. Les variables y_1 et y_2 évoluent dans le triangle T des points (y_1, y_2) tels que $0 \leq y_1 \leq \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} y_2 \leq \sqrt{m_1} L$. Lors d'un choc, notons avec un prime les variables correspondant aux valeurs après le choc. Les deux équations de conservation s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_1^2 + w_2^2 &= w_1'^2 + w_2'^2 \\ \sqrt{m_1} w_1 + \sqrt{m_2} w_2 &= \sqrt{m_1} w_1' + \sqrt{m_2} w_2'. \end{aligned}$$

Résolvons ce système ; en éliminant le cas $w_1' = w_1$ et $w_2' = w_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} w_1' &= 2 \frac{(m_1 - m_2) w_1 + 2 \sqrt{m_1 m_2} w_2}{m_1 + m_2} \\ w_2' &= 2 \frac{2 \sqrt{m_1 m_2} w_1 + (m_2 - m_1) w_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

On obtient alors que :

$$\begin{aligned} w_1' + w_1 &= \frac{4}{m_1 + m_2} (m_1 w_1 + \sqrt{m_1 m_2} w_2) \\ w_2' + w_2 &= \frac{4}{m_1 + m_2} (\sqrt{m_1 m_2} w_1 + m_2 w_2) = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} (w_1' + w_1). \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées du vecteur somme des vecteurs vitesse initiale et vitesse finale, vérifient l'équation du côté oblique du triangle. Comme ces vecteurs sont de même norme, d'après l'égalité $w_1^2 + w_2^2 = w_1'^2 + w_2'^2$, ceci n'est autre que la loi de réflexion d'une boule de billard le long du côté oblique du rectangle T .

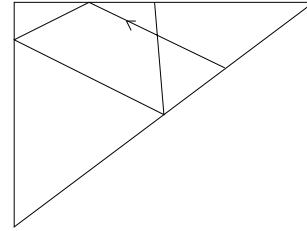


FIG. 1 – Triangle T et trajectoire

Conclusion. Le problème du déplacement de deux objets sans frottements avec chocs élastiques le long d'une barre horizontale est équivalent à l'étude d'un billard triangulaire.

2 Présentation des billards

2.1 Ensemble des billards, espace des phases

Représentation d'un billard. Soit un polygone de \mathbb{R}^2 à n sommets reliés dans un certain ordre et dont les arêtes constituent une ligne brisée fermée qui ne se recoupe pas. Un tel polygone peut être représenté par un élément de \mathbb{R}^{2n} constitué par ses sommets dans l'ordre. L'espace de ces polygones à n sommets décrits en tournant dans le sens trigonométrique forme un sous-ensemble connexe par arcs de \mathbb{R}^{2n} que l'on munit de la topologie de \mathbb{R}^{2n} et que l'on note \mathcal{P}_n .

Trajectoires dans un billard. Soit Q une région polygonale du plan, d'ensemble des sommets S . On considère les trajectoires dans cette région, se réfléchissant sur les côtés avec égalité des angles (loi de billard). Les sommets constituent donc des points singuliers que l'on exclut ; on note \tilde{Q} l'ensemble obtenu en retirant les sommets :

$$\tilde{Q} = \{q \in Q \mid q \notin S\}.$$

Définition 1 (Espace des phases d'un billard). Avec les notations ci-dessus, on appelle espace des phases du billard Q le quotient de $\tilde{Q} \times S^1$ par les relations correspondant aux rebonds sur les côtés. Autrement dit, pour tout x dans l'intérieur d'un côté C_i de réflexion associée de partie linéaire ρ_i , et tout $\theta \in S^1$, on identifie (x, θ) avec $(x, \rho_i(\theta))$.

Remarque. Le flot défini par une trajectoire de billard est alors continu sur l'espace des phases. Toutefois, il n'est pas défini lorsqu'il atteint un sommet.

2.2 Cas des billards à angles rationnels

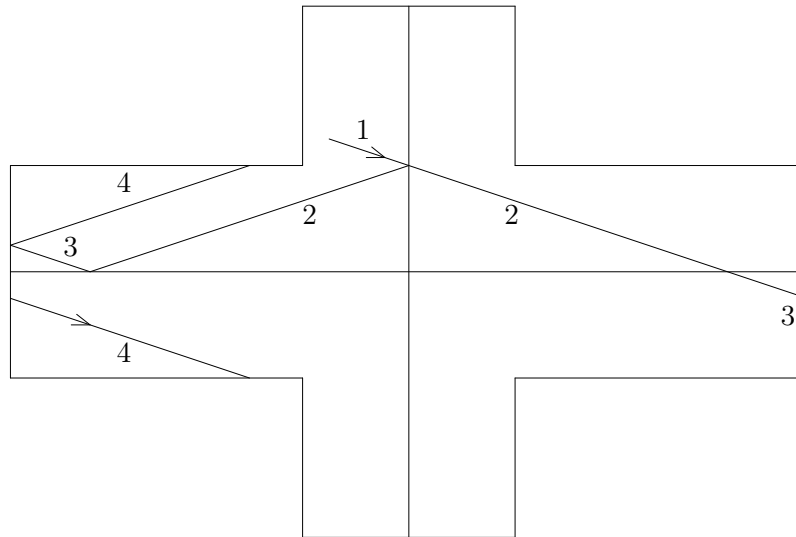
Définition 2 (Polygone à angles rationnels). Un polygone est dit à angles rationnels si tous ses angles sont des multiples rationnels de π .

Groupe des réflexions d'un billard. Soit Q un billard polygonal à angles rationnels. On note $\Gamma \subset \mathcal{O}(2)$ le groupe engendré par les parties linéaires des réflexions par rapport aux côtés. Le caractère rationnel des angles entraîne immédiatement le résultat suivant :

Lemme 1. Le groupe des réflexions Γ d'un billard à angles rationnels Q est un groupe fini.

Conséquence pour les angles d'une trajectoire. Compte tenu de la loi de réflexion, une trajectoire donnée ne correspond qu'à un nombre fini d'angles possibles. Pour rendre compte de ce fait, on va choisir un domaine fondamental J de S^1 sous l'action de Γ (on peut voir J comme S^1/Γ). On considère alors l'application de $\tilde{Q} \times S^1$ dans J définie comme la composée de la projection sur S^1 suivie par la projection canonique sur J . Cette application passe au quotient pour donner une application π de l'espace des phases P sur J .

Définition 3 (Sous-variété associée à un angle θ donné). Pour un angle donné $\theta \in J$, on définit une sous-variété associée par $\tilde{M}_\theta = \pi^{-1}(\theta)$. On définit alors $M_\theta = \tilde{M}_\theta \cup S$, S étant l'ensemble des sommets que l'on avait exclus dans \tilde{Q} . La variété M_θ obtenue est une surface ; les sommets y jouent un rôle particulier, on verra après avoir défini les différentielles quadratiques qu'ils constituent des singularités pour la structure induite par ces différentielles.



3 Ergodicité du flot dans un billard polygonal

3.1 Ergodicité

Définition 4 (Mesure invariante). Soient (X, μ) un espace de probabilités, et $f : X \rightarrow X$ une application mesurable. La mesure μ est dite f -invariante si pour tout ensemble $A \subset X$, on a $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, où $f^{-1}(A)$ désigne l'image réciproque de A par f .

Définition 5 (Ergodicité). Soient (X, μ) un espace de probabilités, et $f : X \rightarrow X$ une application mesurable telle que la mesure μ soit f -invariante. L'application f est dite ergodique relativement à la mesure μ si tout sous-ensemble mesurable de X invariant par f est de mesure 0 ou 1.

Définition 6 (Unique ergodicité). Soient X un espace mesurable et $f : X \rightarrow X$ une application mesurable. L'application f est dite *uniquement ergodique* s'il existe une unique mesure de probabilité sur X invariante par f .

Remarque.. Si $f : X \rightarrow X$ est *uniquement ergodique* d'une unique mesure de probabilité invariante μ , alors f est ergodique relativement à μ .

3.2 Différentielles quadratiques

Nous définissons une notion de différentielle quadratique holomorphe adaptée aux billards polygonaux, en suivant [KMS].

Définition 7 (Différentielle quadratique). Une différentielle quadratique holomorphe sur une surface est la donnée d'une variété différentielle M et d'un atlas maximal formé de cartes d'ouverts de M dans \mathbb{R}^2 ou dans un revêtement ramifié à n branches de $\mathbb{R}^2/(\pm 1)$ vérifiant les conditions suivantes :

- il existe un ensemble S au plus fini de points, appelés sommets, qui vérifient les conditions qui suivent ;
- les changements de coordonnées sur tout ouvert n'intersectant pas S sont des restrictions d'applications de la forme $v \mapsto v + c$ ou $v \mapsto -v + c$;
- les cartes définies sur un ouvert n'intersectant pas S sont à valeurs dans \mathbb{R}^2 ;
- au voisinage d'un point de S , il existe une carte qui constitue un revêtement ramifié à n branches de $\mathbb{R}^2/(\pm 1)$. Pour avoir unicité de S , on suppose $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$.

Classes d'isomorphisme des différentielles quadratiques. Considérons un point singulier et une carte associée à valeurs dans un revêtement ramifié à n branches de $\mathbb{R}^2/(\pm 1)$. Remarquons que dans le cas qui nous intéresse, nous ne considérerons que des variétés orientables et on aura toujours n pair. L'entier $\frac{n}{2}$ est appelé degré du point singulier.

Deux formes quadratiques sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme entre elles qui envoie un point singulier sur un point singulier de même degré et qui en tout autre point prend la même forme locale qu'un changement de coordonnées. On note $\mathcal{Q}(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des différentielles quadratiques.

Métrique plate. La donnée d'une différentielle quadratique sur une variété M induit une métrique sur M privé de S (que l'on notera désormais \widetilde{M}), appelée métrique plate sur M et obtenue en tirant en arrière la métrique naturelle de \mathbb{R}^2 . On vérifie que cette métrique est bien compatible avec les changements de carte.

3.3 Action de $PSL_2(\mathbb{R})$

Action du groupe $PSL_2(\mathbb{R})$. Étant donné un atlas $\{\psi_i\}_i$ et une application $a \in SL_2(\mathbb{R})$, on peut définir un nouvel atlas $\{a\psi_i\}_i$. On obtient ainsi une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{Q}(M)$.

Normalisation de l'aire. Le choix de métrique précédemment effectué induit naturellement une notion d'aire sur \widetilde{M} , obtenue en tirant en arrière la mesure sur \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{Q}_0(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de différentielles quadratiques d'aire 1, que l'on peut également voir comme le quotient de $\mathcal{Q}(M)$ sous l'action du sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ formé par les homothéties. On en déduit, compte tenu de la relation d'isomorphisme, une action du groupe $PSL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace $\mathcal{Q}_0(M)$.

Sous-groupes remarquables de $PSL_2(\mathbb{R})$. Trois sous-groupes à un paramètre de $PSL_2(\mathbb{R})$ vont jouer un rôle plus particulier :

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}, \quad r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Dans la suite, l'action de $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sera désignée comme le flot de Teichmüller.
2. On peut faire agir le cercle $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{Q}_0(M)$ en utilisant le sous-groupe $\{r_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$. Cette action conserve la métrique plate définie ci-dessus.
3. Le flot défini par h sera appelé le flot horocyclique.
4. Par simple calcul matriciel, on obtient les deux formules suivantes :

$$g_t h_{se^{-t}} g_{-t} = h_s, \tag{1}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_t r_{se^{-t}} g_{-t} = h_s. \tag{2}$$

3.4 Feuilletage de la variété

Feuilletages horizontal et vertical. Une différentielle quadratique définit deux feuilletages singuliers :

1. Un feuilletage horizontal est induit sur \widetilde{M} en tirant en arrière par les cartes locales le feuilletage de \mathbb{R}^2 par des lignes horizontales.
2. Un feuilletage vertical est de même induit sur \widetilde{M} en tirant en arrière le feuilletage de \mathbb{R}^2 par les droites verticales.

Définition 8 (Mesure transverse au feuilletage vertical). *On appelle mesure transverse au feuilletage vertical la donnée d'une mesure sur toute transversale au feuilletage telle que :*

1. *la mesure est définie sur toute transversale locale non singulière : étant donné un ouvert associé à une carte et ne contenant pas de singularités, la mesure est définie sur tout segment transversal inclus dans l'ouvert ;*

2. étant données deux transversales au feuilletage vertical dans un ouvert sans singularités associé à une carte, le feuilletage détermine un homéomorphisme entre des segments de ces transversales. Tout homéomorphisme de ce type doit envoyer la mesure transverse sur la première transversale sur la mesure transverse sur la deuxième. Cette condition est appelée invariance par holonomie.

Dans le cas particulier des différentielles quadratiques étudiées ici, on peut définir une mesure transverse par la donnée d'une mesure sur toutes les horizontales locales non singulières, vérifiant l'invariance par holonomie.

Définition 9 (Unique ergodicité d'un feuilletage mesuré). Une différentielle quadratique définit, localement et à orientation près, un flot horizontal de déplacement horizontal à vitesse constante.

Le feuilletage vertical est dit *uniquement ergodique* s'il existe, à constante multiplicative près, une unique mesure transverse au feuilletage vertical et invariante par tout flot horizontal local.

3.5 Application à l'ergodicité du flot

Admettons temporairement le théorème suivant :

Théorème 1 (Kerckhoff, Masur, Smillie ; [KMS]). Soit M une surface compacte et q une différentielle quadratique sur M . Alors, pour presque tout θ , le feuilletage vertical de $r_\theta(q)$ est *uniquement ergodique*.

Pour le démontrer, nous reprendrons la preuve donnée par Kerckhoff, Masur et Smillie dans [KMS] en faisant intervenir dans la section suivante un flot, dit flot de Teichmüller, sur l'ensemble des différentielles quadratiques. On déduit de ce théorème l'ergodicité du flot dans un billard polygonal :

Théorème 2 (Kerckhoff, Masur, Smillie ; [KMS]). Pour presque tout $\theta \in S^1$, le flot $f_t|_{M_\theta}$ est *uniquement ergodique*.

Démonstration. Montrons que les surfaces M_θ sont homéomorphes. Pour cela, fixons deux angles θ et λ dans l'intérieur de J (on rappelle que J est un domaine fondamental de S^1 sous l'action de Γ) et construisons un homéomorphisme de M_θ sur M_λ . À $(x, v) \in M_\theta$, on associe $(x, v') \in M_\lambda$ où v' est défini comme l'unique élément qui vérifie les deux assertions suivantes :

1. la donnée du domaine fondamental J et l'action de Γ définissent une partition de S^1 . On demande que v' soit dans le même ensemble que v de cette partition ;
2. on veut $\pi(x, v') = \lambda$.

On peut désormais identifier les différentes variétés M_θ avec M_0 en utilisant le procédé ci-dessus.

La variété M_0 est naturellement munie d'une différentielle quadratique q , induite par le plongement dans \mathbb{R}^2 du billard de départ. Le flot de billard sur M_0 est alors le flot associé au feuilletage vertical pour la forme quadratique q . On vérifie qu'avec les identifications ci-dessus, le flot de billard sur M_θ est le flot associé au feuilletage vertical pour la forme quadratique $r_\theta q$ sur M_0 . Or d'après le théorème 1, pour presque tout θ , ce feuilletage vertical est *uniquement ergodique* ce qui achève la démonstration. \square

4 Flot de Teichmüller

4.1 Mesure sur les différentielles quadratiques, divergence, récurrence

Dans la suite, nous aurons besoin d'une mesure sur $\mathcal{Q}_0(M)$. Nous ne détaillons pas ici la construction de cette mesure.

Définition 10. *Étant donnée une surface M de genre $g \geq 2$, on note $\text{Mod}(g)$ l'ensemble des classes d'équivalence de difféomorphismes de M conservant l'orientation, modulo les difféomorphismes homotopes à l'identité.*

Proposition 2. *Il existe une mesure μ_0 sur $\mathcal{Q}_0(M)$, invariante par $\text{Mod}(g)$ et par le flot de Teichmüller.*

Enfin, pour démontrer le théorème énoncé précédemment, nous serons amenés à distinguer deux cas suivant la nature divergente ou récurrente de la différentielle quadratique considéré. Nous définissons ces notions ci-dessous :

Définition 11 (Divergence et récurrence). *Une différentielle quadratique q est dite divergente si pour tout compact K , l'orbite $\{g_t(q) | t \in \mathbb{R}^+\}$ est contenue dans le complémentaire de K à partir d'un certain rang. Dans le cas contraire, q est dite récurrente.*

On définit l'ensemble ω -limite de q pour le flot de Teichmüller comme l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'orbite de q sous l'action de flot de Teichmüller. Une différentielle quadratique est alors divergente si et seulement si l'ensemble ω -limite de q pour le flot de Teichmüller est vide.

4.2 Cas des différentielles quadratiques divergentes

L'objet de cette section est de démontrer le théorème suivant, qui permet d'écartier le cas des différentielles quadratiques divergentes. On identifie ici S^1 avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 3 (Kerckhoff, Masur, Smillie ; [KMS]). *L'ensemble des angles θ tels que $r_\theta(q)$ soit divergente est de mesure nulle.*

Pour démontrer ce résultat, nous procéderons par l'absurde et supposerons donc l'existence d'un ensemble $S \subset S^1$ de mesure strictement positive, tel que si θ appartient à S , alors $r_\theta q$ est une différentielle quadratique divergente. Nous aurons besoin d'introduire quelques notions géométriques sur les différentielles quadratiques divergentes.

Définition 12 (Arcs connectants). *On appelle arc connectant toute courbe géodésique pour la métrique plate, d'extrémités deux singularités.*

Définition 13 (Arcs connectants isolés). *Étant donnés deux réels $\epsilon < C$, on dit qu'un arc connectant $[AB]$ est (ϵ, C) -isolé si sa longueur est inférieure à ϵ et si tout arc connectant qui intersecte $]AB[$ a une longueur strictement supérieure à C .*

On note $N(\epsilon, C)$ l'espace des différentielles quadratiques qui possèdent des arcs (ϵ, C) -isolés.

La proposition qui suit affirme que pour un ensemble d'angles non négligeable, on peut trouver dans l'orbite de Teichmüller des différentielles quadratiques admettant des arcs (ϵ, C) -isolés pour ϵ arbitrairement petit.

Proposition 3. *Soit S un ensemble de mesure strictement positive tel que pour tout $\theta \in S$, la différentielle quadratique $r_\theta(q)$ soit divergente. Alors il existe :*

1. une suite $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_i = \infty$,
2. un réel $\delta > 0$ et une suite de sous-ensemble $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de S qui vérifient $\forall i \in \mathbb{N}, \mu(S_i) \geq \delta > 0$,
3. une suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$,
4. un réel $C > 0$, tels que :

$$\forall \theta \in S_i, \quad g_{T_i} r_\theta(q) \in N(\epsilon_i, C).$$

La démonstration de cette proposition est relativement géométrique. Elle fait intervenir en effet la notion de complexe simplicial, c'est-à-dire de triangulation formée par des segments géodésiques et telle que l'intérieur de tout triangle ne contienne pas de point singulier. On peut alors montrer que le nombre de faces d'un complexe est majoré, mais que lorsqu'un complexe avec des côtés de petite longueur est intersecté par une petite géodésique, on peut agrandir le complexe.

Mais, par ailleurs, on peut démontrer que l'ensemble des différentielles quadratiques ayant des arcs (ϵ, C) -isolés est petit lorsque ϵ tend vers 0, ce qu'indique la proposition qui suit. C'est une conséquence du caractère fini de la mesure : elle tend vers 0 à l'infini.

Proposition 4. *Soit $C > 0$. Alors, il existe trois réels strictement positifs T, ϵ et K tels que l'on ait :*

$$\forall t > T \quad \forall \epsilon < \epsilon_1, \quad \mu \{ \theta \mid g_t r_\theta(q) \in N(\epsilon, C) \} \leq K\epsilon.$$

Le théorème 3 se déduit alors facilement de ces deux propositions :

Démonstration du théorème 3. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un ensemble de mesure non nulle formé d'angles θ tels que $r_\theta(q)$ soit divergente. La proposition 3 assure l'existence de deux constantes $C > 0$ et $\delta > 0$ et de trois suites $(T_i)_i, (S_i)_i$ et $(\epsilon_i)_i$ telles que $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \infty, \lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$ et pour tout entier i :

$$\forall \theta \in S_i, \quad g_{T_i} r_\theta(q) \in N(\epsilon_i, C) \quad \text{et} \quad \mu(S_i) \geq \delta > 0.$$

Utilisons alors la proposition 4 dans laquelle nous choisissons ϵ de sorte que $K\epsilon < \delta$. Prenons i suffisamment grand pour avoir $T_i \geq T$ et $\epsilon_i < \epsilon$ ce qui entraîne $N(\epsilon_i, C) \subset N(\epsilon, C)$ donc $\mu \{ \theta \mid g_{T_i} r_\theta(q) \in N(\epsilon, C) \} \geq \delta > K\epsilon$, ce qui contredit la proposition 4. \square

4.3 Cas des différentielles récurrentes

Maintenant que nous avons éliminé le cas des différentielles divergentes, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Théorème 4 (Kerckhoff, Masur, Smillie ; [KMS]). *L'ensemble des réels θ pour lesquels $r_\theta(q)$ est récurrent et non uniquement ergodique est de mesure nulle.*

Remarquons qu'à ce stade, la démonstration du théorème 1 est achevée. Pour obtenir le théorème 4, nous aurons besoin d'un résultat général sur les différentielles quadratiques :

Proposition 5 (Masur ; [Ma]). *Il existe un sous-espace fermé $B \subset Q_0$ tel que :*

1. *Si q n'est pas uniquement ergodique, alors tout point ω -limite de l'orbite de Teichmüller de q est contenue dans B ,*
2. *B est formé de différentielles quadratiques dont chacune contient une géodésique fermée verticale (pouvant contenir des singularités).*

La démonstration du théorème fait intervenir essentiellement des résultats de théorie de la mesure et de topologie. On considère également les orbites horocycliques et on montre que leur intersection avec B est toujours dénombrable.

5 Application : G_δ dense des billards ergodiques

Notations pour représenter les billards. Rappelons que \mathcal{P}_n désigne le sous-espace connexe par arcs de \mathbb{R}^{2n} représentant l'ensemble des polygones de bord simple à n sommets décrits par la succession de ces sommets parcourus dans le sens trigonométrique. Soit X un sous-espace compact de \mathcal{P}_n . À tout $x \in X$ est associé un domaine polygonal Q_x du plan. Notons P_x l'espace des phases du billard Q_x . On le munit d'une mesure μ_x , normalisation en mesure de probabilité de la mesure produit de la mesure naturelle de \mathbb{R}^2 sur Q_x et de la mesure de Lebesgue sur S^1 . Comme on suppose que les trajectoires évoluent à vitesse constante, P_x s'identifie avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2 \times S^1$. On note enfin TX le fibré tangent, sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}^2 \times S^1$.

Une des conséquences de l'ergodicité qui vient d'être démontrée est que :

Théorème 5 (Kerckhoff, Masur, Smillie ; [KMS]). *Le sous-ensemble des polygones pour lesquels le flot de billard est ergodique forme un G_δ dense dans l'espace des polygones.*

La démonstration de ce théorème fait intervenir des méthodes d'approximations plus analytiques par majoration d'intégrales.

Références

- [Ka] A. Katok, *Interval exchange transformations and some special flows are not mixing*, Israel Journal of Mathematics **35** (1980), n° 4, 301–310.
- [KMS] S. Kerckhoff, H. Masur et J. Smillie, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, Annals of Mathematics **124** (1986), 293–311.
- [Ma] H. Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Annals of Mathematics **115** (1982), 169–200.