Introduction à un domaine de recherche - Groupes de Kähler et fibrations des variétés kähleriennes sur les courbes complexes, encadré par Bruno Klingler

Jeremy Daniel

28 juin 2011

Table des matières

Introduction

Cette introduction au domaine de recherche concerne les groupes de Kähler et la géométrie des variétés kähleriennes compactes.

Les variétés kähleriennes compactes constituent une classe importante de variété complexes, plus générales que les variétés projectives. Elles sont régies par des propriétés de rigidité qui relient les invariants topologiques et les invariants holomorphes. Un groupe est dit *de Kähler* s'il est le groupe fondamental d'une variété kählerienne compacte. Bien que de nature topologique, nous verrons que ces groupes ont un bon contrôle sur la géométrie complexe de ces variétés.

La première section consiste en des préliminaires de topologie et de géométrie complexe. La deuxième est consacrée à l'introduction des variétés kähleriennes ; dans la troisième, nous donnons quelques résultats simples sur les groupes de Kähler. Enfin, dans la quatrième section, nous nous intéressons à l'interaction entre les groupes de Kähler et la géométrie des variétés kähleriennes.

Conventions et notations

Sauf mention explicite, nous adoptons les conventions suivantes :
- Les espaces topologiques sont connexes ; une application entre espaces topologiques est continue ; I désigne le segment $[0,1]$, S^n la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Les variétés différentables sont de classe $\mathcal{C}^\infty$; les variétés différentiables ou complexes sont dénombrables à l'infini.
- Une courbe complexe est une variété complexe compacte de dimension 1. Une courbe notée C_g est de genre g.
- Si E désigne un espace vectoriel réel ou un fibré réel sur une variété différentiable, $E_\mathbb{C}$ désigne son complexifié.

1 Un zeste de topologie, un soupçon de géométrie

Cette section donne des préliminaires, nécessaires à la bonne compréhension de l'exposé, en topologie et en géométrie complexe. En topologie, il est question de type d'homotopie, de groupes d'homotopie, d'espace classifiants de groupes et de cohomologie des espaces et des groupes. En géométrie complexe, on s'intéresse à la décomposition en types, au complexe de Dolbeault et on donne un aperçu rapide des courbes complexes.

On pourra consulter [BT82] ou [Hat01] pour la topologie et [Huy04] ou [Voi08] pour la géométrie complexe.

1.1 Homotopie

L'homotopie est une notion fondamentale en topologie, plus générale que celle d'homéomorphisme.

Définition 1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, f et g deux applications de X dans Y. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une application F de $X \times I$ dans Y telle que $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = g(x)$ pour tous x dans X. Si $*$ est un point privilégié de X, on dit que f et g sont *homotopes relativement à* $*$ s'il existe F vérifiant de plus $F(*,t) = f(*)$ pour tout t dans I (en particulier, $f(*) = g(*)$).

Deux espaces topologiques ont *même type d'homotopie* s'il existe deux applications f et g, respectivement de X dans Y et de Y dans X, telles que les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ soient respectivement homotopes à l'identité de Y et à l'identité de X. Un espace est *contractile* s'il a même type d'homotopie que l'espace topologique réduit à un point.

Les groupes d'homotopie figurent parmi les invariants topologiques les plus importants. Fixons pour la suite $*$ un point de S^n, $n \geq 1$. Comme ensemble, le *n-ième groupe fondamental* de X avec point-base x, noté $\pi_n(X,x)$, est l'ensemble des classes d'homotopie relativement à $*$ des applications de S^n dans X qui envoient $*$ sur x.

On peut en fait naturellement munir cet ensemble d'une structure de groupe. En effet, la sphère S^n est homéomorphe au quotient $I^n/_\sim$, où $\sim$ identifie les points du bord de I^n. En notant $*$ le point de S^n correspondant au bord de I^n dans ce quotient, la donnée d'une application de S^n dans X, envoyant $*$ sur x, est équivalente à la donnée d'une application de I^n dans X envoyant le bord de I^n sur x.

Considérons alors deux applications f et g de S^n dans X, envoyant $*$ sur x et notons $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les applications de I^n dans X correspondantes. On peut définir la *composée* de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ par

$$\tilde{h} = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{si } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \text{si } t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

L'application $\tilde{h}$ va de I^n dans X et envoie le bord de I^n sur le point x. On définit la composée de f et g comme l'application h de S^n dans X, correspondant à $\tilde{h}$.

On obtient ainsi une loi de composition interne sur l'ensemble des applications de S^n dans X envoyant $*$ sur x.

Proposition 1.2. *On rassemble ici les propriétés importantes des groupes d'homotopie :*

- *La loi de composition passe à $\pi_n(X,x)$ et le munit d'une structure de groupe. Pour $n \geq 2$, les groupes $\pi_n(X,x)$ sont abéliens. Si x et x' sont deux points de X, les groupes $\pi_n(X,x)$ et $\pi_n(X,x')$ sont isomorphes. De plus, les groupes $\pi_n(X,x)$ ne dépendent à isomorphisme près que du type d'homotopie de X.*
- *Si f est une application de X dans Y, elle induit un morphisme de groupes f_* de $\pi_n(X,x)$ dans $\pi_n(Y,f(x))$ pour tout n. Cette correspondance est, pour tout n, un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes (qu'on peut prendre abéliens pour $n \geq 2$). De plus, f_* ne dépend que de la classe d'homotopie de f.*

Remarque 1.3. Grâce au premier point, on peut omettre la spécification du point-base x en notant $\pi_n(X)$ au lieu de $\pi_n(X,x)$.

Définition 1.4. On appelle *groupe fondamental* de X le groupe $\pi_1(X,x)$, pour un certain x dans X.

Exemple 1.5.
- Le groupe fondamental de la sphère S^n est le groupe trivial pour $n \geq 2$ et $\mathbb{Z}$ pour $n = 1$.
- Le groupe fondamental de $\mathbb{R}^n$ ou, plus généralement, de tout espace contractile est trivial.
- Le groupe fondamental d'une courbe complexe C_g (cf. sous-section 1.5) est :

$$\pi_1(C_g) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] \rangle$$

1.2 Géométrie complexe, décomposition en types

Les variétés complexes se définissent essentiellement de la même façon que les variétés lisses (réelles).

Définition 1.6. Soit M un espace topologique (dénombrable à l'infini). Une *structure de variété complexe* de dimension n sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M et d'homéomorphismes $\phi_i \colon U_i \to V_i$, où V_i ouvert de $\mathbb{C}^n$, tels que les *changements de cartes* $\phi_i \circ \phi_j^{-1} \colon \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ sont biholomorphes. Une *application holomorphe* entre variétés complexes M et N est une application holomorphe quand elle est lue dans les cartes.

Remarque 1.7. Malgré la similarité des définitions, cette « complexification » change beaucoup de choses. Si l'on souhaite un analogue réel aux variétés complexes, il faut se pencher sur les variétés analytiques réelles et non sur les variétés différentiables.

Les constructions usuelles sur les variétés différentiables se transposent *mutatis mutandis* aux variétés complexes. On parle ainsi de fibré tangent holomorphe, de formes holomorphes, de sections holomorphes... Par exemple, une forme holomorphe de degré k s'écrit localement $\sum_{i_1<\cdots<i_n} \alpha_{i_1\ldots i_k} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}$, avec $(dz_1, \ldots, dz_n)$ une base locale du fibré cotangent de M.

Dans l'étude des variétés complexes, on n'étudie pas seulement des constructions holomorphes ; on s'intéresse également à la variété différentiable lisse sous-jacente à la variété complexe. Si X est une variété complexe de dimension n, la variété différentiable M sous-jacente est de dimension $2n$ et est automatiquement orientable. Considérons le complexifié du fibré tangent à M : c'est un fibré complexe de rang (complexe) $2n$. On peut vérifier que ce fibré se décompose en deux fibrés complexes : l'un isomorphe au fibré tangent holomorphe à X, noté $\mathcal{T}^{1,0}X$ et l'autre à un fibré conjugué au premier noté $\mathcal{T}^{0,1}X$ qu'on nomme le *fibré tangent antiholomorphe* :

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C}}M = \mathcal{T}^{1,0}X \oplus \mathcal{T}^{0,1}X.$$

Cette décomposition induit une décomposition sur le complexifié du fibré cotangent à M et plus généralement sur les complexifiés des fibrés des formes différentielles complexes de M :

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} X. \tag{1}$$

Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées locales et posons $x_j = \Re(z_j), y_j = \Im(z_j)$. Posons aussi $dz_j = dx_j + i dy_j$ et $d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$. Si $p + q = k$, une section de $\Lambda^{p,q}_{\mathbb{C}}$ est une k-forme différentielle complexe de M qui s'écrit localement

$$\sum_{|I|=p, |J|=q} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les $f_{I,J}$ sont des fonctions différentiables à valeurs complexes, I et J sont des sous-ensembles de $\{1,\dots,n\}$ et, si $I = \{i_1,\dots,i_p\}$ avec $i_1 < \dots < i_p$, alors $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ (même convention pour $d\bar{z}_J$).

Si α est une k-forme différentiable complexe, sa décomposition $\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha^{p,q}$ (où les $\alpha^{p,q}$ sont des sections de $\Lambda^{p,q}_{\mathbb{C}}M$) induite par (1) est la *décomposition en types* de α, le *type* de $\alpha^{p,q}$ étant le couple (p,q).

1.3 Complexe de de Rham, complexe de Dolbeault

Sur une variété différentiable M de dimension n, il existe un opérateur naturel d, envoyant les formes de degré k sur les formes de degré $k+1$. Cet opérateur vérifie de plus la *condition de bord* $d^2 = 0$. Une forme α est dite *fermée* si $d\alpha = 0$, *exacte* s'il existe β tel que $d\beta = \alpha$. Notant $\mathbb{A}^k_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble des k-formes complexes sur M, on a le *complexe de de Rham*

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{A}^0_{\mathbb{C}}(M) \xrightarrow{d} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}(M),$$

la première flèche désignant l'inclusion des fonctions constantes à valeurs complexes dans l'ensemble des fonctions (ou 0-formes) lisses à valeurs complexes sur M.

Ce complexe permet de définir les *groupes* (ici espaces vectoriels complexes) *de cohomologie de de Rham* :

$$H^k(M,\mathbb{C}) = \frac{\operatorname{Ker} d : \mathbb{A}^k_{\mathbb{C}}(M) \to \mathbb{A}^{k+1}_{\mathbb{C}}(M)}{\operatorname{Im} d : \mathbb{A}^{k-1}_{\mathbb{C}}(M) \to \mathbb{A}^k_{\mathbb{C}}(M)}.$$

Ces groupes ne dépendent en fait que du type d'homotopie de M, bien qu'ils soient calculés en utilisant la structure différentiable de M. Si M est compacte, ces espaces vectoriels sont de dimension finie. La dimension complexe de $H^k(M,\mathbb{C})$ est le *k-ième nombre de Betti de M*, noté $b_k(M)$.

On montre aussi que, pour une variété différentiable compacte orientable de dimension n, les groupes $H^p(M,\mathbb{C})$ et $H^{n-p}(M,\mathbb{C})$ sont isomorphes : c'est la dualité de Poincaré. En particulier, une telle variété de dimension n vérifie $\dim H^n(M,\mathbb{C}) = 1$ car la dimension de $H^0(M,\mathbb{C})$ est 1 pour une variété connexe.

Remarque 1.8. On peut faire la même construction avec les formes réelles, obtenant ainsi les groupes de cohomologie réelle $H^k(M,\mathbb{R})$. On vérifie sans peine que $H^k(M,\mathbb{C})$ est le complexifié de $H^k(M,\mathbb{R})$.

Considérons maintenant une variété complexe X de dimension n et notons M la variété différentiable de dimension $2n$ sous-jacente. Soit α une forme de type (p,q) sur X. L'écriture en coordonnées prouve que $d\alpha$ se décompose en une forme de type $(p+1,q)$ notée $\partial\alpha$ et une forme de type $(p,q+1)$ notée $\bar{\partial}\alpha$. En prolongeant par linéarité, ceci définit deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$, l'un augmentant le type de $(1,0)$, l'autre de $(0,1)$. L'égalité $d^2 = 0$ et la décomposition en types donne immédiatement $\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$, d'où la définition pour tout p du *complexe de Dolbeault*

$$\mathbb{A}^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathbb{A}^{p,1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathbb{A}^{p,n}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0,$$

où $\mathbb{A}^{p,q}(X)$ désigne les formes de type (p,q) sur X.

Comme précédemment, on définit les groupes de Dolbeault de ce complexe par

$$H^{p,q}(X) = \frac{\operatorname{Ker} \bar{\partial} : \mathbb{A}^{p,q}(X) \to \mathbb{A}^{p,q+1}(X)}{\operatorname{Im} \bar{\partial} : \mathbb{A}^{p,q-1}(X) \to \mathbb{A}^{p,q}(X)}.$$

Les groupes de Dolbeault concernent la structure holomorphe de la variété complexe X. Ils sont bien plus rigides que les groupes de de Rham : ce ne sont pas des invariants topologiques.

Remarque 1.9. On vérifie que le groupe $H^{p,0}(X)$ est égal pour tout p à l'espace des p-formes globales holomorphes sur X.

On peut se demander si la décomposition en types au niveau des formes « passe à la cohomologie » au sens où $H^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$. Cette égalité est fausse en général mais est vérifiée par les variétés kähleriennes (cf. section 2).

1.4 Espaces classifiants, cohomologie des espaces et des groupes

La notion d'espace classifiant d'un groupe G sera utile pour définir la cohomologie du groupe G.

Définition 1.10. Soit G un groupe, X un espace topologique. On dit que X est *asphérique* si ses groupes d'homotopie supérieure $\pi_n(X), n \geq 2$, sont triviaux. Un *espace classifiant* pour G, noté BG, est un espace asphérique de groupe fondamental G.

Exemples 1.11.
- Le cercle S^1 est un espace classifiant du groupe $\mathbb{Z}$.
- L'espace projectif réel infini $\mathbb{R}P^\infty$ obtenu comme limite croissante des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$ est un espace classifiant de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Les courbes complexes compactes de genre ≥ 1 sont asphériques et sont donc des espaces classifiants de leur groupe fondamental.

Théorème 1.12. *Soit G un groupe. Il existe un espace classifiant pour G et deux espaces classifiants ont même type d'homotopie.*

Si G est un groupe, on voudrait définir les groupes de cohomologie de G dans un anneau $\mathbb{A}$ (en pratique, $\mathbb{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $H^k(G, \mathbb{A}) = H^k(BG, \mathbb{A})$. Le problème vient de ce que l'espace BG n'admet pas en général de structure différentiable. Il faut donc étendre la cohomologie de de Rham à des espaces topologiques plus généraux. La *cohomologie singulière* permet d'obtenir les mêmes invariants mais elle se définit sur tout espace. On retiendra simplement que, pour tout anneau commutatif $\mathbb{A}$ et pour tout espace topologique X :
- pour tout k dans $\mathbb{N}$, on peut définir des groupes abéliens $H^k(X, \mathbb{A})$;
- il y a des morphismes naturels $H^k(X, \mathbb{Z}) \to H^k(X, \mathbb{R}) \to H^k(X, \mathbb{C})$;
- dans le cas d'une variété différentiable, les deux définitions de $H^k(X, \mathbb{C})$ (ou $H^k(X, \mathbb{R})$) coïncident ;
- pour tout k dans $\mathbb{N}$, la correspondance $X \mapsto H^k(X, \mathbb{A})$ définit un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des $\mathbb{A}$-modules (rappelons qu'un $\mathbb{Z}$-module est simplement un groupe abélien) ;
- les groupes $H^k(X, \mathbb{A})$ ne dépendent que du type d'homotopie de X.

Remarque 1.13. Le dernier point et le théorème 1.12 justifient la définition de $H^k(G, \mathbb{A})$ par $H^k(BG, \mathbb{A})$.

Le théorème suivant établit un lien entre la cohomologie d'un espace X et la cohomologie de son groupe fondamental G.

Théorème 1.14. *Soit X un espace topologique. Il existe une application c_X de X dans $B\pi_1(X)$ qui induit un isomorphisme au niveau du π_1 et du H^1 et un monomorphisme au niveau du H^2. Cette application est l'*application classifiante *de X. Elle est bien définie à homotopie près.*

De plus, si Y est un autre espace topologique et f une application de X dans Y, il existe une application $\tilde{f}$ de $B\pi_1(X)$ dans $B\pi_1(Y)$ telle que $\tilde{f} \circ c_X$ soit homotope à $c_Y \circ f$.

Ainsi, X et son groupe fondamental G partagent le même H^1 et $H^2(G)$ s'injecte dans $H^2(X)$. Ce résultat permet d'étudier certaines propriétés géométriques de X, uniquement à partir de la donnée de son groupe fondamental.

1.5 Courbes complexes

La variété différentiable sous-jacente à une courbe complexe est donc une surface réelle orientable. C'est pourquoi on appelle aussi ces courbes complexes *surfaces de Riemann* compactes. Topologiquement, une telle courbe est soit la sphère S^2, soit un tore (ou bouée à une place) soit une bouée à g places, pour $g \geq 2$.

Remarque 1.15. Attention cette classification est seulement topologique. Deux courbes complexes ayant le même genre ne sont pas biholomorphes en général.

On peut distinguer trois comportements des courbes complexes, classifiées par leur *genre* (égal au nombre de places dans la bouée) :
- Il n'existe à biholomorphisme près qu'une seule courbe complexe de genre 0 : c'est la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$, munie de la structure complexe définie à la sous-section 2.2, qu'on peut aussi voir comme la sphère S^2.

- Une courbe complexe de genre 1 (pointée) s'appelle une *courbe elliptique*. Toute courbe elliptique peut être obtenue comme le quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau (sous-groupe additif isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, le quotient étant muni de la seule structure complexe rendant la projection canonique holomorphe). Deux tels quotients sont biholomorphes si, et seulement si, leurs réseaux sont *similaires*, c'est-à-dire si l'un s'obtient par une homothétie de l'autre, le facteur d'homothétie étant un complexe non nul.
- Les courbes complexes de genre ≥ 2 s'obtiennent comme quotient du plan hyperbolique $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ par l'action d'un groupe Γ opérant librement, proprement discontinûment et par biholomorphismes sur $\mathcal{H}$. Notons que par la théorie des revêtements, Γ est le groupe fondamental du quotient obtenu.

Remarque 1.16. Le quotient d'un espace contractile par une action de groupe libre et proprement discontinue est asphérique. En particulier, hormis S^2, toutes les courbes complexes sont asphériques.

2 Variétés kähleriennes

Dans cette section, nous proposons un tour d'horizon des variétés complexes, discutant des variétés projectives pour finalement aboutir à la définition des variétés kähleriennes. Le résultat le plus important est l'équation (2) en fin de section, qui relie les invariants topologiques et holomorphes d'une variété kählerienne compacte. Les références pour cette section sont de nouveau [Huy04] ou [Voi08]

2.1 La rigidité du monde complexe

Les variétés complexes se distinguent des variétés différentiables du fait de leur plus grande rigidité. Déjà en dimension 1, le principe du maximum ou le caractère analytique des fonctions holomorphes montrent que le monde holomorphe est beaucoup plus contraint que le monde différentiable. Ces propriétés se généralisent aisément en dimension supérieure ; par exemple, on dispose du principe du maximum suivant.

Proposition 2.1 (Principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe d'une variété complexe M dans $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.*

Il s'ensuit que les seules fonctions holomorphes d'une variété complexe compacte M dans $\mathbb{C}$ sont les constantes. Considérons alors une sous-variété complexe compacte M dans $\mathbb{C}^n$ et notons ι l'inclusion $M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Chaque coordonnée de ι est une fonction holomorphe de M dans $\mathbb{C}$, dont le module admet un maximum par compacité. Par le principe du maximum, chaque coordonnée est constante. D'où

Corollaire 2.2. *Les seules sous-variétés complexes compactes de $\mathbb{C}^n$ sont les points.*

Dans le cas différentiable, le théorème de plongement de Whitney affirme au contraire que toute variété différentiable compacte de dimension n se plonge dans un espace $\mathbb{R}^N$, pour N assez grand. Une preuve standard de ce fait passe par l'utilisation de partitions de l'unité mais le principe du maximum (ou l'analyticité des fonctions holomorphes) interdit ce genre de constructions dans le cas complexe.

Exemple 2.3. Une courbe elliptique peut être vue comme une surface réelle ou comme une courbe complexe. Comme variété réelle, on peut la voir dans $\mathbb{R}^3$ (c'est un tore) mais il est impossible de la voir « holomorphiquement » dans $\mathbb{C}^N$, quel que soit l'entier N.

2.2 Espaces projectifs complexes

Parmi les premiers exemples de variétés complexes figurent les espaces projectifs complexes.

Définition 2.4. L'*espace projectif complexe* de dimension n, noté $\mathbb{C}P^n$, est l'ensemble des droites de $\mathbb{C}^{n+1}$, c'est-à-dire l'espace topologique quotient $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/_\sim$ où $x \sim y$ si et seulement si x et y sont liés linéairement. C'est un espace compact. La classe d'équivalence du point $x = (x_0, \ldots, x_n)$ est notée $[x_0 : \ldots : x_n]$.

Proposition 2.5. *Il existe une unique structure de variété complexe sur $\mathbb{C}P^n$ telle que la projection canonique $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$ soit holomorphe. Notons U_i, $i = 0, \ldots, n$, les ouverts de $\mathbb{C}P^n$ constitués des points dont la i-ème coordonnée est non-nulle. Alors, pour tout i, l'application $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i})$ est bien définie sur U_i et réalise un biholomorphisme de U_i sur $\mathbb{C}^n$.*

Exemple 2.6. La droite projective $\mathbb{C}P^1$ s'identifie (topologiquement et différentiablement) à la *sphère de Riemann* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. C'est aussi le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$, de sorte qu'on peut écrire $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Les espaces projectifs peuvent en un certain sens être vus comme des « modèles compacts » des espaces affines usuels. En particulier, il existe beaucoup de sous-variétés complexes fermées (donc compactes) dans $\mathbb{C}P^n$. De telles variétés sont appelées *variétés projectives (complexes)*. Pour en construire, considérons des polynômes $f_1, \ldots, f_t$ homogènes en les indéterminées $x_0, \ldots, x_n$. On dit que f_i *s'annule en* $y \in \mathbb{C}P^n$ si $f_i(y_0, \ldots, y_n) = 0$ où $y = [y_0, \ldots, y_n]$. Cette définition est indépendante des coordonnées prises pour y car les f_i sont homogènes. On peut alors définir une *variété algébrique* Z comme le lieu d'annulation de tous les f_i dans $\mathbb{C}P^n$. En général, cette variété algébrique n'est pas une variété complexe car elle possède des singularités. Mais si la variété est non-singulière (au sens de la géométrie algébrique), Z est une sous-variété complexe fermée dans $\mathbb{C}P^n$.

Un théorème de Chow affirme qu'il s'agit là de la seule façon de construire des variétés projectives. C'est une première occurence du principe GAGA (Géométrie algébrique et géométrie analytique) initié par Serre, qui met en parallèle les objets de la géométrie algébrique complexe avec ceux de la géométrie analytique complexe (à laquelle nous nous intéressons ici).

2.3 Variétés kähleriennes

Il est naturel de se demander si toute variété complexe compacte admet un plongement dans un espace projectif. Ceci est faux mais la situation est bien comprise. Pour l'expliquer, nous avons besoin de considérer une classe plus large de variétés : les variétés kähleriennes.

Soit X une variété complexe et ω une forme réelle de type $(1,1)$. Localement, ω s'écrit $\frac{i}{2}\sum_{j,k} h_{jk}\partial z_j \wedge \partial \bar{z_k}$, la matrice $(h_{jk})_{j,k}$ étant hermitienne. Cette matrice représente (dans la base des $\frac{\partial}{\partial z_j}$) une forme hermitienne sur $\mathcal{T}_z X$, pour tout z dans X. Ce champ de formes hermitiennes ne dépend pas des coordonnées locales choisies ; on l'appelle la *métrique semi-hermitienne* associée à ω.

On dit que ω est *positive* si la métrique semi-hermitienne associée est définie positive, i.e. s'il s'agit d'une « vraie » métrique hermitienne. C'est une *forme de Kähler* si elle est positive et fermée. Une variété complexe X est *kählerienne* si elle admet une forme de Kähler.

Remarque 2.7. La condition de fermeture de la forme positive ω est équivalente au fait que, dans une bonne carte, la métrique hermitienne sur X coïncide jusqu'à l'ordre 1 avec la métrique hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$. En ce sens, les variétés kähleriennes sont localement modelées sur l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$. C'est en partie pour cela qu'elles sont dignes d'intérêt.

Exemple 2.8.

Sur l'espace projectif $\mathbb{C}P^n$, on définit une forme ω de la façon suivante. Sur U_i, on a les coordonnées $y_j = \frac{z_{j-1}}{z_i}$ si $1 \leq j \leq i$ et $y_j = \frac{z_j}{z_i}$ si $i+1 \leq j \leq n$. La forme ω_i est alors définie sur U_i dans ces coordonnées par

$$\omega_i = \frac{1}{2i\pi}\partial\bar{\partial}\log\frac{1}{1+\sum_j |y_j|^2}.$$

Les formes $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}$ coïncident sur les intersections $U_{i_1} \cap U_{i_2}$ et se recollent donc en une forme ω. Il est clair que ω est une forme fermée de type $(1,1)$. Elle est réelle car $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. Enfin, on vérifie par un calcul que ω est positive. C'est la *forme de Fubini-Study* sur $\mathbb{C}P^n$.

Par restriction d'une forme de Kähler, toute sous-variété d'une variété kählerienne est kählerienne.

En particulier :

Proposition 2.9. *Les variétés projectives sont des variétés kähleriennes compactes.*

En se limitant au cas des variétés compactes, on a donc deux inclusions

$$\{\text{Variétés projectives}\} \subset \{\text{Variétés kähleriennes compactes}\} \subset \{\text{Variétés complexes compactes}\}.$$

Toutes deux sont strictes :

Considérons d'abord une *surface de Hopf*. C'est le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ définie par $n.(z_1, z_2) = (\lambda_1^n z_1, \lambda_2^n z_2)$, où λ_1, λ_2 sont deux complexes fixés de module différent de 0 et 1. C'est une variété complexe compacte difféomorphe à $S_1 \times S_3$. En particulier, son premier nombre de Betti est 1 ; ce n'est pas une variété kählerienne car nous verrons que les nombres de Betti impairs des variétés kähleriennes sont pairs (cf. corollaire (2.12)).

Pour montrer que la première inclusion est stricte, il faut être plus précis sur les propriétés de la forme de Fubini-Study ω. Comme ω est une forme réelle fermée de type $(1,1)$, elle définit une classe $[\omega]$ dans $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$ en cohomologie de de Rham. En fait, il s'agit d'une *classe entière*, c'est-à-dire qu'elle est dans l'image du morphisme canonique $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R})$; c'est la raison du facteur de normalisation $\frac{1}{2\pi}$ dans la définition de ω. Par restriction, les variétés projectives ont donc une forme de Kähler dont la classe de cohomologie de de Rham est entière.

C'est en fait une équivalence.

Théorème 2.10 (Critère de plongement de Kodaira)**.** *Une variété complexe compacte est isomorphe à une variété projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie de de Rham est entière.*

Pour comprendre ce théorème, identifions $H^2(M, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^m$, où $m = b_2(M)$.

D'une part, si ω et ω' sont deux formes de Kähler sur M, $\lambda.\omega + \mu.\omega'$ aussi pour n'importe quels réels strictement positifs λ et μ. L'ensemble des formes de Kähler $\mathcal{K}$ sur M est donc un cône convexe positif (sans 0) dans $\mathbb{R}^m$ (éventuellement vide).

D'autre part, l'image de $H^2(M, \mathbb{Z})$ dans $H^2(M, \mathbb{R})$ est un réseau Λ de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, une variété complexe compacte est projective si et seulement si $\mathcal{K}$ intersecte Λ. On peut voir cela comme un problème de commensurabilité et on montre ainsi que la plupart des tores complexes de dimension complexe au moins 2 ne sont pas projectifs.

Nous donnons une application simple du théorème.

Proposition 2.11. *Les courbes complexes sont des variétés projectives.*

Démonstration. On peut toujours définir une métrique hermitienne (définie positive) sur une variété complexe. La forme réelle ω de type $(1,1)$ associée à cette métrique est automatiquement fermée puisqu'il n'y a pas de formes en degré 3. Les courbes complexes sont donc kähleriennes. Comme $H^2(X, \mathbb{R})$ a dimension 1 par dualité de Poincaré, le cône de Kähler intersecte tout réseau de $H^2(X, \mathbb{R})$, ce qui conclut la preuve. □

Les variétés kähleriennes compactes disposent de propriétés de rigidité qui relient les invariants topologiques (classes de cohomologie de de Rham) et les invariants holomorphes (classes de cohomologie de Dolbeault). La plus importante de ces propriétés affirme que, pour une telle variété X et pour tout k dans $\mathbb{N}$, la décomposition en types passe à la cohomologie :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X). \tag{2}$$

De plus, dans ce cas, $H^{p,q}(X)$ s'identifie à $\overline{H^{q,p}(X)}$. En regroupant les groupes $H^{p,q}(X)$ deux par deux, on obtient ainsi :

Corollaire 2.12. *Les nombres de Betti $b_k(X)$, k impair, d'une variété kählerienne compacte X sont pairs.*

3 Groupes de Kähler

Pour étudier les propriétés d'un groupe, il peut être utile de le voir comme groupe fondamental d'un espace topologique simple. Un résultat dans ce sens est le théorème de Schreier que l'on peut obtenir par la théorie des revêtements (équivalente à celle des groupes fondamentaux) et qui affirme qu'un sous-groupe d'un groupe libre est lui-même libre. Il est alors naturel de se demander quels sont les groupes qui apparaissent comme groupes fondamentaux d'espaces topologiques « simples ». Le livre de référence est [ABC+96].

3.1 Groupes fondamentaux des variétés différentielles et complexes

Un résultat standard affirme que le groupe fondamental d'une variété différentiable compacte est de présentation finie. Par la suite, on s'intéressera uniquement à de tels groupes. Le problème est donc le suivant :

Problème 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces topologiques ; quels sont les groupes de présentation finie qui apparaissent comme groupes fondamentaux d'espaces dans $\mathcal{C}$?*

Exemples 3.2.
- Tout groupe est le groupe fondamental d'un CW-complexe de dimension au plus 2. Si le groupe est de présentation finie, on peut prendre le CW-complexe fini.
- En adaptant la preuve élémentaire du point précédent, par la méthode dite de *chirurgie* (cf. [Mil61]), on montre que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété différentiable de dimension au plus 4.
- Par des méthodes moins élémentaires, on montre que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété symplectique compacte de dimension au plus 4 (résultat de Gompf, cf. [Gom95]) ou d'une variété complexe compacte (qui peut aussi être prise symplectique) de dimension complexe au plus 3 (résultats de Taubes et Gompf, cf. [Tau92]).

Par définition, une variété kählerienne dispose de deux structures : c'est une variété complexe munie d'une forme symplectique. Mais les structures symplectique et complexe doivent être compatibles en un sens que la définition précise. En particulier, le troisième point *ne dit pas* que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété kählerienne de dimension complexe au plus 3.

Au vu de ces résultats, on peut légitimement se demander quels groupes apparaissent dans les dimensions limite, c'est-à-dire pour les variétés différentiables compactes (orientables pour simplifier) de dimension au plus 3 et pour les surfaces complexes. Une autre direction que nous emprunterons ensuite pose le vaste problème de la « classification » des groupes apparaissant comme groupes fondamentaux de variétés kähleriennes compactes (de tels groupes seront appelés *groupes de Kähler*) ou bien de variétés projectives.

Considérons d'abord le cas des variétés différentiables compactes orientables. En dimension 1, il n'y a que le cercle, de groupe fondamental $\mathbb{Z}$. En dimension 2, il y a seulement les courbes complexes C_g et on obtient donc une famille dénombrable de groupes. En dimension 3, la situation est bien plus complexe mais la conjecture de géométrisation de Thurston, prouvée en 2006 par Perelman permet néanmoins une bonne compréhension du sujet.

En dimension complexe 1, on récupère de nouveau seulement les groupes $\pi_1(C_g)$, où g est un entier naturel. En dimension complexe 2, on dispose d'une classification des surfaces complexes due à Kodaira qui montre notamment que toute surface kählerienne se « déforme » en une surface projective. Cette déformation préserve le type d'homotopie de la surface, en particulier son groupe fondamental. Ainsi, les groupes fondamentaux des surfaces complexes apparaissent tous comme groupes fondamentaux des surfaces projectives.

Dans l'espace projectif, on a le joli résultat de stabilité suivant :

Théorème 3.3 (Théorème de l'hyperplan de Lefschetz)**.** *Soit X une variété projective dans $\mathbb{C}P^n$ de dimension $m \geq 3$. Alors, pour un hyperplan générique H de $\mathbb{C}P^n$, $Y = X \cap H$ est une variété projective (lisse) de dimension $m-1$ et $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.*

En itérant ce résultat, on obtient ainsi que les groupes fondamentaux des variétés projectives sont déjà des groupes fondamentaux de surfaces projectives.

Pour conclure, intéressons-nous au cas des variétés kähleriennes. Bien sûr, les groupes fondamentaux des variétés projectives sont des groupes de Kähler. C'est un problème ouvert de savoir si cette inclusion est une égalité. Notons que dans ce cas, l'étude des groupes de Kähler pourrait se limiter aux groupes fondamentaux des surfaces projectives. Comme on ne dispose pas pour les variétés kähleriennes d'un analogue du théorème de l'hyperplan de Lefschetz, le problème semble bien plus ardu. Nous donnons dans la suite quelques résultats.

3.2 Résultats positifs et négatifs

En utilisant le théorème 1.14 et le corollaire 2.12, on obtient immédiatement la restriction suivante.

Proposition 3.4. *Le premier nombre de Betti d'un groupe de Kähler est pair.*

Exemple 3.5. L'espace classifiant de $\mathbb{Z}^n$ est le tore T^n, de premier nombre de Betti n. Il s'ensuit que $\mathbb{Z}^n$ n'est pas un groupe de Kähler pour n impair. Réciproquement $\mathbb{Z}^{2m}$ est le groupe fondamental du tore $T^{2m} = \mathbb{C}^m/\mathbb{Z}^{2m}$ qui est bien une variété kählerienne.

Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des groupes de Kähler. On a deux propriétés simples de stabilité pour $\mathcal{K}$:

- D'une part, $\mathcal{K}$ est stable par produit. En effet, le produit de deux variétés kähleriennes compactes est une variété kählerienne compacte, en prenant comme métrique sur le produit le produit des métriques. Comme le groupe fondamental d'un produit est égal au produit des groupes fondamentaux, on a le résultat.
- D'autre part, $\mathcal{K}$ est stable par passage à un sous-groupe d'indice fini. En effet, considérons X une variété kählerienne compacte, G son groupe fondamental et H un sous-groupe d'indice fini de G. Par la théorie des revêtements, il existe un revêtement Y de X, de groupe fondamental H, et le cardinal de chaque fibre du revêtement est l'indice de H dans G. Il n'est pas difficile de voir que les structures complexe et kählerienne de X remontent sur Y ; Y est donc une variété kählerienne et Y est compact car c'est un revêtement fini d'un espace compact. Donc H est aussi un groupe de Kähler.

Exemple 3.6. Considérons le produit libre $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; on peut le voir comme l'ensemble des mots sur un alphabet à deux lettres, ne prenant pas deux fois d'affilée la même lettre. L'ensemble des mots de longueur paire forme un sous-groupe d'indice 2 de G, isomorphe à $\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe de Kähler, G non plus.

Remarque 3.7. En fait, cet exemple se généralise : un groupe de Kähler ne s'écrit jamais comme un produit libre non trivial (cf. [ABC+96], p.47).

En utilisant le théorème de l'hyperplan de Lefschetz 3.3, on peut démontrer le résultat suivant dû à Serre :

Théorème 3.8 (Serre)**.** *Tout groupe fini G est un groupe de Kähler.*

L'idée est la suivante : tout groupe fini étant isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique, on peut supposer que $G = S_m$, pour un $m \geq 2$. On considère ensuite le produit $X = \mathbb{C}P^s \times \cdots \times \mathbb{C}P^s$, avec m facteurs. Le groupe G agit naturellement sur X par permutation des coordonnées. Si l'action était libre et proprement discontinue, le quotient Y/G serait une variété kählerienne compacte de groupe fondamental G. Le seul problème vient des points de X dont le stabilisateur sous l'action de G n'est pas trivial. En utilisant le théorème de Lefschetz, on arrive à se débarrasser de ces points gênants.

Par le théorème de structure des groupes abéliens finiment engendrés, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.9. *Un groupe abélien finiment engendré est un groupe de Kähler si, et seulement si, son rang est pair.*

D'autres résultats positifs et négatifs sont connus (cf. [ABC+96]) mais aucun résultat global, même conjectural, n'a été pour le moment dégagé.

4 Géométrie des variétés kähleriennes

En géométrie différentielle, on parle de *fibration* quand un espace se décompose localement comme un produit d'espaces. La structure de fibration permet souvent de ramener les informations connues sur les facteurs à des informations sur l'espace total, même quand le produit n'est que local. Dans cette section, nous nous intéressons à une notion un peu plus générale de fibration d'une variété kählerienne compacte sur une courbe complexe. Pour des preuves de ces résultats, nous référons à [Dan11].

4.1 La notion de fibration

Soit X une variété complexe compacte, C une courbe complexe, f une application holomorphe non constante (donc surjective) de X dans C. On montre que l'ensemble des valeurs critiques S de f est fini dans C ; ainsi la restriction de $f\colon X\setminus f^{-1}(S)\to C\setminus S$ est une submersion. Le théorème de fibration d'Ehresmann prouve alors notamment que toutes les fibres au-dessus des points de $C\setminus S$ sont difféomorphes. On dit que f est une *fibration* si ces fibres sont connexes (donc connexes par arcs, les fibres étant des sous-variétés de X).

Proposition 4.1. *Si f est une fibration de X dans C, elle induit une application surjective de $\pi_1(X)$ dans $\pi_1(C)$.*

Démonstration. Notons S les valeurs singulières de f. Soit γ un lacet dans C basé en x dans $C\setminus S$. En évitant les points de S, γ est homotope à un lacet dans $C\setminus S$, encore noté γ. Considérons y un point de la fibre au-dessus de x. Comme la restriction de $f : X\setminus f^{-1}(S)\to C\setminus S$ est une submersion, il existe t_1 et un chemin $c : [0,t_1]\to X$ tel que $f\circ c=\gamma$. En continuant ce relèvement, et par compacité de $[0,1]$, on étend c en un chemin de $[0,1]$ dans Y qui s'envoie sur γ par f. A priori, c n'est pas un lacet mais $c(1)$ est dans la même fibre que $y=c(0)$, la fibre étant connexe par arcs par hypothèse. Prenant un lacet c' de $c(1)$ vers y, le lacet $c\circ c'$ est envoyé par f sur un lacet homotope à γ. □

4.2 Le théorème de Siu-Beauville

Le théorème de Castelnuovo-de Franchis est le premier d'une série de théorèmes qui aboutit à montrer que le groupe fondamental d'une variété kählerienne X contrôle ce problème de fibration sur les courbes complexes. Nous donnons d'abord une définition et rappelons que l'espace $H^{1,0}(X)$ s'identifie aux 1-formes holomorphes sur X (cf. 1.9).

Définition 4.2. Soit X une variété kählerienne compacte. Un espace V dans $H^{1,0}(X)$ est *isotrope* si pour toutes 1-formes holomorphes α,β dans V, $\alpha\wedge\beta=0$ (cf. remarque 1.9).

Théorème 4.3 (Castelnuovo-de Franchis)**.** *Soit X une variété kählerienne compacte et V un sous-espace isotrope de $H^{1,0}(X)$, de dimension $g\geq 2$. Alors il existe une fibration f de X sur une courbe C de genre au moins g telle que $V\subset f^*(H^{1,0}(C))$. Réciproquement, si f admet une fibration au-dessus d'une courbe C_g avec $g\geq 2$, le sous-espace $f^*(H^{1,0}(C))$ de $H^{1,0}(X)$ est isotrope de dimension g.*

Le théorème donne ainsi un critère pour qu'une variété kählerienne compacte admette une fibration au-dessus d'une courbe complexe et ce critère porte sur les 1-formes holomorphes globales. Les deux théorèmes qui suivent donnent des critères similaires portant sur la cohomologie de la variété, puis seulement sur son groupe fondamental.

Définition 4.4. Soit X une variété kählerienne compacte. Un espace V dans $H^1(X,\mathbb{R})$ (resp. $H^1(X,\mathbb{C})$) est *isotrope* si, pour toutes formes α,β représentant des classes de V, la classe de $\alpha\wedge\beta$ est nulle dans $H^2(X,\mathbb{R})$ (resp. $H^2(X,\mathbb{C})$).

Théorème 4.5 (Catanese)**.** *Soit X une variété kählerienne compacte et V un sous-espace isotrope de $H^1(X,\mathbb{C})$ de dimension (complexe) $g\geq 2$. Alors il existe une fibration f de X sur une courbe de genre au moins g telle que $V\subset f^*(H^1(C,\mathbb{C}))$. Et réciproquement.*

Théorème 4.6 (Siu-Beauville)**.** *Soit X une variété kählerienne compacte et soit $g\geq 2$ fixé. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *$\pi_1(X)$ admet une surjection sur $\pi_1(C_g)$.*
- *$\pi_1(X)$ admet une surjection sur F_g, le groupe libre à g générateurs.*
- *X admet une fibration sur une courbe de genre au moins g.*

Définition 4.7. Soit X une variété complexe compacte. Le *genre réel* (resp. *complexe*, *holomorphe*) de X noté $g_{\mathbb{R}}(X)$ (resp. $g_{\mathbb{C}}(X)$, $g_h(X)$) est la dimension maximale d'un espace isotrope dans $H^{1,0}(X)$ (resp. $H^1(X,\mathbb{R})$, $H^1(X,\mathbb{C})$).

Les résultats précédents peuvent se résumer ainsi :

Théorème 4.8. *Pour une variété kählerienne compacte X, les trois genres $g_{\mathbb{R}}(X)$, $g_{\mathbb{C}}(X)$ et $g_h(X)$ sont égaux. On dénote par $g(X)$ cette quantité commune qu'on appelle le* genre *de X. Si $g(X) \geq 2$, le genre de X est aussi :*
- *Le plus grand g tel que $\pi_1(X)$ admette une surjection sur le groupe fondamental d'une courbe de genre g.*
- *Le plus grand g tel que X admet une fibration sur une courbe de genre g.*

Remarque 4.9. Les genres réel ou complexe peuvent déjà être définis au niveau du groupe fondamental. En particulier, on obtient que les genres réel et complexe d'un groupe de Kähler sont égaux. Ceci est faux pour un groupe quelconque.

4.3 Images d'Albanese de dimension 1

Sur toute variété kählerienne compacte X, on peut construire une application holomorphe f de X vers un tore complexe, minimale en un sens à préciser. Dans le cas où l'image de X par f est de dimension 1, f est en fait une fibration sur une courbe complexe compacte.

Proposition 4.10 (Existence du tore d'Albanese)**.** *Soit X une variété kählerienne compacte. Il existe un tore complexe* $\mathrm{Alb}(X)$ *et une application holomorphe* alb_X *de X vers* $\mathrm{Alb}(X)$*, satisfaisant la propriété universelle suivante : toute application holomorphe g de X vers un tore complexe T factorise à travers* $\mathrm{Alb}(X)$*, i.e. il existe une application holomorphe h de $Alb(X)$ vers T telle que $f = h \circ \mathrm{alb}_X$.*

Remarque 4.11. On appelle $\mathrm{Alb}(X)$ le *tore d'Albanese* de X et alb_X *l'application d'Albanese.* La construction explicite de $\mathrm{Alb}(X)$ est obtenue par des considérations sur la cohomologie de X.

Théorème 4.12 (Propriétés de l'application d'Albanese)**.**
- *L'application d'Albanese induit un isomorphisme $H^{1,0}(\mathrm{Alb}(X)) \cong H^{1,0}(X)$.*
- *En général, l'image de l'application d'Albanese n'est pas une sous-variété complexe de* $\mathrm{Alb}(X)$*. Néanmoins, c'est un* espace complexe *et la notion de* dimension de l'image *a un sens (cf. [GR84]). Si l'image est de dimension* 1*, l'image est en fait une courbe complexe (lisse) C et* alb_X *est une fibration sur C.*

Remarques 4.13.
- Une variété kählerienne compacte X peut admettre une fibration sur une courbe sans que son image par l'application d'Albanese soit de dimension 1. Par exemple, un produit $C_g \times X$ admet naturellement une fibration sur C_g (donnée par la première projection) mais la dimension de son image par $\mathrm{alb}_{C_g \times X}$ est au moins la dimension de l'image de X par alb_X.
- La dimension complexe $a(X)$ de l'image (singulière) de X par l'application d'Albanese est entièrement déterminée par la cohomologie de X. Plus précisément, on définit la *longueur du cup* de X en cohomologie réelle comme l'entier k minimal tel que tout produit de k formes de degré 1 réelles soit nul dans $H^k(X, \mathbb{R})$. On montre alors que la longueur du cup de X est égal à deux fois $a(X)$.

Nous donnons maintenant un critère pour que l'image de X par l'application d'Albanese soit de dimension 1. De nouveau, le groupe fondamental contrôle entièrement ce problème.

Théorème 4.14. *Soit X une variété kählerienne compacte et $g \geq 2$ fixé. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *L'image de X par* alb_X *est une courbe complexe de genre g ;*
- *X admet une fibration sur une courbe complexe induisant un isomorphisme sur H^1 ;*
- *Il existe une surjection $\phi : \pi_1(X) \to \pi_1(C_g)$ induisant un isomorphisme ϕ^* sur H^1 ;*
- *Chaque élément de $H^1(X, \mathbb{C})$ est inclus dans un espace isotrope de dimension* 2*.*

Remarque 4.15. Dans le troisième point, l'application ϕ^* en cohomologie des groupes est définie à partir des espaces classifiants $B\pi_1(C_g) = C_g$ et $B\pi_1(X)$.

4.4 Une application

Nous montrons finalement comment ce genre de techniques peut être utilisée pour prouver le résultat suivant :

Théorème 4.16. *Soit Γ un groupe, à la fois groupe de Kähler et groupe fondamental d'une variété différentiable compacte de dimension 3. Alors Γ est fini.*

Remarque 4.17. Ce théorème a d'abord été montré dans [DS09] avec d'importantes considérations algébriques. Une autre preuve a été donnée dans [Kot11], utilisant davantage certains résultats sur les variétés différentiables compactes de dimension 3. Pour obtenir le résultat dans toute sa généralité, il est nécessaire d'utiliser la conjecture de géométrisation de Thurston, prouvée par les travaux de Perelman.

La preuve nécessite plusieurs résultats profonds sur les variétés de dimension 3 ; nous nous contenterons de prouver le lemme technique suivant qui utilise uniquement les outils que nous avons développés.

Proposition 4.18. *Soit G un groupe dont le premier nombre de Betti est non nul et dont l'algèbre de cohomologie réelle satisfait la dualité de Poincaré orientée de dimension 3, alors G n'est pas un groupe de Kähler.*

Dire que G satisfait la dualité de Poincaré orientée de dimension 3 signifie que, pour tout p dans $\mathbb{N}$, le cup-produit entre $H^p(G,\mathbb{R})$ et $H^{3-p}(G,\mathbb{R})$ est une forme bilinéaire non dégénérée, induisant donc un isomorphisme $H^p(G,\mathbb{R}) \cong H^{3-p}(G,\mathbb{R})^*$. En particulier, $H^i(G,\mathbb{R}) = 0$ si $i \geq 4$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'une variété kählerienne compacte X avec groupe fondamental G. L'application d'Albanese $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ factorise à travers BG (à homotopie près) d'après le théorème 1.14

$$X \overset{c_X}{\to} BG \overset{a}{\to} \mathrm{Alb}(X) \tag{3}$$

car le tore $\mathrm{Alb}(X)$ est asphérique.

Ainsi $\mathrm{alb}_X^* = c_X^* \circ a^*$. Comme $H^i(BG,\mathbb{R}) = 0$ pour $i > 3$, alb_X^* est nulle en degrés > 3. Si la dimension de l'image $\mathrm{alb}_X(X)$ était ≥ 2, alors la longueur du cup de X (cf. remarque 4.13) en cohomologie réelle serait au moins 4. Mais comme alb_X^* et un isomorphisme sur H^1, une classe non nulle dans $H^4(X;\mathbb{R})$ s'écrivant comme produit de 4 classes de $H^1(X,\mathbb{R})$ proviendrait de $H^4(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{R})$ par alb_X^*, ce qui est une contradiction. Ainsi, l'image $\mathrm{alb}_X(X)$ est une courbe C et on peut corestreindre les applications a et alb à leur image C.

On peut montrer que alb_X^* est toujours injective en cohomologie [1], en particulier alb_X^* n'est pas nulle en degré 2. Donc $a^* : H^2(C,\mathbb{R}) \to H^2(BG,\mathbb{R})$ n'est pas non plus nulle. Mais alb_X et c_X induisent des isomorphismes sur les H^1, donc a aussi. Si α est une classe non nulle dans $a^*(H^2(C,\mathbb{R})) \subset H^2(BG,\mathbb{R})$, la dualité de Poincaré orientée de dimension 3 implique l'existence de β dans $H^1(BG,\mathbb{R})$ tel que $\alpha \wedge \beta$ n'est pas nul. C'est impossible car β proviendrait aussi de la cohomologie de C et car $H^3(C,\mathbb{R}) = 0$. □

Références

[ABC+96] J. Amoros, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo. *Fundamental Groups of Compact Kähler Manifolds.* American Mathematical Society, 1996.

[BT82] R. Bott and L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, 1982.

[Dan11] J. Daniel. Kähler groups and the geometry of Kähler manifolds - master's thesis, 2011.

[DS09] A. Dimca and A. Suciu. Which 3-manifold groups are Kähler groups ? *Journal of the European Mathematical Society*, 11(3) :521–528, 2009.

[Gom95] R. E. Gompf. A new construction of symplectic manifolds. *The Annals of Mathematics*, 142(3) :527–595, 1995.

[GR84] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent Analytic Sheaves.* Springer, 1984.

[Hat01] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[Huy04] D. Huybrechts. *Complex Geometry : An Introduction.* Springer, 2004.

[Kot11] D. Kotschick. Three-manifolds and Kähler groups. *preprint, arXiv :math 1011.4084*, 2011.

[Mil61] J. Milnor. A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 3 :39—55, 1961.

1. C'est vrai pour toute application holomorphe d'une variété kählerienne compacte vers une variété complexe.

[Tau92] C. H. Taubes. The existence of anti-self-dual conformal structures. *J. Differential Geometry*, 36(1) :163–253, 1992.

[Voi08] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* Cambridge University Press, 2008.