Introduction au thème de recherche : systèmes dynamiques en dimension infinie et équations d'évolution

Romain JOLY

14 octobre 2002

Une équation d'évolution, quand elle a des solutions locales, engendre un système dynamique local. A une donnée initiale u_0 et à un temps t, on peut associer la fonction $x \longmapsto u(x,t)$, où u est la solution de l'équation aux dérivées partielles vérifiant $u(x,t=0) = u_0(x)$. Il est naturel de s'intéresser à l'aspect qualitatif du problème d'évolution en étudiant ce système dynamique local. Si l'équation est dissipative, on peut, par exemple, chercher à savoir si le système possède un attracteur, quelle est son allure, ou bien s'intéresser aux problèmes de stabilité, locale ou globale. Cette approche, très récente, comme la recherche en dynamique, date des années 70.

1 Notions de base

Dans cette partie, nous ne pouvons évidemment pas donner toutes les définitions ou propriétés des objets utilisés. Nous ne définirons que les notions importantes dont la définition n'est pas intuitive et qui nous serviront par la suite.

Définition 1.0.1 *Si (X,d) est un espace métrique, on appelle système dynamique continu sur X une famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'applications de X dans X telle que :*
1) $S(0) = Id_X$
2) $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour t et s positifs
3) $\forall t \geq 0, S(t) \in \mathcal{C}^0(X,X)$
4) $\forall u \in X, t \longmapsto S(t)u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, X)$.

On dit que u est un point d'équilibre de $S(t)$ si $S(t)u = u$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.0.2 *Un système dynamique est dit de type gradient s'il admet une fonctionnelle de Lyapounov stricte Φ, c'est-à-dire une fonction de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ qui vérifie pour tout $t \geq 0$ et $u \in X$, $\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u)$, et s'il admet la propriété suivante : si pour tout $t \geq 0$, $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ alors u est un point d'équilibre.*

La fonctionnelle de Lyapounov est en quelque sorte une généralisation de l'énergie physique. On notera en particulier qu'un système gradient ne peut avoir d'orbite périodique, ni d'orbite homocline (qui part et arrive à un même point d'équilibre, par opposition à hétérocline).

La définition suivante généralise la notion de limite pour un système dynamique.

Définition 1.0.3 *Soient $S(t)$ un système dynamique continu sur X et u un point de X, on définit et note la trajectoire positive de u par $\gamma^+(u) = \{S(t)u / t \geq 0\}$. Si E est un sous-ensemble de X, l'ensemble $\omega-$limite de E est*

$$\omega(E) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma^+(S(t)E)}^X.$$

C'est aussi l'ensemble

$$\{v \in X / \text{ il existe des suites } t_n \geq 0 \text{ et } w_n \in E \text{ telles que } t_n \longrightarrow +\infty \text{ et } S(t_n)w_n \longrightarrow v\}.$$

On peut définir de même l'ensemble $\alpha-$limite pour $t \longrightarrow -\infty$, mais il faut faire attention au fait que l'on n'a pas forcément unicité ou existence d'une trajectoire négative.
Pour un système gradient, l'ensemble $\omega-$limite d'une trajectoire est inclus dans l'ensemble des points d'équilibre.
Dans la suite, X sera un espace de Hilbert. Nous allons voir des conditions sous lesquelles une équation d'évolution engendre un système dynamique.

Définition 1.0.4 *Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(X)$. On dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu (ou semi-groupe $\mathcal{C}^0$) si :*
1) $S(0) = Id_X$,
2) $S(t+s) = S(t)S(s)$, pour t et s positifs,
3) $\forall u \in X,\ t \longmapsto S(t)u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, X)$
On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe l'opérateur linéaire
$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ défini par :

$$D(A) = \{u \in X / \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)u - u) \text{ existe dans } X\}$$

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)u - u)$$

Le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est le système dynamique engendré par l'équation $\frac{du}{dt} = Au$. Le générateur infinitésimal est toujours un opérateur fermé.
Le théorème fondamental est celui de Hille-Yosida :

Théorème 1.0.1 *Si $A : D(A) \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire fermé, $D(A)$ dense dans X, alors A est générateur d'un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ si et seulement si l'ensemble résolvant $\rho(A)$ contient une demi-droite $]\omega, +\infty[$ ($\omega \in \mathbb{R}$) et il existe une constante positive M telle que*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},\ \lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Il existe un type de semi-groupe plus fort que les semi-groupes fortement continus. Il s'agit des semi-groupes analytiques $(S(z))$, définis sur un secteur $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} / |arg(z-a)| \leq \phi\}$ ($a \in \mathbb{R}$, $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$), et analytiques en z. Ils sont engendrés par les opposés des opérateurs sectoriels.

Définition 1.0.5 *Un opérateur linéaire $B : D(B) \longrightarrow X$ est dit sectoriel si :*
1) B est fermé et $D(B)$ est dense dans X
2) Il existe $a \in \mathbb{R}, M > 0$ et $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que le secteur
$\Delta_\phi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} / |arg(z-a)| > \phi\}$ est inclus dans l'ensemble résolvant $\rho(B)$ et

$$\forall \lambda \in \Delta_\phi, \|(\lambda - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

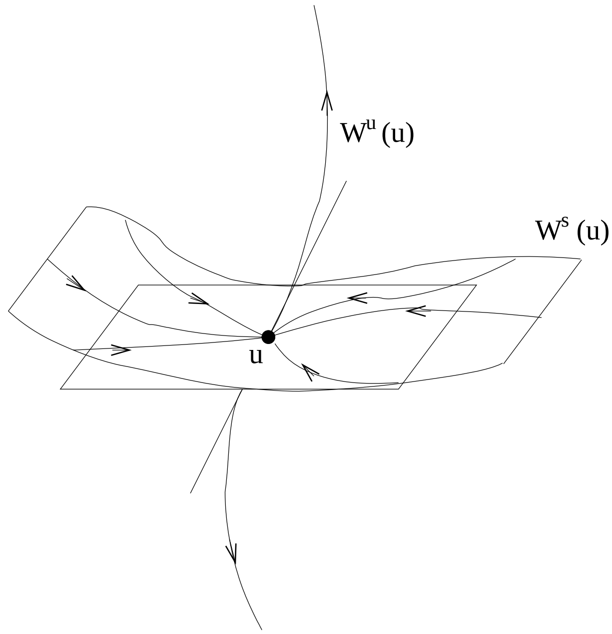
L'exemple typique d'opérateur sectoriel est $-\Delta_D$, où Δ_D est le laplacien, avec conditions homogènes de Dirichlet au bord, sur l'espace $X = \mathbb{L}^2(\Omega)$ (Ω borné et régulier). Pour un opérateur sectoriel B, on peut définir la puissance fractionnaire $(B + \lambda Id)^\alpha$ et l'espace $X^\alpha = D((B + \lambda Id)^\alpha)$, pour λ assez grand. Le principal intérêt des semi-groupes analytiques est leur effet régularisant : pour tout $t > 0$, $S(t)X$ est inclus dans X^α pour tout $\alpha \geq 0$. On retrouve cette régularisation des solutions dans le cas particulier connu de l'équation de la chaleur $u_t = \Delta u$.

On note $Y = X$ si l'opérateur A engendre un semi-groupe $\mathcal{C}^0$, et $Y = X^\alpha$ ($\alpha \in [0, 1[$) si A est un opérateur sectoriel. On considère, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au(t) + f(u(t)),\ u(0) = u_0 \in Y, \tag{1}$$

où f est de classe $\mathcal{C}^2(Y, X)$ pour simplifier, et A le générateur d'un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ (voire analytique). Cette équation possède une solution intégrale unique sur un intervalle de temps $[0, T(u_0)[$. Soit M une constante positive fixée. Si on restreint le flot de (1) à l'ensemble Z des trajectoires définies et bornées par M pour tout temps, alors on obtient un système dynamique dans $\overline{Z} \subset Y$.
Un point d'équilibre u de (1) est dit hyperbolique si l'opérateur linéarisé $Av + Df(u)v$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. On appelle ensemble stable (resp. instable) l'ensemble des points $v \in Y$ tels qu'il existe une trajectoire positive partant de v (resp. négative) qui tend vers u quand t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Si la non-linéarité f est de classe $\mathcal{C}^2(Y, X)$, ces ensembles sont localement, au voisinage du point d'équilibre u, des morceaux de variétés appelées variété stable locale et variété instable locale de u. La variété stable locale (resp. instable locale) est tangente en u à l'espace engendré par les fonctions propres correspondant aux valeurs propres de partie réelle négative (resp. positive) du système linéarisé. On note les variétés stable et instable locales de l'équilibre u respectivement $W^s_{loc}(u)$ et $W^u_{loc}(u)$. Sous des hypothèses d'unicité rétrograde pour (1), son équation adjointe ainsi que leur linéarisés, les ensembles stable et instable sont des variétés globales notées $W^s(u)$ et $W^u(u)$. Si le système est en outre de type gradient, les variétés stables et instables sont des sous-variétés de Y. Ces hypothèses sont en particulier

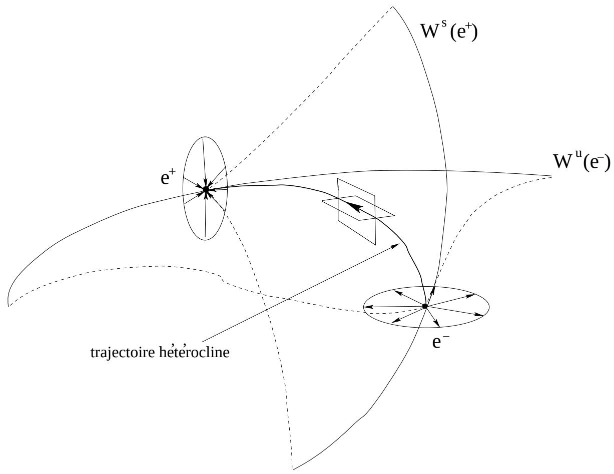
vérifiée pour (4) et (6).



Quand le point d'équilibre n'est pas hyperbolique, on peut parfois découper le spectre en trois parties : $\{\lambda | Re(\lambda) < \mu_1\}$, $\{\lambda | \mu_1 < Re(\lambda) < \mu_2\}$ et $\{\lambda | \mu_2 < Re(\lambda)\}$ avec $\mu_1 < 0 < \mu_2$. On peut alors définir outre des variétés fortement stable et fortement instable locales, une variété centrale locale (pas forcément unique) qui correspond au spectre de partie réelle proche de 0. Si cette variété est de dimension finie, l'étude locale du système se ramène à l'étude d'un système de dimension finie.

2 Stabilité et problèmes de transversalité

Un champ d'étude des systèmes dynamiques est l'étude de la stabilité. C'est-à-dire que l'on cherche à savoir si pour un système dynamique donné, il existe un voisinage tel que tout système dans ce voisinage lui est topologiquement équivalent (il existe un homéomorphisme qui envoie les trajectoires de l'un sur les trajectoires de l'autre en conservant le sens du temps). Dans le cas des systèmes de type gradient par exemple ce problème est lié à celui de la transversalité des variétés stables et instables. On dit que deux variétés sont transverses, si en tout point d'intersection, la somme des espaces tangents est égale à tout l'espace.



La stabilité joue un grand rôle dans l'étude des systèmes dynamiques depuis son origine (c'est-à-dire H. Poincaré). On lui trouve des applications récentes en analyse numérique : les trajectoires calculées sont des approximations des trajectoires réelles. Si le système est stable, une simulation assez proche reste alors qualitativement correcte.
Cette partie ne sera pas très détaillée, c'est en effet le sujet de mon stage de DEA auquel on pourra se reporter.

2.1 En dimension finie

On considère des champs de vecteurs sur des variétés compactes de dimension finie. Le système dynamique est alors le flot des courbes intégrales du champ.

Définition 2.1.1 *Un champ de vecteurs gradient sur une variété compacte de dimension finie est dit de Morse-Smale si :*
1) il n'a qu'un nombre fini de points d'équilibre qui sont tous hyperboliques.
2) les variétés stables et instables de deux points d'équilibre quelconques sont transverses.

Le théorème suivant de J.Palis et S.Smale relie la transversalité et la stabilité.

Théorème 2.1.1 *Si un champ de vecteurs gradient sur une variété compacte de dimension finie est de Morse-Smale, alors son flot est structurellement stable.*

Enfin, le théorème de Kupka-Smale montre la généricité de tels champs. On rappelle qu'un ensemble générique est un ensemble qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses, c'est ce qui correspond, pour les espaces complets, à la notion de "presque partout".

Théorème 2.1.2 *Soit M une variété compacte de dimension finie. L'ensemble des champs de vecteurs gradients de Morse-Smale de classe $\mathcal{C}^r(M)$ $(r \geq 1)$ est générique dans l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^r(M)$.*

2.2 En dimension infinie

Le problème va être de généraliser les résultats de la dimension finie à la dimension infinie où se situent les systèmes qui nous intéressent. Tout d'abord, la notion de stabilité doit être restreinte à l'ensemble des trajectoires bornées pour tout temps, c'est-à-dire à l'attracteur. Si $\mathcal{G}$ est une classe de systèmes dissipatifs de type gradient (et ayant les propriétés d'unicité rétrograde adéquates) pour laquelle l'attracteur global est semi-continu supérieurement en $S_g \in \mathcal{G}$. Un système dissipatif de type gradient de $\mathcal{G}$ qui a tous ses points d'équilibre hyperboliques et dont les variétés stables et instables s'intersectent transversalement, possède un attracteur $\mathcal{A}$ structurellement stable par rapport à des perturbations dans $\mathcal{G}$.
Pour la définition de l'attracteur global, on se reportera au paragraphe suivant.
Les théorèmes de Sturm sur l'équation parabolique en dimension 1 entrainent un théorème remarquable dû à D. Henry (voir aussi S.B. Angenent).

Théorème 2.2.1 *On se place sur l'espace $\mathbb{H}^r([0,1])$ avec $r \in]\frac{3}{2}, 2[$ et les bonnes conditions aux bords (voir ci-dessous). Soit l'équation*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x) & x \in]0,1[\\ u = 0 \ \textit{ou} \ u_x = g_0(u) & \textit{en } x = 0 \\ u = 0 \ \textit{ou} \ u_x = g_1(u) & \textit{en } x = 1 \end{cases} \tag{2}$$

On suppose les fonctions g_0 et g_1 de classe $\mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ et f de classe $\mathcal{C}^3([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Si e_+ et e_- sont deux équilibres hyperboliques de (2), alors les variétés stables et instables $W^s(e_+)$ et $W^u(e_-)$ s'intersectent transversalement.

Ce théorème généralise celui de Kupka-Smale pour l'équation de réaction-diffusion en dimension 1, en ce sens qu'il est facile de montrer que pour une fonction f ou des conditions au bord g_0 et g_1 génériques, tous les équilibres de (2) sont hyperboliques.
P. Poláčik a démontré que cette propriété n'était malheureusement plus vraie en dimension supérieure. P.Brunovský et P. Poláčik ont par contre montré le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier. Soit $\mathfrak{G}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ muni de la topologie de Whitney, engendrée par les ouverts de la forme*

$$\{g \in \mathfrak{G} / |D^i f(x,u) - D^i g(x,u)| < \delta(u),\ i = 0..k,\ x \in \overline{\Omega},\ u \in \mathbb{R}\}$$

avec δ une fonction continue strictement positive.
On considère dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p > N)$ l'équation

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

Il existe un ensemble générique $\mathfrak{G}^{MS}$ dans $\mathfrak{G}$ tel que pour toute fonction $f \in \mathfrak{G}^{MS}$, tous les équilibres de (3) sont hyperboliques et si e_+ et e_- sont deux tels équilibres alors les variétés stables et instables $W^s(e_+)$ et $W^u(e_-)$ s'intersectent transversalement.

P. Poláčik a montré que ce théorème n'est plus vrai si f ne dépend plus de x. P. Brunovský et G. Raugel ont démontré que pour l'équation des ondes avec dissipation faible

$u_{tt} + \gamma u_t = \Delta u + f(x,u)$, la transversalité est générique en le couple $(\gamma, f(x,u))$, avec $\gamma > \gamma_0$, la constante γ_0 étant fixée strictement positive. Enfin, J.C. Saut, R. Temam et D. Henry ont montré que pour un ensemble générique de domaines Ω, tous les points d'équilibre de l'équation (3) sont hyperboliques, sous l'hypothèse $f(x,0) = 0$.

3 Etude de l'attracteur global

L'attracteur global joue souvent un rôle important dans l'étude des systèmes dissipatifs de dimension infinie. En effet, il est composé des trajectoires définies et bornées pour tout temps, et est souvent compact. De part cela, le semi-flot restreint à l'attracteur est le système dynamique qui aura les propriétés les plus proches des systèmes de dimension finie. Il contient de plus les principales informations sur le semi-flot.

3.1 Existence d'un attracteur

Soit A et B deux sous-ensembles non vides de X. On définit la semi-distance $\delta_X(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b)$. On dit que A attire B si $\delta_X(S(t)B, A)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Définition 3.1.1 *Un sous-ensemble non vide $\mathcal{A}$ de X est appelé attracteur global du système $S(t)$ si*
1) $\mathcal{A}$ est un fermé borné de X
2) $\mathcal{A}$ est invariant ($S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t \geq 0$)
3) $\mathcal{A}$ est attractif ($\mathcal{A}$ attire tout borné de X).

On notera que, s'il existe, $\mathcal{A}$ est le plus petit ensemble fermé attractif et le plus grand ensemble borné invariant, et que $\mathcal{A}$ est unique.
Ce qui suit est un théorème fondamental dans l'étude des attracteurs des systèmes de type gradient.

Théorème 3.1.1 *Soit $S(t)$ un système gradient qui vérifie :*
1) l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'équilibre est borné,
2) $S(t)$ est finalement borné, c'est-à-dire que pour tout borné B, il existe un temps τ tel que la trajectoire $\gamma^+(S(\tau)B)$ est bornée dans X,
3) $S(t)$ est asymptotiquement compact, c'est-à-dire que si B est un borné tel que, pour un certain τ, $\gamma^+(S(\tau)B)$ est borné, alors tout ensemble
$\{S(t_n)z_n / z_n \in B, t_n \longrightarrow +\infty$ et $t_n \geq \tau\}$ est relativement compact.
Alors $S(t)$ admet un attracteur global compact connexe $\mathcal{A}$. De plus, si $\mathcal{E}$ est un ensemble discret, alors $\mathcal{E} = \{e_1, .., e_n\}$ est fini et

$$\mathcal{A} = \bigcup_{e_j \in \mathcal{E}} W^u(e_j).$$

Exemple de l'équation de la chaleur semi-linéaire
Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère

l'équation avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta_D u(x,t) + f(u(x,t)),\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \tag{4}$$

On suppose que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses suivantes. Il existe deux constantes positives C_0 et α avec $(n-2)\alpha \leq 2$ telles que

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ |f(y_1) - f(y_2)| \leq C_0(1 + |y_1|^\alpha + |y_2|^\alpha)|y_1 - y_2|.$$

De plus, si F est la primitive de f qui s'annule en 0, on suppose qu'il existe des constantes C_1 et μ telles que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$yf(y) \leq C_1 + \mu y^2 \text{ et } F(y) \leq C_1 + \frac{1}{2}\mu y^2$$

. On suppose enfin que $\mu < \lambda_1$ où λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta_D$. Nous appellerons de telles conditions, conditions de dissipation, on parlera alors de système dissipatif.
Sous ces hypothèses, l'équation (4) définit un système dynamique gradient $S(t)$ qui admet un attracteur global $\mathcal{A}$ compact et connexe.

Exemple de l'équation des ondes avec dissipation faible
Soient Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$, une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les même hypothèses que ci-dessus et γ une constante strictement positive. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) + \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta_D u(t) + f(u(t)),\ u(0) = u_0 \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{5}$$

On suppose que $n \leq 3$. L'équation (5) définit alors un système gradient fortement continu. Il admet un attracteur global $\mathcal{A}$ compact et connexe.

La différence entre les deux exemples est que l'un est un système régularisant (car Δ_D est générateur d'un semi-groupe analytique) alors que l'autre ne l'est pas (car l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta & -\gamma \end{pmatrix}$ est générateur d'un semi-groupe seulement $\mathcal{C}^0$). Cela implique que certaines propriétés des trajectoires de (4) ne sont vraies que de façon asymptotique pour celles de (5). Par exemple, les trajectoires de (4) sont relativement compactes, alors que celles de (5) ne sont qu'asymptotiquement compactes. De même, les trajectoires de (4) sont régulières, alors que pour (5), on ne peut avoir qu'une propriété de régularisation asymptotique, par exemple que l'attracteur global est borné dans $(\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1_0) \times \mathbb{H}^1_0$.
On a les même propriétés pour des conditions de Neumann.

3.2 Etude qualitative de l'attracteur de l'équation de réaction-diffusion

Tout ce qu'on sait pour le moment sur l'aspect qualitatif de l'attracteur, concerne les équations paraboliques et la dimension 1 où le nombre de zéros des équilibres joue un rôle prépondérant. La propriété souvent utilisée pour les théorèmes sur l'équation de réaction-diffusion en dimension 1, est une propriété de Sturm-Liouville du type :

Proposition 3.2.1 *Soit $b(x,t)$ et $c(x,t)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^0([0,1]\times\mathbb{R})$. Si $u(t,x)$ est solution de*

$$u_t = u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u,\ x\in]0,1[,\ t\in[t_0,t_1]$$

avec des conditions au bord de Neumann. Alors le nombre de changement de signes de $u(t,.)$ est une fonction décroissante du temps, et elle décroit strictement en t^* si $u(t^*,.)$ a un zéro multiple.

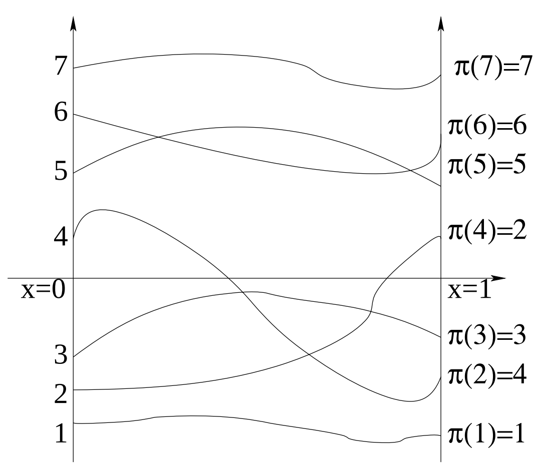
Les personnes qui ont contribué aux résultats suivants sont, entre autres, B. Fiedler, G. Fusco, C. Rocha, M. Wolfrum, J. Hale, P. Brunovský et D. Henry. On se place dans l'espace $X^\alpha = D((\Delta_N + Id)^\alpha)$, avec $\alpha \in]\frac{3}{4},1[$. On étudie maintenant l'équation

$$u_t = u_{xx} + f(x,u,u_x),\ u_x(0) = u_x(1) = 0 \tag{6}$$

où f est de classe $\mathcal{C}^2([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. T.J. Zelenyak a montré que ce système est de type gradient. Pour avoir un attracteur compact, on rajoute la condition de dissipation

$$f(x,u,0).u < 0 \tag{7}$$

pour $|u|$ assez grand. On suppose en outre que tous les équilibres sont hyperboliques, ce qui fait qu'il n'y en a qu'un nombre fini (ils sont isolés dans un compact). La transversalité des variétés stable et instable est aussi importante dans les résultats qui suivent, mais on rappelle qu'elle est automatiquement vérifiée dans notre cas (voir 2.2.1).
On note $\mathcal{A}_f$ l'attracteur compact de l'équation (6). On introduit la permutation de Sturm $\pi_f \in \mathfrak{S}_n$. Elle est le point de départ de notre étude, et a été pour la première fois définie par G. Fusco et C. Rocha sous le nom de *shooting permutation*. Elle est définie comme suit. On numérote les équilibres de 1 à n par leur ordre au point $x=0$: $u_1(0) < u_2(0) < ... < u_n(0)$ (les inégalités sont strictes par le théorème de Cauchy-Lipshitz). Puis on définit π_f par l'ordre en $x=1$: $u_{\pi(1)}(1) < u_{\pi(2)}(1) < ... < u_{\pi(n)}(1)$.



Cette permutation de Sturm est remarquable car elle suffit à définir l'attracteur. Si f et g sont deux fonctions telles que $\pi_f = \pi_g$ alors les deux attracteurs $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{A}_g$ sont topologiquement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme de $\mathcal{A}_f$ sur $\mathcal{A}_g$ tel que l'image d'une trajectoire de $\mathcal{A}_f$ est une trajectoire de $\mathcal{A}_g$ en conservant le sens du temps.

Théorème 3.2.1 *La permutation de Sturm π_f détermine explicitement et constructivement pour tous équilibres u_j et u_k :*
1) l'indice de Morse de u_j et u_k (l'indice de Morse est la dimension de la variété instable).
2) le nombre de changements de signe de $(u_j - u_k)$.
3) s'il existe ou non une trajectoire joignant u_j à u_k.

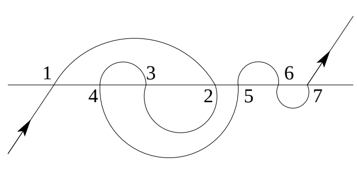
L'autre question est de savoir si une permutation π donnée est la permutation de Sturm engendrée par une équation du type (6).

Définition 3.2.1 *Une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ est dite dissipative si $\pi(1) = 1$ et $\pi(n) = n$.*
Une permutation π est dite de Morse si tous les nombres de Morse

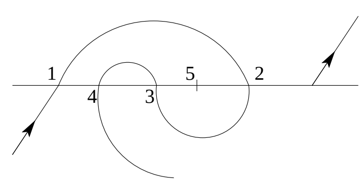
$$i_k = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} signe(\pi^{-1}(j+1) - \pi^{-1}(j))$$

sont positifs.
Une permutation π est appelée méandre si pour tout $1 \leq j, k \leq n$ avec j et k de même parité tels que $\pi^{-1}(k)$ est entre $\pi^{-1}(j)$ et $\pi^{-1}(j+1)$, alors $\pi^{-1}(k+1)$ est entre $\pi^{-1}(j)$ et $\pi^{-1}(j+1)$.

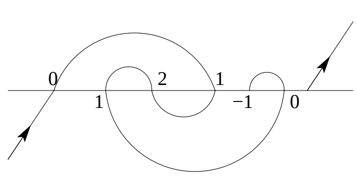
Il existe une façon géométrique de voir les méandres et permutations de Morse. Un méandre est une permutation engendrée par une courbe qui part en bas à gauche et arrive en haut à droite, qui ne s'intersecte pas, coupant une droite horizontale. L'ordre des intersections sur la droite donne alors la permutation (voir dessins ci-dessous). Pour un méandre de Morse, on parcourt la courbe en commençant en bas à droite. On part de 0, on ajoute +1 si on tourne à droite et -1 si on tourne à gauche le long du méandre, il est de Morse si on reste toujours positif tout au long de notre parcourt.



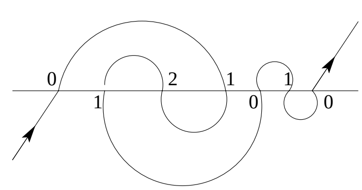
une permutation méandre



une permutation pas méandre



un méandre pas de Morse

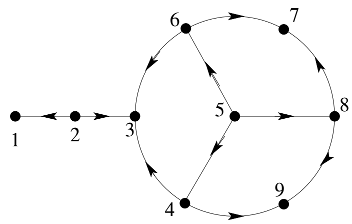


un méandre de Morse

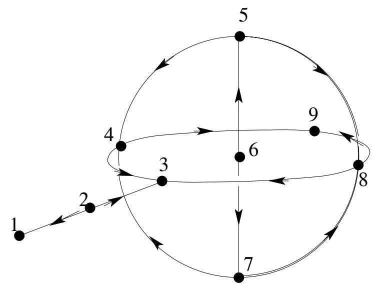
On peut maintenant caractériser les permutations de Sturm.

Théorème 3.2.2 *Soit une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$. La permutation π est une permutation de Sturm de (6) pour une certaine fonction f si et seulement n est impair et π est un méandre de Morse dissipatif.*

Pour finir, voici deux des schémas des 16 attracteurs à neuf équilibres possibles. On n'a pas représenté toutes les trajectoires, en effet, par le lemme d'inclinaison, s'il y a une trajectoire de u_i à u_j et de u_j à u_k, alors il y a aussi une trajectoire de u_i à u_k).



π=(4 6 8)(5 7)



π=(4 8)

Références

[1] S.B. Angenent, *The Morse-Smale property for a semilinear parabolic equation*, Journal of Differential Equations, vol. 62 (1986), p. 427-442.

[2] P. Brunovský et P. Poláčik, *The Morse-Smale structure of a generic reaction-diffusion equation in higher space dimension*, Journal of Differential Equations, vol. 135 (1997), p. 129-181.

[3] P. Brunovský et G. Raugel *Manuscrit.*

[4] E.N. Dancer et P. Poláčik, *Realization of vector fields and dynamics of spatially homogeneous parabolic equations*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 140, n^o 668 (1999)

[5] B. Fiedler et C. Rocha *Heteroclinic orbits of semilinear parabolic equations*, Journal of Differential Equations, vol. 125 (1996), p. 239-281.

[6] B. Fiedler et C. Rocha *Realization of meander permutations by boundary value problems*, Journal of Differential Equations, vol. 156 (1999), p. 282-308.

[7] B. Fiedler et C. Rocha *Orbit equivalence of global attractors of semilinear parabolic differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 352 (2000), p. 257-284.

[8] G. Fusco et C. Rocha *A permutation related to the dynamics of a scalar parabolic PDE*, Journal of Differential Equations, vol. 91 (1991), p. 75-94.

[9] J. Hale, L. Magalhães et W. Oliva *An introduction to infinite dimensional dynamical systems-geometric theory*, Applied Mathematical Sciences (Springer Verlag), vol. 47 (1984).

[10] D. Henry *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics (Springer Verlag), vol. 840 (1961).

[11] D. Henry *Topics in nonlinear analysis*, Trabalho de matematica, vol. 192 (prépublication) (1982).

[12] D. Henry, *Some infinite-dimensional Morse-Smale systems defined by parabolic partial differential equations*, Journal of Differential Equations, vol. 59 (1985), p. 165-205.

[13] J. Palis et W. De melo *Geometric theory of dynamical systems*, Springer Verlag (1982).

[14] A. Pazy *Semigroups of linear operators and applications to PDE*, Applied Mathematical Sciences (Springer Verlag), vol. 44 (1983).

[15] P. Poláčik, *Transversal and nontransversal intersection of stable and unstable manifolds of reaction diffusion equations on symmetric domains*, Differential and Integral Equations, vol. 7 (1994), p. 1527-1545.

[16] P. POLÁČIK, *Persistent saddle-connection in a class of reaction-diffusion equations*, Journal of Differential Equations, vol. 156 (1999),p. 182-210.

[17] G. RAUGEL *Global attractors in partial differential equations*, Handbook of dynamical systems, vol. 2, Elsevier Science (2002).

[18] J.C. SAUT et R. TEMAM, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Communication in PDE, 4(3) (1979), p293-319.

[19] T.J. ZELENYAK *Stabilization of solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation with one space variable*, Journal of Differential Equations, vol. 4 (1968),p. 17-22.