

Dominos, arbres, forêts et laplaciens

Matthieu JOSUAT-VERGÈS et Loïc DUBOIS
Sujet proposé par Vincent BEFFARA

29 juin 2003

Introduction

Un domino est tout simplement un rectangle 2×1 , et le problème que l'on se pose est celui de pavages de certaines régions du plan par dominos. On commence par se ramener à des structures qui s'interprètent très bien en termes de graphes, ce sont les dimères et les arbres couvrants; et dans chacun des deux cas les dénombrements se font par des calculs de déterminant. Ces calculs font intervenir des équations avec le laplacien discret, que l'on résoudra plus ou moins facilement selon que l'on se place dans une structure avec ou sans bords.

Table des matières

1	Définitions générales	2
2	Dénombrement des pavages par dominos	5
2.1	Le théorème de Kasteleyn	5
2.2	Utilisation du Laplacien, formule de Kasteleyn pour le rectangle	10
2.3	Commentaires sur la formule de Kasteleyn	12
3	Arbres couvrants	14
3.1	La bijection de Temperley	14
3.2	Dénombrement d'arbres couvrants	17

Document réalisé avec L^AT_EX. Les figures ont été créées avec le logiciel *xfig*.

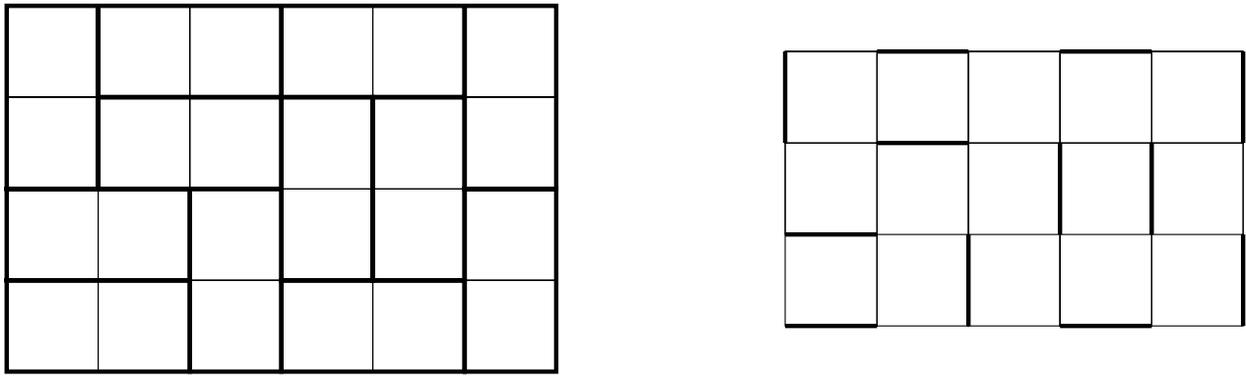


FIG. 1: La bijection entre dominos et dimères

1 Définitions générales

Dans cette partie, les régions du plan considérées sont des rectangles. Dans tout ce qui suit un rectangle désigne un graphe, dont l'ensemble des sommets est $\{0 \dots m - 1\} \times \{0 \dots n - 1\}$, et tel que deux sommets sont joints si et seulement si ils ont une coordonnée identique et la deuxième différente d'une unité. \mathbb{Z} sera aussi considéré comme un graphe, dont les arêtes sont les paires d'entiers consécutifs ; et une chaîne désigne un sous-graphe connexe de \mathbb{Z} . On donne aussi une structure de graphe à \mathbb{Z}^2 en disant que deux points sont voisins s'ils sont à une distance de 1. Un domino est un circuit de 6 arêtes de \mathbb{Z}^2 ou d'un rectangle.

On utilisera des matrices dont les entrées sont indicées par les sommets d'un graphe, donc par commodité ces sommets seront identifiés avec les entiers naturels $1 \dots n$. Par suite, les vecteurs de \mathbb{R}^n seront identifiés aux fonctions associant un réel à chaque sommet du graphe.

Définition : Un *couplage parfait* C (ou recouvrement par dimères) sur un graphe est un ensemble d'arêtes tel que chaque sommet du graphe appartienne à un et un seul élément de C (et alors une arête est appelée dimère).

Définition : Un pavage par dominos d'un rectangle (ou de \mathbb{Z}^2) est un ensemble de dominos tel que chaque face du rectangle soit à l'intérieur d'un et un seul domino.

Définition : Étant donné un graphe planaire G , son dual G' est le graphe défini par les propriétés suivantes :

- À chaque face de G correspond un sommet de G' .
- À chaque arête e de G , correspond une arête de G' qui joint les deux sommets de G' correspondant aux deux faces de G de chaque coté de e .

La subtilité est qu'il faut prendre en compte la face à l'infini de G : elle donne un sommet de G' que l'on représente généralement par une boucle faisant le tour des autres sommets, (appelé sommet à l'infini), voir figure 2. Remarquons aussi qu'avec cette définition, dans le cas général G' peut être un multigraphe, c'est-à-dire que deux mêmes sommets sont parfois liés par plusieurs arêtes différentes ; c'est d'ailleurs le cas de l'exemple de la figure 2.

Le graphe dual d'un rectangle est un rectangle plus petit (longueur et largeur baisse d'une unité) et dont les sommets du bord sont liés à un sommet qu'on a rajouté.

Étant donné un sous-ensemble X d'arêtes du graphe G on lui associe naturellement le sous-ensemble X' des arêtes de G' qui ne coupent pas les arêtes de X . De ce point de vue, chaque pavage par dominos sur G correspond à un couplage parfait de G' (dans ce cas le sommet à l'infini de G' ne peut être lié à aucun autre, donc on n'en tient pas compte). D'où le résultat :

Proposition 1 *Le nombre de pavages par dominos du rectangle $m \times n$ est égal au nombre de recouvrements par dimères du rectangle $(m - 1) \times (n - 1)$ (voir figure 1).*

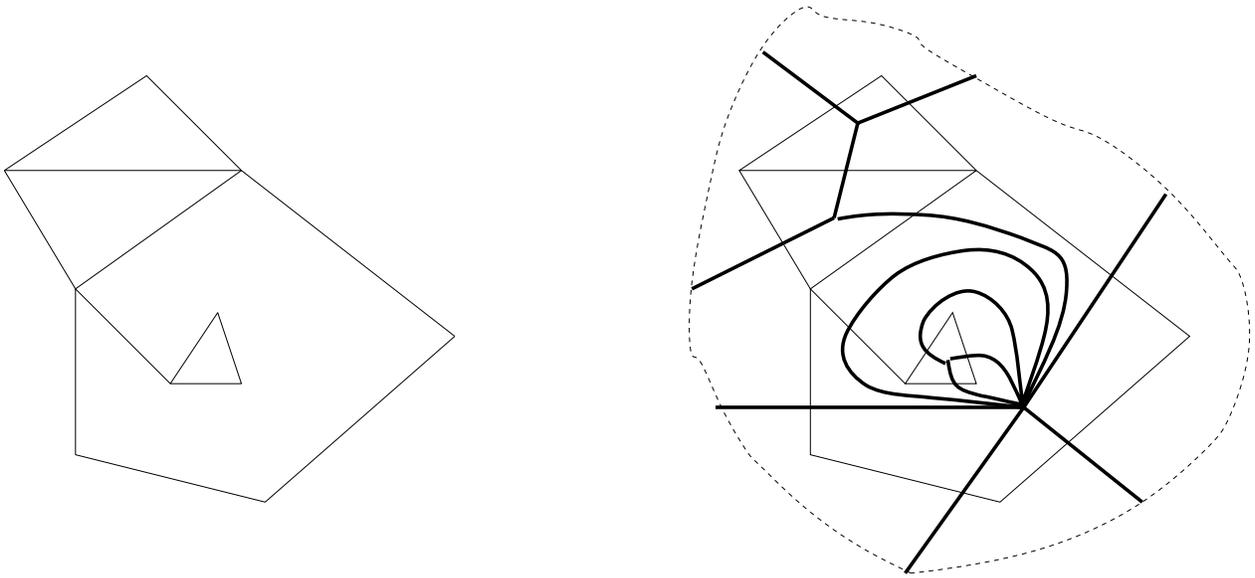


FIG. 2: Graphe dual d'un graphe planaire

La correspondance présentée sur la figure 1 est clairement bijective, et le graphe dual du rectangle $m \times n$ privé du sommet à l'infini est le rectangle $(m-1) \times (n-1)$. On se ramène ainsi à dénombrer les recouvrements par dimères; on dispose alors du théorème de Kasteleyn sur les graphes bipartis, qui nous donne une première réponse.

Définition : Un *arbre couvrant* sur un graphe est un sous-ensemble d'arêtes connexe, sans cycle et passant par tous les sommets.

Dans tout graphe connexe on peut trouver au moins un arbre couvrant. Du point de vue de la dualité, si X est un arbre couvrant sur G alors X' en est un sur G' .

Définition : Un graphe est dit *biparti* si tout cycle est de longueur paire.

Cette définition est équivalente au fait qu'on puisse trouver une partition $\{A, B\}$ de l'ensemble des sommets, tel que toute arête joigne un élément de A à un élément de B . La classe des graphes bipartis apparaîtra naturellement plus tard lorsque l'on présentera la bijection de Temperley.

Définition : Un graphe G est dit *orienté impairement* si dans toute face du graphe, le nombre d'arêtes orientées dans le sens indirect est impair. Dans le cas d'un graphe biparti, comme chaque face a un nombre pair d'arêtes, cela revient à dire que dans toute face du graphe le nombre d'arêtes orientées dans un sens donné est impair.

Proposition 2 *Il est toujours possible de choisir une telle orientation.*

Preuve : Voici comment on procède. Pour commencer, on choisit un arbre couvrant X , et on oriente toutes ses arêtes arbitrairement. Ensuite on construit le graphe dual G' , et l'arbre dual X' . Alors il suffit de prendre les faces de G une par une en remontant l'arbre dual des feuilles vers la racine (choisie comme étant le sommet à l'infini), et à chaque étape on a une arête à orienter pour que cette face soit orientée impairement. La figure 3 explicite cette façon de procéder.

Rappelons que la *matrice d'adjacence* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ du graphe G dont les sommets sont numérotés de 1 à n , est définie de la manière suivante :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est voisin de } j \text{ (noté } i \sim j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice est symétrique.

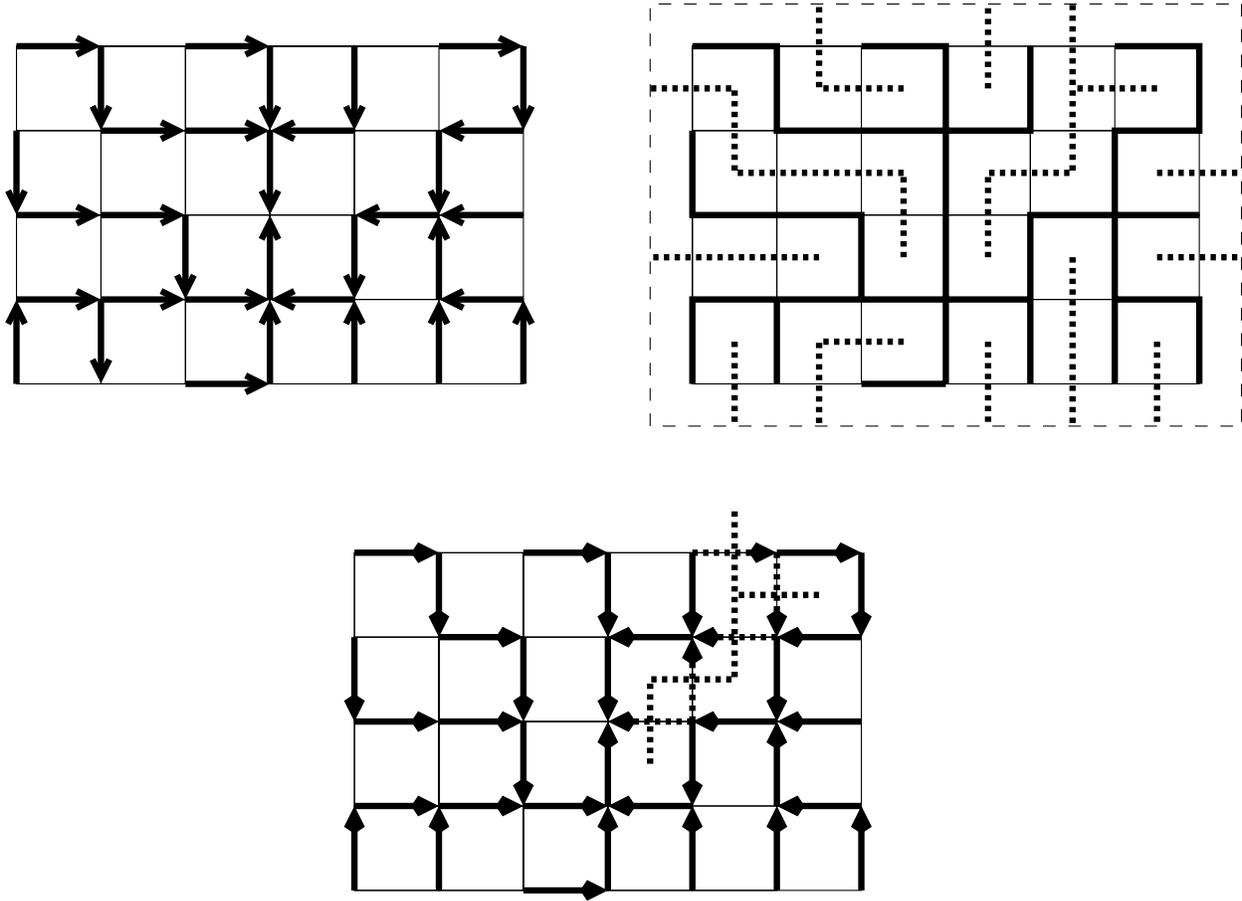


FIG. 3: construction d'une orientation impaire d'un graphe

Définition : Dans le cas d'un graphe orienté, on pose $k_{i,j} = 1$ si l'arête (i, j) est orientée de i vers j , -1 si elle est dans l'autre sens. La matrice K ainsi définie est appelée *matrice de Kasteleyn* (elle n'est pas unique, car elle dépend évidemment de l'orientation choisie). Celle-ci est antisymétrique. L'intérêt d'introduire cette matrice de Kasteleyn apparaît clairement dans la section qui suit.

2 Dénombrement des pavages par dominos

2.1 Le théorème de Kasteleyn

Théorème 1 (Kasteleyn) *Soit G un graphe biparti, muni d'une orientation impaire, et K sa matrice de Kasteleyn, alors le nombre N de recouvrements par dimères de G est égal à $\sqrt{|\det(K)|}$.*

Preuve : Remarquons déjà que s'il y a un nombre impair de sommets alors $N = 0$. Mais on sait qu'une matrice antisymétrique d'ordre impair n'est pas inversible (son polynôme caractéristique est impair) et donc le théorème est vrai. On suppose donc que G a $2n$ sommets.

Comme G est un graphe biparti, si on ordonne bien les sommets de G , on peut mettre la matrice K sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ -M^t & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Si M n'est pas carrée alors $\det(K) = 0$, mais ce cas est possible seulement si G n'admet aucun recouvrement par dimères. En effet si on a une bipartition $\{A; B\}$ de G et un recouvrement par dimères, alors en associant à un élément de A l'autre l'extrémité du dimère auquel il appartient, on obtient une bijection de A dans B . Si M est carrée alors tout est encore possible, et on a :

$$\sqrt{|\det(K)|} = |\det(M)| = \left| \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \dots m_{n,\sigma(n)} \right|$$

Dans cette somme chaque terme non nul s'interprète par un recouvrement par dimères, où le sommet indicé par i dans A est lié au sommet indicé par $\sigma(i)$ dans B . Il suffit pour conclure de montrer que ces termes sont tous de même signe (et donc tous égaux à $\epsilon \in \{1; -1\}$).

Pour cela considérons deux recouvrements V et W , et leur union $V \cup W$. À ces deux recouvrements correspondent respectivement les deux termes $\epsilon(\sigma) \prod m_{i,\sigma(i)}$ et $\epsilon(\tau) \prod m_{i,\tau(i)}$. Les arêtes communes à V et W correspondent à des facteurs identiques dans les deux produits. Si une arête appartient à l'un et pas l'autre, dans ce cas on a un cycle de $V \cup W$ composé alternativement d'éléments de V et de W (cf. exemple sur la figure 4). Sa longueur est paire, $2k$ par exemple.

Les indices des sommets du cycle vont être successivement :

$$i_1, \sigma(i_1), i_2, \sigma(i_2), \dots, i_k, \sigma(i_k)$$

et on a aussi, en parcourant dans le même ordre :

$$i_1, \tau(i_2), i_2, \tau(i_3), \dots, i_k, \tau(i_1)$$

donc τ et σ (i_k, \dots, i_1) coïncident sur $\{i_1, \dots, i_k\}$, d'où une contribution de $(-1)^{k-1}$ à la signature. (voir figure 5)

D'autre part, pour le produit, on a :

$$\prod m_{i_r, \tau(i_r)} = \prod m_{i_r, \sigma(i_{r-1})}$$

et donc :

$$\prod m_{i_r, \sigma(i_r)} m_{i_r, \sigma(i_{r-1})} = (-1)^k \cdot (-1)$$

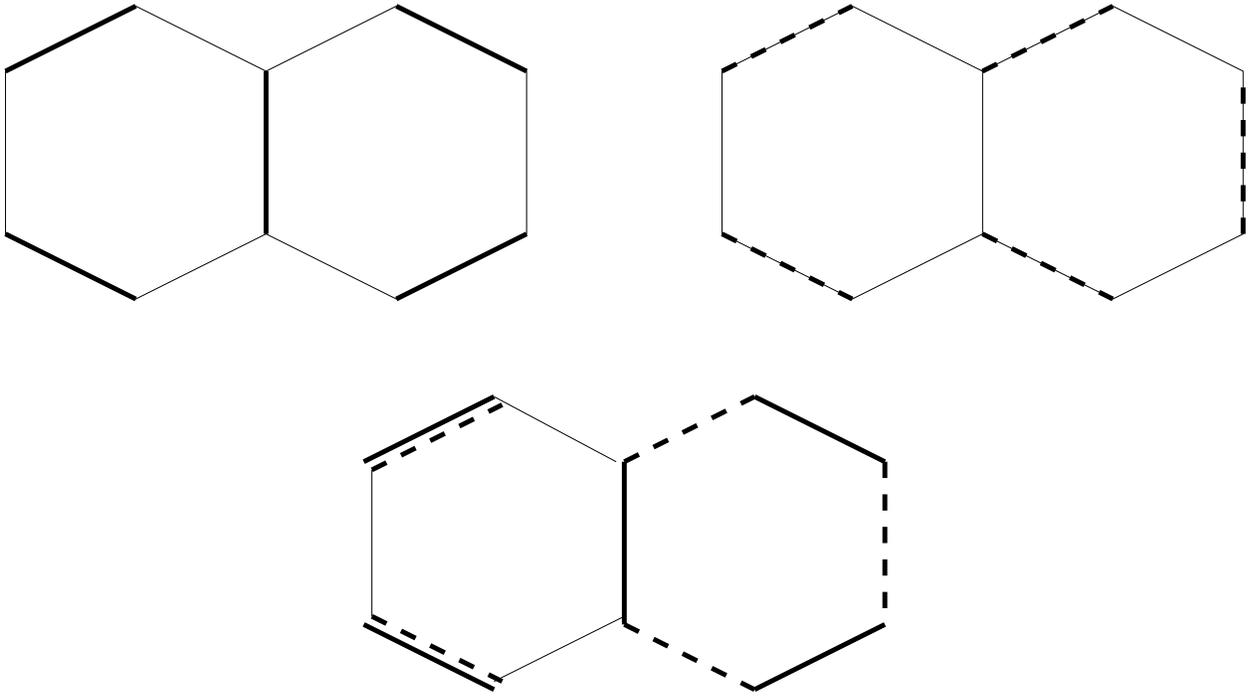


FIG. 4: Union de deux recouvrements par dimères

Le $(-1)^k$ provient du fait que chaque arête de W est parcourue dans le sens indirect. D'autre part, en parcourant le cycle, on obtient (-1) car l'orientation est impaire. Ce dernier point n'est pas trivial : c'est a priori faux pour un cycle quelconque. Il faut utiliser la formule d'Euler pour les graphes planaires connexes : $S - A + F = 1$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces sans compter la face à l'infini. Si on se donne un cycle (sans points doubles) constitués d'un nombre pair d'arêtes : $(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{r-1}, j_r), (j_r, j_1)$ en parcourant les sommets dans le sens indirect, alors le produit $m_{j_1, j_2} \cdot m_{j_2, j_3} \dots m_{j_r, j_1}$ vaut précisément $(-1)^{A+F} = (-1)^{A-F} = (-1)^{S+1}$. On ne considère dans A, F , et S que les arêtes qui sont à l'intérieur du cycle et sur le bord, les faces qui sont à l'intérieur du cycle, et les sommets à l'intérieur et sur le bord. Cet énoncé se démontre facilement : pour chaque arête (i, j) qui se trouve à l'intérieur, on rajoute dans le produit les termes $m_{i, j} \cdot m_{j, i}$ ce qui modifie le produit de $(-1)^A$ (puisque les arêtes qui sont sur le bord sont en nombre pair). Ce nouveau produit se calcule plus facilement : c'est ce que l'on obtient en parcourant dans le sens indirect chacune des faces qui se trouve à l'intérieur (fig. 6), i.e. $(-1)^F$ (d'après la définition de l'orientation).

Si maintenant le cycle provient de la réunion de deux couplages, alors le nombre de sommets qui sont sur le bord et à l'intérieur est pair, le résultat s'ensuit. Et le théorème est démontré.

Remarques :

- Le théorème est encore vrai dans le cas où G est un graphe quelconque, mais la preuve est plus compliquée. On va juste en donner le schéma. Si G est un graphe quelconque, on a le résultat suivant :

$$N = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\sigma \in S_{2n} \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} a_{\sigma(1), \sigma(2)} \cdots a_{\sigma(2n-1), \sigma(2n)}$$

En effet à chaque $\sigma \in S_{2n}$ tel que $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$ on peut associer l'ensemble formé des couples $(\sigma(2i-1), \sigma(2i))$, et il correspond à un couplage parfait si et seulement si tous ces couples sont des arêtes, ce qui équivaut à dire que le terme associé à σ dans la somme est non nul. Pour chaque couplage parfait C , on compte $n!$ permutations qui donnent C , et on peut conclure puisque on a justement un facteur $\frac{1}{n!}$.

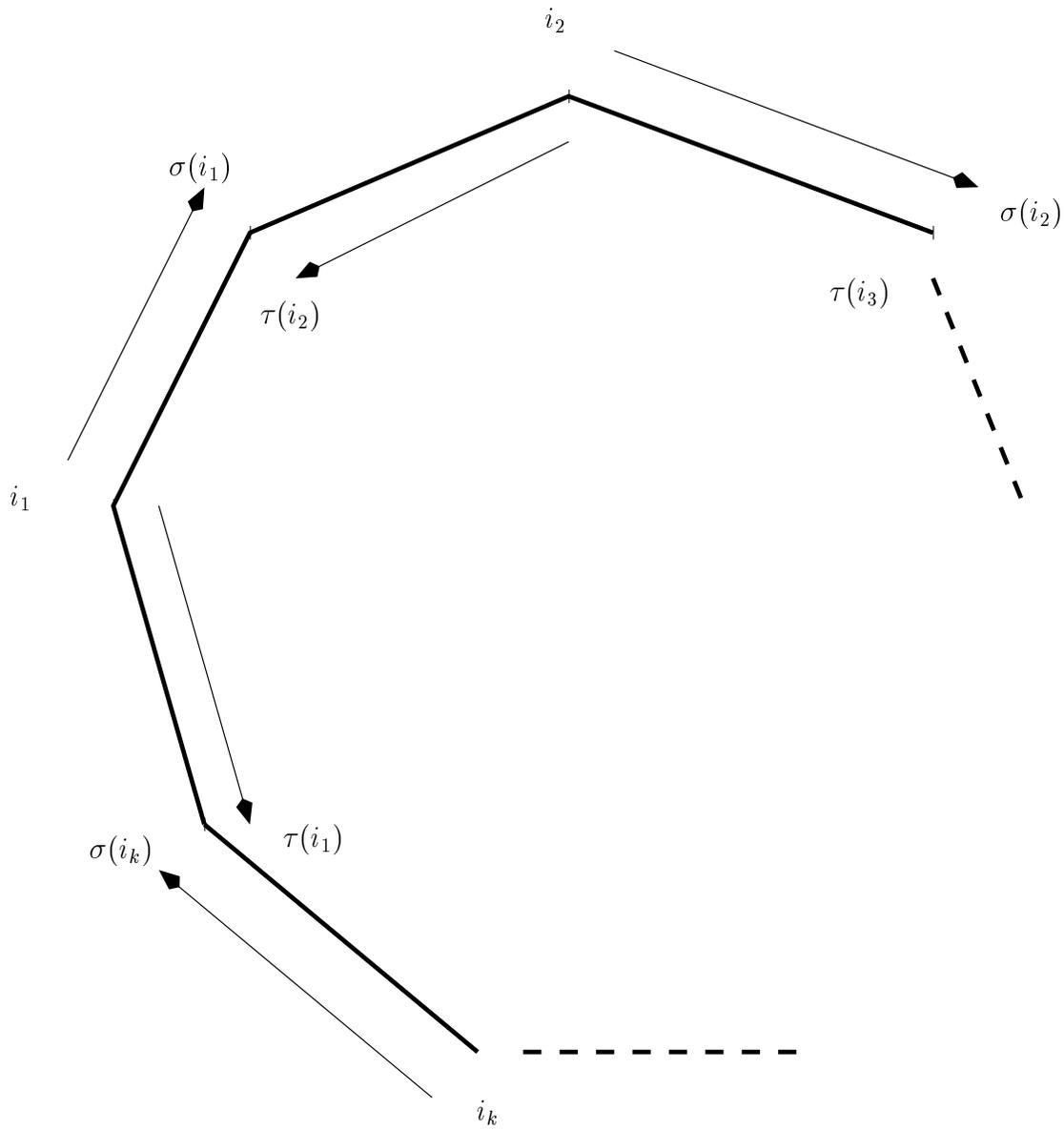


FIG. 5: Relation entre σ et τ le long d'un cycle

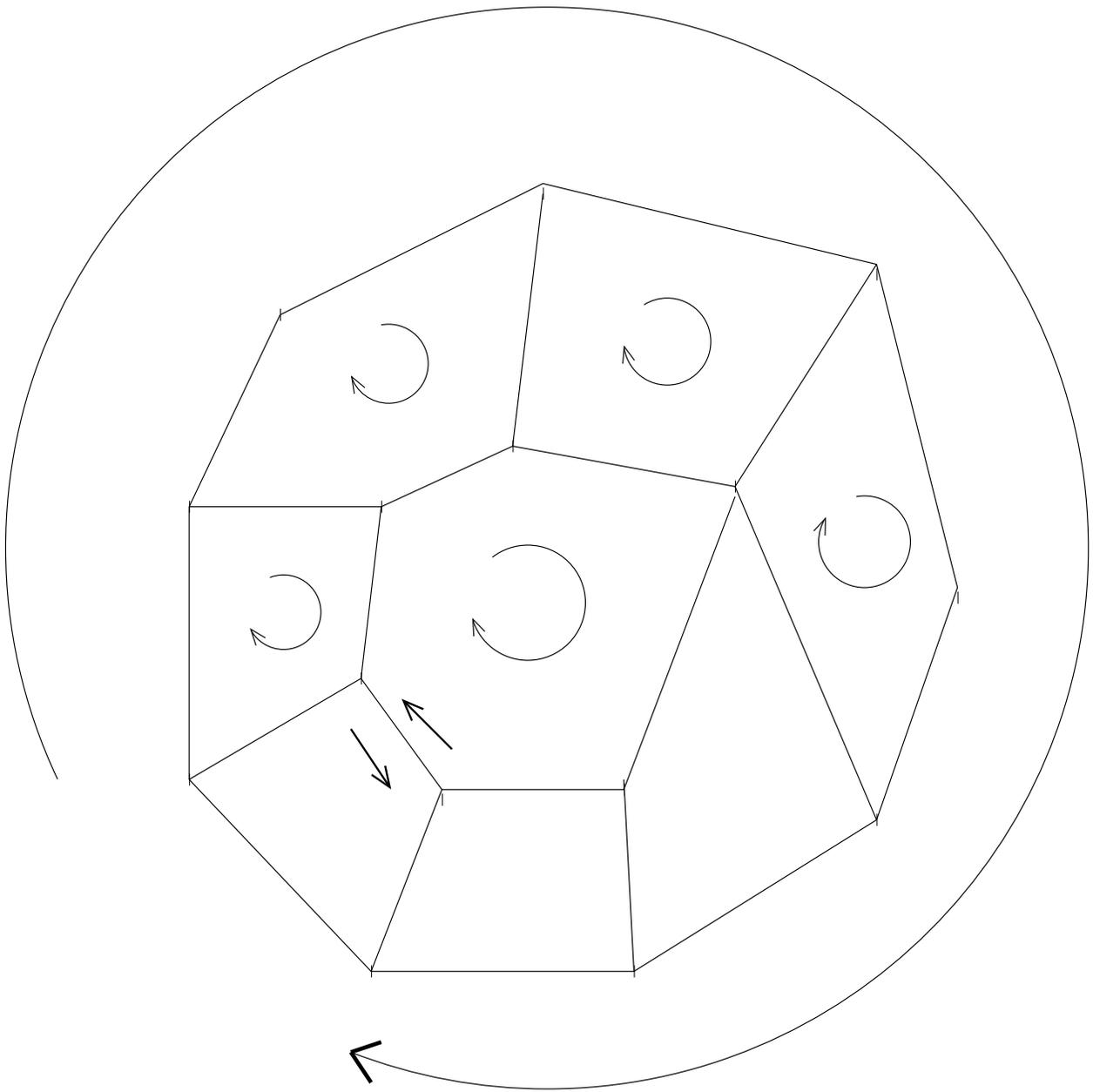


FIG. 6: Parcours le long d'un cycle en passant par les faces

On n'a utilisé que la matrice d'adjacence dans cette formule. La matrice de Kasteleyn va permettre d'identifier le membre de droite à quelque chose de plus intéressant. En effet on montre que pour une matrice antisymétrique A d'ordre $2n$ on a :

$$\sqrt{\det(A)} = \frac{1}{n!} \left| \sum_{\substack{\sigma \in S_{2n} \\ \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1),\sigma(2)} \cdots m_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)} \right| \quad (2)$$

Cette quantité est appelée le *pfaffien* de A . Pour conclure il faut alors montrer que si $A = K$, tous les termes sont de même signe.

- En regardant cette preuve, on pourrait se dire qu'il est un peu artificiel d'orienter le graphe, juste pour avoir une jolie formule. On trouve effectivement le résultat escompté en calculant (dans le cas d'un graphe biparti) le permanent de M :

$$\sum_{\sigma \in S_n} m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)} = \text{per}(M)$$

Mais le calcul est beaucoup moins pratique. En fait le calcul du permanent d'une matrice s'est révélé être un problème NP-complet ; d'où l'intérêt de se ramener à un déterminant pour lequel on a des algorithmes relativement rapides.

- Il ne faut pas croire non plus que ce résultat épuise la question du dénombrement des pavages dans un rectangle. On a bien un moyen de calculer effectivement le nombre cherché pour un rectangle donné ; mais on aimerait avoir une formule plus explicite, pour pouvoir trouver un équivalent en fonction des dimensions du rectangle par exemple. Typiquement dans un système de physique statistique, le nombre de particules est gigantesque, mais on aimerait connaître (approximativement) le nombre de configuration pour en déduire l'entropie.

- Il y a encore une remarque importante à faire. Par souci de généralité, on a énoncé le théorème dans le cas d'un graphe biparti quelconque, mais pour ce qui est des rectangles $m \times n$, on peut améliorer considérablement le résultat en choisissant une manière d'orienter plus appropriée, qui utilise les nombres complexes. On introduit une matrice de Kasteleyn différente, avec $k_{ij} = 1$ si l'arête est horizontale, et $k_{ij} = i$ si l'arête est verticale. Une telle matrice est symétrique, mais correspond quand même à une orientation impaire, car si on fait le produit des coefficients le long d'une face, on trouve -1 . La différence est qu'en quelque sorte, on a refusé de choisir où placer les -1 . Comme on le verra plus loin, le déterminant de cette matrice est plus facile à calculer. Montrons maintenant que l'on a toujours la formule $N = \sqrt{|\det K|}$. Comme le rectangle est un graphe biparti, on a toujours :

$$\sqrt{\det(K)} = |\det(M)| = \left| \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)} \right|$$

Pour montrer que tous les termes non nuls sont égaux, on va se fixer un recouvrement par dimères particulier. Le produit mn est pair, supposons donc par exemple que n est pair. Alors il y a un et un seul recouvrement V_0 constitué uniquement d'arêtes verticales. Du coup, si on se donne un autre recouvrement W , et un cycle non trivial de longueur $2k$ tracé dans $V_0 \cup W$, alors il y a k arêtes de V_0 et k arêtes de W . Comme il s'agit d'un cycle, et comme toutes les arêtes de V_0 sont verticales, on en déduit facilement que k est pair. Mais ce que l'on veut montrer, c'est que $(-1)^{k-1} = -1$ (k pair), qui est le changement apporté à la signature par le cycle, est égal à la valeur obtenue en parcourant le cycle, à savoir $i^{\text{nb. d'arêtes verticales}}$. Pour ce faire, on procède comme dans la preuve du cas général, en passant par chaque face, i.e. en rajoutant deux fois les arêtes qui sont à l'intérieur, puis en utilisant la formule d'Euler : $(-1)^{A+F} = (-1)^{S+1} = -1$. La différence est que seules les arêtes verticales qui sont à l'intérieur vont donner un (-1) . Les arêtes horizontales vont donner 1, mais vu le choix que l'on a fait pour V_0 , elles sont en nombre pair ce que l'on peut voir par exemple en considérant chaque colonne. Le même raisonnement s'applique pour les arêtes du cycle, car les arêtes horizontales et verticales sont en nombre pair.

- Enfin, on peut signaler que cette méthode se généralise à d'autres graphes ; au lieu d'utiliser 1 et i qui conviennent surtout pour le rectangle, on peut utiliser des nombres complexes de module 1.

2.2 Utilisation du Laplacien, formule de Kasteleyn pour le rectangle

Définition : Soit G un graphe planaire. Le *laplacien* de G est la matrice $\Delta = (\delta_{i,j})$ indexée par les sommets de G et définie par :

- $\delta_{i,i} = \text{deg}(i)$
- $\delta_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si une arête joint } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

où $\text{deg}(i)$, le degré de i , est égal au nombre d'arêtes sortant du sommet i .

La fonction constante égale à 1 est un vecteur propre de cette matrice pour la valeur propre 0. On peut montrer que pour un graphe connexe, c'est une valeur propre simple de Δ . Regardons ce que cela donne du point de vue fonctionnel. Si f est une fonction définie sur les sommets de G à valeurs réelles, alors on a par définition :

$$\Delta f(x) = \text{deg}(x)f(x) - \sum_{y \text{ voisin de } x} f(y) \quad (3)$$

Théorème 2 *Le nombre de couplages parfaits du rectangle $m \times n$ dans \mathbb{Z}^2 est donné par la formule :*

$$\left| \prod_{l=1}^m \prod_{j=1}^n \left(2\cos\left(\frac{l\pi}{m+1}\right) + 2i\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \right) \right|^{\frac{1}{2}}$$

Preuve : En fait, les termes qui apparaissent dans le produit sont les valeurs propres d'une matrice $K = (k_{l,j})$ d'ordre mn , et définie de la manière suivante :

$$k_{l,j} = \begin{cases} 1 & \text{si une arête horizontale va de } l \text{ vers } j \\ i & \text{si une arête verticale va de } l \text{ vers } j \\ -1 & \text{si une arête horizontale va de } j \text{ vers } l \\ -i & \text{si une arête verticale va de } j \text{ vers } l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce produit est donc le pfaffien de K . D'après la section précédente, c'est donc le nombre de couplages parfaits du rectangle. Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'à montrer que les termes qui apparaissent dans le produit sont effectivement les valeurs propres de K . Il se trouve que ces valeurs propres sont intimement liées à celles du Laplacien dans \mathbb{Z}^2 . Essayons donc de voir dans quels cas on peut effectivement calculer les valeurs propres du laplacien discret. Pour commencer on se place dans \mathbb{Z} . Dans ce cas le laplacien d'une fonction f est :

$$\Delta f(x) = 2f(x) - f(x+1) - f(x-1)$$

En faisant l'analogie avec le laplacien continu en dimension 1, où l'équation $\Delta f = \lambda f$ s'écrit $y'' - \lambda y = 0$, on introduit naturellement les fonctions $f_a : x \mapsto \cos(ax)$, $g_a : x \mapsto \sin(ax)$, $x \in \mathbb{Z}$. Un calcul élémentaire montre alors que ces fonctions sont bien des vecteurs propres du laplacien discret, et la valeur propre associée à f_a et g_a est $2 - 2\cos(a)$.

Passons maintenant au graphe à n sommets $1, \dots, n$. Dans ce cas, on peut introduire une autre matrice, qu'on nommera $\tilde{\Delta}$, qui à une fonction f du graphe dans \mathbb{R} associe la fonction définie par :

$$\tilde{\Delta} f(x) = 2f(x) - \sum_{y \text{ voisin de } x} f(y)$$

Cette matrice se distingue de la matrice du Laplacien par son comportement au bord, en 1 et en n . Mais les valeurs propres de $\tilde{\Delta}$ sont faciles à calculer car elles correspondent à certaines valeurs propres du Laplacien

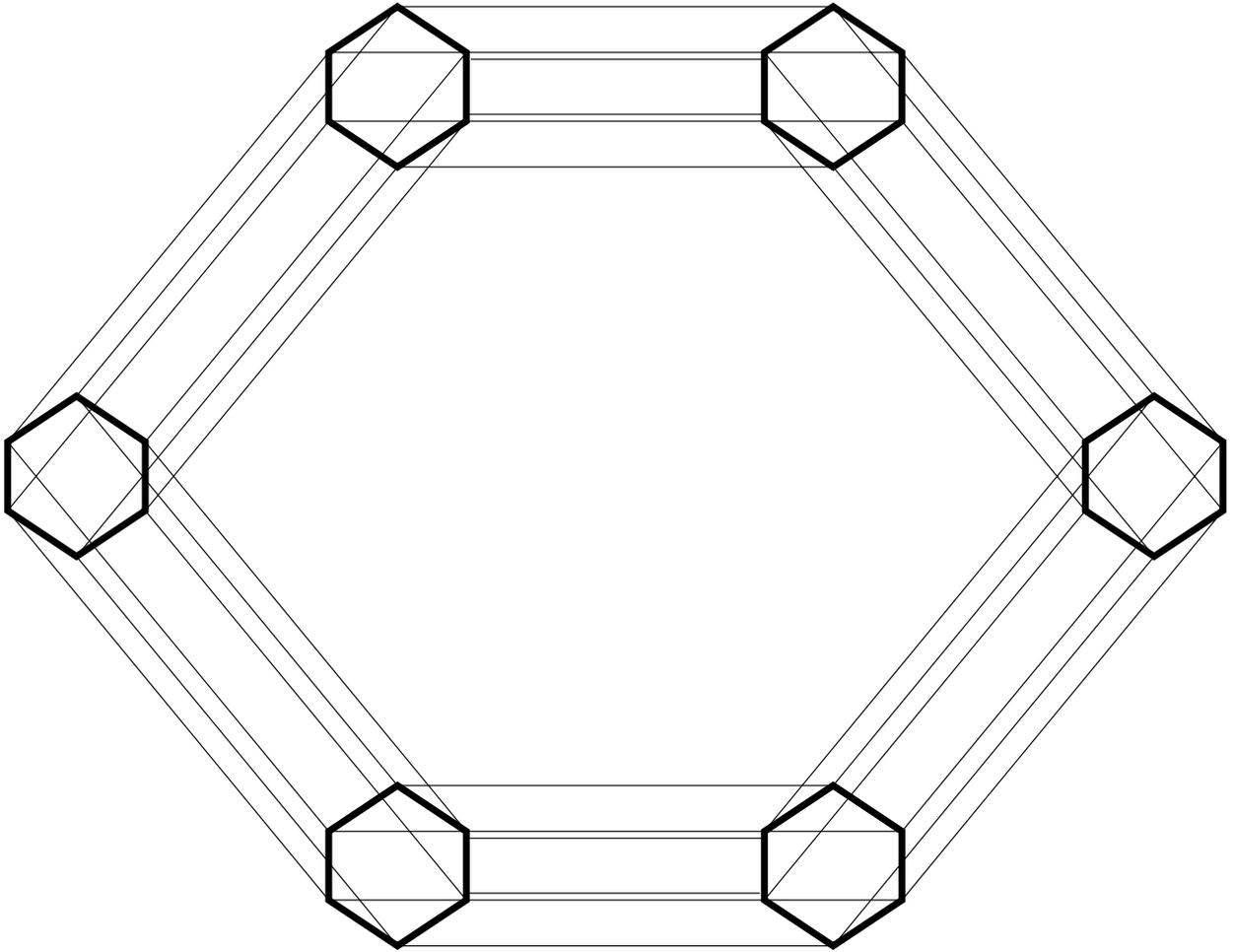


FIG. 7: Exemple de graphe torique. G_6^2

dans \mathbb{Z} . Plus précisément, si $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction propre du Laplacien et si $f(0) = f(n+1) = 0$ alors la restriction de f à $\{1, \dots, n\}$ est un vecteur propre de $\tilde{\Delta}$. Les fonctions g_a avec $a = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$ vérifient ces conditions ; les valeurs propres que l'on obtient pour $\tilde{\Delta}$ sont : $2 - 2 \cos(\frac{k\pi}{n+1})$, $k = 1, \dots, n$. Elles sont deux à deux distinctes, on a donc déterminé toutes les valeurs propres de $\tilde{\Delta}$.

On peut remarquer qu'en imposant des conditions au bord, on a discrétisé le spectre du Laplacien. Mais ceci n'est pas surprenant : en effet, dans le cas continu, c'est aussi vrai : le spectre du Laplacien sur un segment $[a, b]$ avec des conditions aux bords nulles est discret (mais il est infini).

Pour passer du Laplacien en dimension 1 au Laplacien en dimension 2, on utilise la notion de graphe produit.

Définition : Soit G et H deux graphes. Leur produit est défini comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $G \times H$ et tel que (x, y) est voisin de (z, t) si et seulement si : $x = z$ et $y \sim t$, ou $y = t$ et $x \sim z$.

Par exemple, le rectangle $m \times n$ comme on l'a défini, est le produit d'une chaîne de longueur n et d'une chaîne de longueur m . La figure 7 montre un autre exemple de produit de graphe, $G_6 \times G_6$ (on peut le plonger dans un tore mais pas dans le plan, donc on l'appelle graphe torique).

Le laplacien vérifie une propriété intéressante sur les graphes-produits :

Théorème 3 (Dérivation d'un produit) Pour une fonction réelle définie sur $G \times H$ à variables séparées, i.e. de la forme $f \otimes g : (x, y) \mapsto f(x).g(y)$, on a :

$$\Delta(f \otimes g) = \Delta(f) \otimes g + f \otimes \Delta(g)$$

Corollaire 1 On obtient les fonctions propres du laplacien de $G \times H$ en prenant les produits d'une fonction propre de G par une fonction propre de H , et dans chaque cas la valeur propre de la fonction-produit est égale à la somme des valeurs propres des deux fonctions. Autrement dit :

$$\Delta(f) = \lambda f \quad \text{et} \quad \Delta(g) = \mu g \implies \Delta(f \otimes g) = (\lambda + \mu)f \otimes g$$

Preuve : Le théorème se montre très facilement, il suffit de remarquer que $\deg(a, b) = \deg(a) + \deg(b)$ puis de distinguer les voisins de (a, b) selon qu'il sont de la forme $(a, _)$ ou $(_, b)$. Pour en déduire le corollaire, cela revient en substance à montrer que le produit tensoriel de deux familles libres est une famille libre; on conclut par cardinalité de cette famille, connaissant la dimension de l'espace des fonctions de $G \times H$ dans \mathbb{R}

Retournons à la preuve du théorème. Si on définit le laplacien sur le rectangle $m \times n$ par : $\Delta f(z) = 4f(z) - \sum_{y \text{ voisin de } z} f(y)$, on n'obtient pas les valeurs propres de K mais celles de la matrice d'adjacence du graphe. La quantité que l'on va utiliser est la suivante : (on l'appelle encore Δ)

$$\Delta f(z) = (2 + 2i)f(z) - f(z + 1) - f(z - 1) - if(z + i) - if(z - i)$$

où f est prolongée par 0 sur le rectangle qui entoure le graphe. Les sommets sont ici représentés par des nombres complexes. De la même manière que pour le laplacien d'un produit tensoriel, on trouve la formule :

$$\Delta(g \otimes h) = ig \otimes \tilde{\Delta}h + \tilde{\Delta}g \otimes h$$

où l'opérateur $\tilde{\Delta}$ est celui que l'on a défini tout à l'heure pour les chaînes. On en déduit que les valeurs propres de Δ sont les : $2 - 2 \cos(\frac{l\pi}{m+1}) + i(2 - 2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}))$, $l = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Ces valeurs propres étant toutes distinctes, on obtient toutes les valeurs propres de Δ . On remarque alors que d'après la définition, on a $\Delta = (2 + 2i)I_{mn} - K$. Les valeurs propres de K sont donc obtenues à partir de celles de Δ , et on trouve bien le résultat escompté.

2.3 Commentaires sur la formule de Kasteleyn

Si on regarde le cas $n = 2$ on a la proposition suivante :

Proposition 3 Le nombre de couplages parfaits d'un rectangle $m \times 2$ est donné par la suite de Fibonacci F_m . On rappelle que la suite de Fibonacci est défini par la relation de récurrence $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$, et par $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$. En résolvant la récurrence, on obtient :

$$F_m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^m - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^m$$

Preuve : La preuve se fait très simplement par récurrence. Un dessin explique mieux ce qui se passe. (cf figure 8).

La formule de Kasteleyn donne alors la jolie formule suivante :

Corollaire 2 La suite de Fibonacci s'exprime par :

$$F_m = \prod_{j=1}^m \left| 2 \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right) + i \right|$$

Remarques :

- On peut remarquer qu'il est plus facile d'utiliser la formule de la suite de Fibonacci avec le nombre d'or pour déterminer un équivalent. C'est un phénomène qui se généralise bien au cas où l'on ne fait tendre

Premier cas :



Second cas :



FIG. 8: Récurrence pour le cas du rectangle $m \times 2$.

qu'une seule dimension du rectangle vers l'infini. En effet, supposons que l'on ait un rectangle $n \times k$ avec k un entier fixé (en pratique, assez petit). Considérons la dernière colonne du rectangle. Elle possède k éléments. Si on a un couplage parfait sur ce rectangle, on peut décider de retirer les arêtes du couplages qui touchent les sommets de la dernière colonne. On obtient un rectangle $(n-1) \times k$ avec des trous sur la dernière colonne. Il y a 2^k configurations possibles pour répartir des trous sur une colonne. Numérotons-les c_1, \dots, c_{2^k} . On définit alors la quantité $x_{n,i}$ qui représente le nombre de couplage parfait du graphe $G_{n,i}$, où $G_{n,i}$ est le graphe obtenu en partant d'un rectangle $n \times k$ avec des trous sur la dernière colonne suivant la configuration c_i . On définit ensuite le vecteur colonne $X_n = (x_{n,i})_{1 \leq i \leq 2^k}$. La suite (X_n) suit une relation de récurrence simple : on pose $a_{i,j} = 1$ si dans le graphe $G_{2,i}$, on peut coupler chaque sommet de la deuxième colonne avec un autre sommet (quelconque) de façon à ce que l'on obtienne la configuration c_j sur la première colonne une fois que l'on a retiré les arêtes du couplage qui sont horizontales ; et $a_{i,j} = 0$ dans le cas contraire. En notant A la matrice des $a_{i,j}$ (c'est une matrice d'ordre 2^k), on obtient la formule de récurrence suivante : $X_{n+1} = A.X_n$, qui se résout en $X_n = A^n.X_0$ (en choisissant bien X_0). En diagonalisant la matrice A (qui est symétrique), on trouve normalement un équivalent exponentiel en n du nombre de couplage parfait de $n \times k$ quand n tend vers l'infini. Cette méthode convient pour des k petits.

- Si on fait tendre à la fois n et m vers l'infini, la formule de Kasteleyn permet de donner un équivalent du logarithme du nombre de couplages parfaits du rectangle $m \times n$. En effet, on reconnaît une somme de Riemann qui converge vers une intégrale :

$$\frac{1}{2} \int \int_{[0,1] \times [0,1]} \log(4 \cos^2(x\pi) + 4 \cos^2(y\pi)) dx dy$$

La difficulté réside dans le fait qu'il y a une singularité en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pour pouvoir repasser à l'exponentielle, il faudrait affiner la convergence de la somme de Riemann pour obtenir des termes d'erreurs, ce qui est assez compliqué car on manipule des intégrales doubles. L'équivalent du logarithme est suffisant par exemple pour des calculs d'entropie :

$$\frac{1}{mn} \log(mn) \longrightarrow \frac{1}{2} \int \int_{[0,1] \times [0,1]} \log(4 \cos^2(x\pi) + 4 \cos^2(y\pi)) dx dy$$

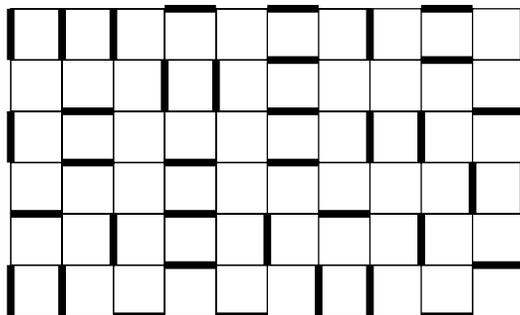
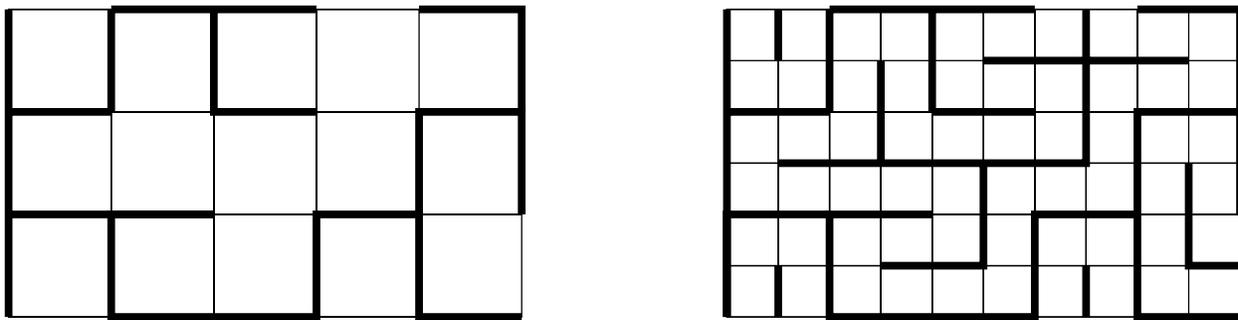


FIG. 9: la bijection de Temperley (cas particulier, le rectangle)

3 Arbres couvrants

3.1 La bijection de Temperley

Dans cette partie on montre qu'à partir d'un graphe planaire donné on peut en construire un deuxième, tel que les couplages parfaits du premier soient en correspondance avec les arbres couvrants du deuxième. Pour bien comprendre on se limitera à l'exemple du rectangle, mais dans le cas général c'est exactement le même principe.

Soit G un graphe planaire, et G' son graphe dual. On considère une représentation dans le plan de $G \cup G'$, et on s'en sert pour définir le graphe H : les sommets de H sont les sommets de G , plus les sommets de G' , plus les points qui sont à l'intersection d'une arête de G et d'une arête de G' . Deux sommets sont voisins si l'un est une intersection de deux arêtes de G et de G' , et l'autre est une extrémité d'une de ces deux arêtes. Ensuite on prend H' égal à H privé du sommet à l'infini de G' et des arêtes liées à ce sommet. Finalement soit K égal à H' privé d'un sommet qui est sur le bord, et des arêtes qui sont liées à ce sommet. Les figures 9 et 10 montrent cette construction dans le cas du rectangle et dans un cas un peu plus général.

Remarque : Le graphe K que l'on vient de construire est biparti. Il suffit de prendre d'une part les sommets de G et de G' , d'autre part les sommets qui proviennent de l'intersection d'une arête de G et d'une arête de G' ; on obtient ainsi une partition de K qui vérifie les conditions requises.

Proposition 4 (bijection de Temperley) *Les arbres couvrants de G sont en bijection avec les couplages parfaits de K .*

Preuve : Les figures 9 et 11 nous montrent comment associer systématiquement un couplage parfait de K à un arbre couvrant de G : on part des feuilles de G et on remonte l'arbre jusqu'à la racine (que l'on prend égale au dernier sommet que l'on a enlevé) en posant des dimères le long du chemin. On fait la même chose en partant des feuilles de l'arbre dual et en remontant jusqu'à la racine (que l'on prend égale à la face à

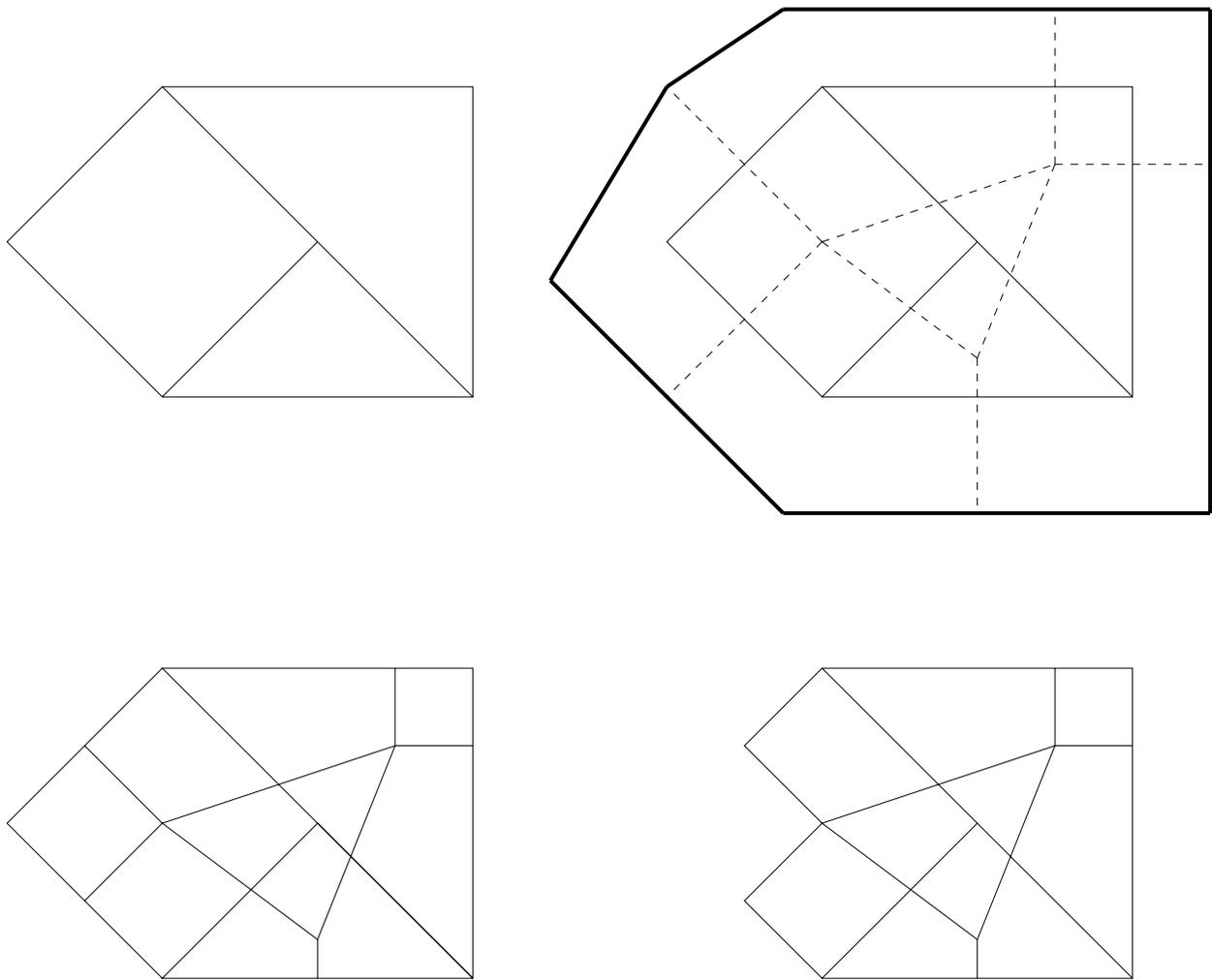


FIG. 10: la bijection de Temperley (cas général), construction du graphe associé

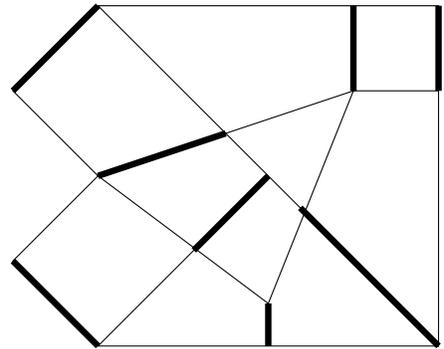
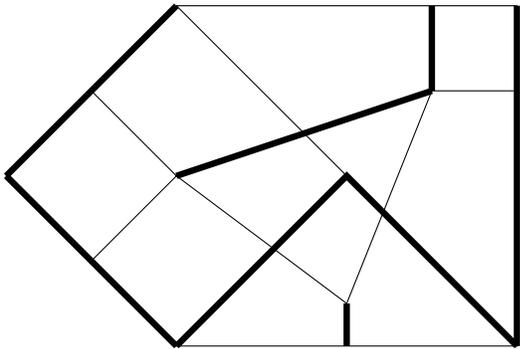
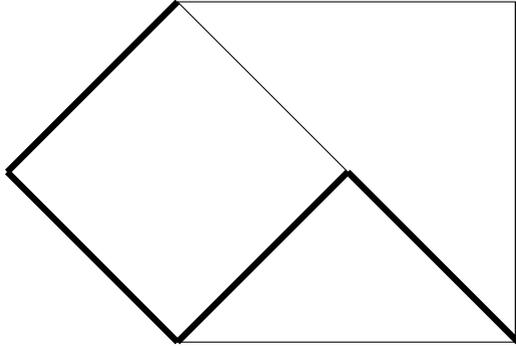


FIG. 11: la bijection de Temperley (cas général) construction du couplage parfait à partir de l'arbre couvrant

l'infini). Il n'est pas difficile de voir qu'on obtient bien un recouvrement par dimères : par construction de K le chemin de la feuille à la racine est de longueur impaire, juste ce qu'il faut pour pouvoir poser des dimères. L'injectivité de la fonction se montre aussi élémentairement : pour retrouver l'arbre duquel on est parti il suffit de partir de la racine et de remonter jusqu'aux feuilles.

À partir d'un couplage parfait de K on peut aussi retrouver l'arbre couvrant de G correspondant. Il suffit en fait de prendre les arêtes de G qui recouvrent un dimère du couplage parfait. Le graphe qu'on obtient recouvre bien tous les sommets, on s'en rend compte assez facilement. Si on suppose qu'il contient un cycle, alors l'intérieur de ce cycle contient un nombre impair de sommets. Mais c'est impossible car le couplage parfait de G' doit induire un couplage parfait de cette région. C'est relativement aisé à voir dans le cas du rectangle, mais cela reste vrai dans le cas général. Pour une preuve précise et détaillée dans le cas général, cf. [3].

Remarque : Si G est un rectangle $m \times m$, alors K est un rectangle $(2m - 1) \times (2n - 1)$ privé d'un sommet (que l'on prend généralement au bord).

Preuve : C'est trivial et cela correspond à la figure 9.

3.2 Dénombrement d'arbres couvrants

Théorème 4 *Le nombre d'arbres couvrants d'un graphe G connexe est égal à n'importe quel cofacteur de la matrice Δ (matrice du Laplacien).*

Preuve : Comme G est connexe, Δ est de rang $n - 1$, et de plus elle est symétrique. On en déduit que Δ' la transposée de sa comatrice est non nulle, symétrique et de rang 1. De plus $\Delta \cdot \Delta' = 0$ donc les vecteurs colonnes de Δ' sont des multiples du vecteur dont tous les coefficients sont égaux (car ce vecteur engendre le noyau de Δ). De tout cela on déduit que tous les cofacteurs de Δ sont égaux, et il suffit de montrer que l'un d'entre eux est égal au nombre d'arbres couvrants.

Définition : On oriente le graphe arbitrairement, et on numérote ses arêtes de 1 à m . On peut alors définir $D = (d_{i,j})$ la *matrice d'incidence* par :

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est à la sortie de l'arête } j \\ -1 & \text{si le sommet } i \text{ est à l'entrée de l'arête } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette matrice est différente de la matrice de Kasteleyn : car pour la matrice d'incidence, on indexe par les sommets (lignes) et les arêtes (colonnes).

Cette matrice vérifie $D \cdot D^t = \Delta$, et donc a le même rang que Δ (i.e. $n - 1$). On a les propriétés suivantes :

Lemme 1 : Toute sous-matrice carrée A de D a un déterminant qui vaut 1, 0 ou -1.

Chaque colonne de D a deux coefficients non nuls, un égal à 1 et l'autre à -1. Si D a deux coefficients non nuls dans chaque colonne, $\det(D) = 0$ car en faisant la somme de ses lignes on obtient le vecteur nul. Si une colonne de D est nulle, clairement $\det(D) = 0$. Il reste le cas où une colonne a un seul coefficient non nul, mais alors en développant le déterminant par cette colonne on se ramène à un déterminant plus petit et on peut conclure par récurrence.

Lemme 2 : soit U un ensemble de $n - 1$ arêtes du graphe G . Alors le déterminant d'une sous-matrice carrée d'ordre $n - 1$ de D , dont les colonnes correspondent aux éléments de U , est inversible si et seulement si U est un arbre couvrant du graphe G .

Supposons que U soit un arbre couvrant, et soit H le graphe dont les sommets sont ceux de G et dont les arêtes sont les éléments de U . Alors A est une sous-matrice de la matrice d'incidence D' de H , qui est de rang $n-1$ et de dimension $n \times (n - 1)$. Comme on sait que chaque vecteur ligne de D' est une combinaison linéaire des $n - 1$ autres, on en conclut que A est de rang $n - 1$, et donc inversible.

Réciproquement supposons que A est inversible. On en déduit que D' est de rang $n - 1$, et donc le laplacien de U aussi. Ceci implique que le graphe U est connexe. D'autre part, on a ainsi que la matrice d'incidence de U a un noyau réduit à 0, en fait cela implique que U est sans cycles (en théorie algébrique des graphes, ce noyau est appelé le sous-espace des cycles). En effet supposons que l'on ait un cycle dans U . On

lui donne une orientation arbitraire. On considère le vecteur indicé par les arêtes de U , dont les coefficients sont égaux à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si l'arête n'appartient pas au cycle.} \\ 1 & \text{si elle est dans le cycle et dans le sens direct.} \\ -1 & \text{si elle est dans le cycle et dans le sens indirect.} \end{cases}$$

Alors ce vecteur serait dans le noyau de la matrice d'incidence; et comme on a vu que celui-ci était nul ce n'est pas possible. Ainsi H est un sous-graphe connexe sans cycle (i.e. un arbre), et comme on sait qu'il a $n - 1$ arêtes cela implique qu'il a n sommets; donc c'est bien un arbre couvrant.

Ainsi en notant D_U la sous-matrice de D dont les lignes correspondent à $n-1$ sommets fixés (les $n - 1$ premiers par exemple), et les colonnes correspondent aux éléments de U , on est déjà en mesure de dire que le nombre d'arbres couvrants de G est égal à :

$$\sum_{\substack{U \text{ ensemble d'arêtes} \\ |U|=n-1}} |\det(D_U)|$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{U \text{ ensemble d'arêtes} \\ |U|=n-1}} \det(D_U) \cdot \det(D_U^t)$$

Sous cette forme on reconnaît immédiatement un développement de déterminant par la formule de Binet-Cauchy; et ceci nous dit que ce nombre est égal au déterminant de $D_0 \cdot D_0^t$, où D_0 est obtenue à partir de D en supprimant la dernière ligne. Ainsi on obtient bien un cofacteur de la matrice $\Delta = D \cdot D^t$, d'où le résultat. Voyons un premier exemple.

Définition : Le graphe complet d'ordre n , noté K_n , est le graphe à n sommet tels que chaque sommet est lié aux $n - 1$ autres. (il n'est pas planaire si n est supérieur à 4). Sa matrice d'adjacence a toutes ses entrées égales à 1, sauf sur la diagonale où on a des 0.

Proposition 5 *Le nombre d'arbres couvrants sur K_n est égal à n^{n-2} .*

Preuve : Le laplacien de K_n est égal à la matrice d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} n-1 & & & (-1) \\ & \ddots & & \\ (-1) & & n-1 & \end{pmatrix}$$

Le nombre cherché est donc égal au déterminant d'ordre $n - 1$:

$$\begin{vmatrix} n-1 & & & (-1) \\ & \ddots & & \\ (-1) & & n-1 & \end{vmatrix}$$

Pour calculer ce déterminant, il suffit d'avoir le polynôme caractéristique de la matrice $(1)_{1 \leq i, j \leq n-1}$ et de l'évaluer en n . Or on peut diagonaliser cette matrice. Il suffit de prendre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

comme matrice de changement de base, ses vecteurs colonnes étant propres. Les valeurs propres étant $n - 1$ d'ordre 1, et 0 d'ordre $n - 2$, son polynôme caractéristique est $X^{n-2} \cdot (X - n + 1)$. D'où le résultat.

Corollaire 3 *Le nombre k d'arbres couvrants de G est égal à :*

$$\frac{1}{n^2} \det(J + \Delta)$$

où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Preuve : On sait que $J\Delta = \Delta J = 0$ et $J^2 = nJ$. Les calculs nous donnent successivement (où on note $\text{adj}(M)$ la transposée de la comatrice de M) :

$$\begin{aligned} \text{adj}(J + \Delta) \cdot \text{adj}(nI - J) &= \text{adj}(n\Delta) \\ \text{adj}(J + \Delta) \cdot n^{n-2} J &= n^{n-1} \text{adj}(\Delta) \\ \text{adj}(J + \Delta) \cdot J &= nkJ \\ (J + \Delta) \cdot \text{adj}(J + \Delta) \cdot J &= (J + \Delta)nkJ \\ \det(J + \Delta) &= n^2 kJ \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Corollaire 4 *k est aussi égal au produit des valeurs propres non nulles de Δ divisé par n .*

Preuve : Comme J et Δ commutent, les valeurs propres de la somme sont les sommes de valeurs propres correspondant à un même vecteur propre. Pour J il y a une seule valeur propre non nulle, n , et le vecteur propre correspondant et le vecteur constant, qui est vecteur propre de Δ pour la valeur propre 0. D'où le résultat.

Proposition 6 *Soit G et H deux graphes à n et m sommets respectivement, A_G et A_H leurs matrices d'adjacence, Δ_G et Δ_H leurs laplaciens. Alors si on ordonne les sommets de $G \times H$ par l'ordre lexicographique, on a :*

$$\Delta_{G \times H} = \Delta_G \otimes I_m + I_n \otimes \Delta_H$$

et :

$$A_{G \times H} = A_G \otimes I_m + I_n \otimes A_H$$

Preuve : Rappelons-nous la définition du graphe-produit. Alors $\Delta_{G \times H}$ se décompose en n blocs carrés indicés par les sommets de G , et chaque bloc est d'ordre m indicé par les sommets de H . Il suffit d'examiner ce qu'il se passe dans chaque bloc et on obtient le résultat facilement pour la matrice d'adjacence. Si on définit une matrice degré D , dont le terme diagonal d'ordre i est le degré du i ème sommet, alors on a une formule semblable qui se vérifie facilement sachant que : $\deg(a, b) = \deg(a) + \deg(b)$. Et il suffit de faire la différence pour avoir le résultat sur le laplacien.

On peut facilement généraliser cette formule pour un produit de plus de deux graphes. Avec G , H et K de cardinaux $m, n, et q$ on trouve :

$$\Delta_{G \times H \times K} = I_{mn} \otimes \Delta_G + I_m \otimes \Delta_H \otimes I_p + \Delta_K \otimes I_{np}$$

L'intérêt de cette expression est que les vecteurs propres et les valeurs propres passent très bien au produit tensoriel. C'est une autre façon de voir le théorème de dérivation d'un produit que l'on a introduit dans le cas du rectangle.

Voyons maintenant le cas des graphes cycliques, par exemple un polygone régulier à n côtés. On le notera G_n . On peut noter ses côtés $0, \dots, n$. D'après ce qui a été fait dans la partie sur le Laplacien dans \mathbb{Z} , si la fonction propre f est périodique de période n , en prenant les classes d'équivalences modulo n on obtient une fonction qui vérifie la même équation : $\Delta(f) = \lambda f$ et c'est le cas lorsqu'on prend $\lambda = \frac{2k\pi}{n}$ avec $1 \leq k \leq n$. Ces valeurs propres ne sont pas a priori 2 à 2 distinctes, mais pour chacune d'entre elles le cosinus et le sinus donnent 2 vecteurs propres indépendants. Ainsi on obtient n fonctions propres pour le laplacien de G_n .

Mais on sait trivialement que le nombre d'arbres couvrants dans ce cas est égal à n . En fait l'intérêt de ce que l'on vient de faire, outre de montrer la formule :

$$n^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

est que l'on peut facilement en déduire des résultats non triviaux. L'idée est que si on a deux graphes avec les fonctions propres de leurs laplaciens, alors les produits de fonctions propres seront des fonctions propres du produit des graphes (Cf. partie sur le Laplacien).

Ainsi avec ce qui précède on peut immédiatement trouver le nombre d'arbres couvrants sur des graphes qui sont des produits de G_n (ces graphes peuvent être plongés dans un tore, mais pas dans le plan, d'où le nom graphe torique; la figure 7 représente G_6^2). Le nombre d'arbres couvrants de $G_m \times G_n$ est :

$$\frac{1}{mn} \prod_{\substack{0 \leq j \leq m-1, 1 \leq k \leq n-1 \\ (j,k) \neq (0,0)}} \left(4 - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{m} \right) - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

Par exemple sur notre graphe torique G_6^2 , on trouve un nombre d'arbres couvrants égal à 587312954081280000. Pour un produit de la forme $G_n \times G_m \times G_p$ on trouve :

$$\frac{1}{mnp} \prod_{\substack{0 \leq j \leq m-1, 1 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq l \leq p-1, (j,k,l) \neq (0,0,0)}} \left(6 - 2 \cos \left(\frac{2j\pi}{m} \right) - 2 \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) - 2 \cos \left(\frac{2l\pi}{p} \right) \right)$$

Et on généralise facilement à un nombre quelconque d'indices, même si les formules deviennent rapidement assez grosses. Ainsi on peut conclure en disant que sur les tores, où l'on a pas d'effets de bords, on peut faire des calculs exacts en dimension quelconque assez facilement.

Références

- [1] **P.W. Kasteleyn**, *The Statics of dimers on a lattice, I, The number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, Physica, volume 27 (1961), pp. 1209-1225
- [2] **N. Biggs**, *Algebraic graph theory, second edition*, Cambridge University Press (1993), chapitres 5-6.
- [3] **R.W. Kenyon, J.G. Propp, D.B. Wilson**, *Trees and matchings*, The electronic journal of combinatorics 7 (2000), disponible sur le web.