

Le modèle de dimères

Adrien Kassel

Novembre 2009

Table des matières

1	Prélude combinatoire	2
2	Définition du modèle	3
3	Le cas des graphes bipartis	5
4	Surfaces aléatoires : exemple du modèle de dimères sur un graphe plan, biparti et Z^2-périodique	7
5	Le cas de graphes plans plus généraux	11
6	Le modèle de dimères sur des graphes tracés sur des surfaces de genre plus élevé	11
7	Lien avec d'autres modèles de physique statistique	12
8	Comportements limites	13

Introduction

L'objet de la physique statistique est de comprendre les systèmes complexes constitués d'un grand nombre d'objets interagissant entre eux. Pour cela, on suppose connue une évolution aléatoire à l'échelle microscopique et on observe des quantités macroscopiques définies à l'aide de procédés de moyenne. Deux types de résultats se présentent. La moyenne peut converger vers une quantité déterministe. C'est le cas par exemple de la pression d'un gaz. Mais la grandeur limite peut aussi être elle-même sujette à des fluctuations aléatoires que l'on cherche alors à décrire. Le *modèle de dimères* est un modèle de physique statistique. Il est apparu pour la première fois dans les années 1960 avec les travaux de physiciens tels que Kasteleyn, Temperley et Fisher sur les quasi-cristaux, pour modéliser l'adsorption de molécules diatomiques sur un cristal. Kasteleyn explique dans [21] qu'il souhaite comprendre la physique des quasi-cristaux et de l'état liquide en les modélisant par des configurations de monomères, de dimères et de polymères d'ordre plus élevé sur des graphes en dimension 2 et 3. Il ne parvient cependant à donner une description de ce modèle que dans le cas où les polymères sont des dimères. Les résultats qu'il obtient sont particulièrement frappants et c'est ainsi qu'émerge ce qu'on appelle maintenant le modèle de dimères. Depuis, beaucoup de progrès ont été réalisés dans la compréhension de

ce modèle, tant de la part de physiciens que de mathématiciens. Le modèle de dimères apparaît aujourd'hui dans de nombreux domaines, à l'interface entre la physique statistique (comportement des cristaux en solution, modèles de croissance), les probabilités (modèle d'Ising, modèles de chemins aléatoires, matrices aléatoires, TASEP, processus déterminantaux), l'informatique théorique (combinatoire de chemins et de tableaux de Young) et la géométrie (surfaces aléatoires). Nous présentons ici une introduction au modèle de dimères et aux résultats importants de la théorie. L'avantage de ce modèle est qu'il est l'un des rares modèles de physique statistique exactement résoluble, ce qui signifie qu'il est possible de calculer par des formules explicites la plupart des grandeurs d'intérêt (fonction de partition, entropie, exposants critiques, statistiques locales). C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles il apparaît dans de nombreux domaines comme nous le verrons plus loin.

Remerciements

Je remercie Wendelin Werner de m'avoir aidé à affiner mes goûts mathématiques et de m'avoir orienté vers Richard Kenyon. Merci à Richard Kenyon de m'avoir encadré dans la découverte du modèle de dimères. Merci aussi à Béatrice de Tilière pour le beau cours qu'elle a donné à l'IHP en octobre 2009. Enfin je remercie très vivement Cédric Boutillier qui a toujours été très disponible pour répondre à mes questions et dont l'enthousiasme constant et communicatif a accru le plaisir que j'ai eu à découvrir les mathématiques présentées dans la suite de ce texte.

1 Prélude combinatoire

Dans cette partie, nous nous intéressons à la question suivante. Étant donné un échiquier ordinaire de taille 8×8 et une boîte de 32 dominos rectangulaires identiques de taille 1×2 , nous nous demandons de combien de manières différentes il est possible de recouvrir l'échiquier à l'aide des dominos. La solution que nous présentons ici est une simplification due à Percus [34], puis à Kenyon [28] d'une idée de Kasteleyn [21]. Numérotions les cases noires et blanches. Soit $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ l'ensemble des cases blanches et $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ l'ensemble des cases noires. Tout recouvrement de l'échiquier par les dominos définit une bijection entre W et B que l'on peut identifier, *via* la numérotation des cases, à une unique permutation $\sigma \in S_n$. Introduisons maintenant la matrice $K = (K_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$K_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{-1} & \text{si } w_i \text{ et } b_j \text{ sont adjacentes et forment ensemble un rectangle horizontal,} \\ 1 & \text{si } w_i \text{ et } b_j \text{ sont adjacentes et forment ensemble un rectangle vertical,} \\ 0 & \text{si } w_i \text{ et } b_j \text{ ne sont pas adjacentes.} \end{cases}$$

Le déterminant de K s'écrit

$$\det(K) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n K_{i,\sigma(i)}.$$

Par définition de K , les contributions non nulles de cette somme correspondent exactement aux bijections $\sigma \in S_n$ codant un recouvrement par des dominos. Comme chaque terme de la somme est de module 1, il suffit de montrer que tous les termes ont le même argument pour conclure que le nombre de recouvrements vaut $|\det(K)|$. Pour le voir, considérons

deux recouvrements par des dominos, le premier par des dominos verts, représenté par une bijection σ et le deuxième par des dominos rouges, représenté par une bijection τ . Il est possible de donner une interprétation géométrique de la permutation $\sigma\tau^{-1}$. Superposons les deux recouvrements. Ceci fait apparaître des cycles alternés de dominos verts et rouges et des doubles dominos, c'est-à-dire une superposition d'un domino vert et d'un domino rouge. Ceci définit une décomposition de l'échiquier en cycles de cases adjacentes. On définit une bijection de B de la manière suivante. Une case noire est laissée fixe si elle appartient à un double domino ; si elle appartient à un cycle alterné de dominos, elle est envoyée sur la case noire voisine dans le cycle, dans la direction indiquée par le domino rouge qui la contient. Vue comme un élément de S_n , cette bijection n'est autre que $\sigma\tau^{-1}$, les cycles alternés en représentant les cycles et les doubles dominos, les points fixes. Pour passer d'un recouvrement à l'autre, il suffit de faire tourner les dominos autour de chaque cycle. En effectuant un raisonnement par récurrence sur le nombre de cycles de $\sigma\tau^{-1}$, on se ramène à traiter le cas où $c = \sigma\tau^{-1}$ est un cycle. Notons $c = (j_1 \cdots j_k) \in S_n$ et soit $(w_{i_1} b_{j_1} \cdots w_{i_k} b_{j_k})$ le cycle de cases correspondant. On veut montrer que

$$\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n K_{i,\sigma(i)} = \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n K_{i,\tau(i)}.$$

Ceci revient à montrer que

$$(-1)^{k-1} \prod_{l=1}^k K_{i_l, j_l} = \prod_{i=l}^k K_{i_l, j_{l-1}},$$

que l'on obtient facilement par récurrence sur le nombre de cases entourées par le cycle. Pour calculer ce déterminant, on diagonalise K et on trouve que le nombre de recouvrements vaut

$$|\det(K)| = \left(\prod_{j=1}^8 \prod_{k=1}^8 \left(2 \cos\left(\frac{\pi j}{9}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi k}{9}\right) \right) \right)^{1/2} = 12988816.$$

En étendant la méthode, on trouve que le nombre de recouvrements par des dominos d'un échiquier rectangulaire de taille $m \times n$ vaut

$$\left(\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(2 \cos\left(\frac{\pi j}{m+1}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) \right) \right)^{1/2}.$$

D'après cette formule on voit que le nombre de recouvrements d'un échiquier rectangulaire croît exponentiellement avec l'aire mn de l'échiquier comme on pouvait le voir à l'aide d'un argument simple de sous-additivité. Plus précisément, la croissance du nombre de recouvrements est donnée par $e^{Gmn/\pi + O(m+n)}$, où $G = 1 - 3^{-2} + 5^{-2} \dots$ est la *constante de Catalan*. Ceci s'obtient en transformant le produit de valeurs propres apparaissant dans le calcul en une somme de Riemann qui converge vers $G = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$. Nous reviendrons plus en détails sur ces calculs au paragraphe 4.

2 Définition du modèle

Considérons un graphe fini $G = (V, E)$ et une fonction $\nu : E \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ à valeurs réelles strictement positives sur les arêtes, appelée *fonction de poids* du système. On appelle *configuration de dimères* la donnée d'un ensemble d'arêtes disjointes tel que tout sommet de G

soit l'extrémité d'une de ces arêtes. On appelle *espace des configurations de dimères*, et on note $\mathcal{M}(G)$, l'ensemble des configurations de dimères. On définit une mesure de probabilité P sur $\mathcal{M}(G)$, appelée *mesure de Boltzmann*, en associant à toute configuration m une probabilité proportionnelle au produit des poids de ses arêtes. On a donc

$$P(m) = \frac{1}{Z} \prod_{e \in m} \nu(e),$$

pour tout $m \in \mathcal{M}(G)$, où

$$Z = \sum_{m \in \mathcal{M}} \prod_{e \in m} \nu(e)$$

est la *fonction de partition* du système.

Une présentation légèrement différente et plus proche du formalisme de la physique consiste à introduire la notion d'énergie. L'*énergie* \mathcal{E} est une fonction à valeurs réelles sur les arêtes de G . L'énergie d'une configuration m est $\mathcal{E}(m) = \sum_{e \in m} \mathcal{E}(e)$ et la mesure de Boltzmann est alors définie par $P(m) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{E}(m)}$. L'équivalence entre fonction de poids et énergie est donnée par la formule $\mathcal{E}(e) = -\log \nu(e)$.

Si le graphe est planaire, on peut définir son graphe dual. On appelle *complexe dual* du graphe G le complexe constitué du graphe dual et de ses faces à l'exception de la face extérieure non bornée. Un pavage du complexe dual est un recouvrement de ce complexe par des tuiles obtenues en réunissant deux faces adjacentes. Il est facile de voir qu'à toute configuration de dimères sur G correspond un unique pavage de son complexe dual. Le modèle de dimères sur un graphe plan peut donc aussi être vu comme un modèle de pavage aléatoire. Un exemple en est le pavage de l'échiquier par des dominos présenté plus haut.

2.1 Calcul de la fonction de partition

Le grand avantage du modèle de dimères est qu'il peut se résoudre explicitement. En particulier on peut calculer la fonction de partition, ce qui est un problème difficile en général pour les modèles de physique statistique. La solution à ce problème a été apportée indépendamment par Kasteleyn [21] et Temperley et Fisher [16] en 1961. Bien qu'une formule explicite existe, elle dépend néanmoins de la topologie du graphe. Dans tous les cas, il est fait usage de la matrice suivante. On suppose le graphe orienté. Définissons la *matrice de Kasteleyn* $K = (K_{i,j})$ du système par

$$K_{i,j} = \begin{cases} \nu(w_i, b_j) & \text{si l'arête orientée reliant } w_i \text{ à } b_j \text{ est présente dans la configuration,} \\ -\nu(w_i, b_j) & \text{si l'arête orientée reliant } b_j \text{ à } w_i \text{ est présente dans la configuration,} \\ 0 & \text{si } w_i \text{ et } b_j \text{ ne sont pas reliés dans la configuration.} \end{cases}$$

Intéressons-nous tout d'abord au cas d'un graphe plan. Une *orientation de Kasteleyn* est une orientation du graphe telle que pour tout cycle, le nombre d'arêtes orientées d'un sommet noir vers un sommet blanc soit impair si la longueur du cycle est congrue à 0 modulo 4 et pair si cette longueur est congrue à 2 modulo 4. Un graphe possède une orientation de Kasteleyn si et seulement s'il vérifie une certaine condition géométrique. En particulier si le graphe est plan, l'orientation existe toujours (on utilise l'existence d'un arbre couvrant). Un graphe est *biparti* si ses sommets peuvent être séparés en deux classes, les sommets noirs et les sommets blancs, de telle sorte que tous les voisins d'un sommet

blanc soient noirs et que tous les voisins d'un sommet noir soient blancs. Dans le cas biparti, un raisonnement analogue à celui qui est expliqué dans le préluce combinatoire, et qui est en fait une simplification du raisonnement de Kasteleyn [21] due à Percus [34], permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. *Si le graphe plan, fini, biparti G est orienté selon une orientation de Kasteleyn, alors la fonction de partition du système est donnée par le déterminant de la matrice de Kasteleyn :*

$$Z(G) = |\det(K)|.$$

Dans le cas général (où G n'est pas nécessairement biparti), la fonction de partition du système s'exprime à l'aide d'un autre objet, le *pfaffien*. Le pfaffien d'une matrice antisymétrique A de taille $2n \times 2n$ est défini par

$$\text{pfaff}(A) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{2n} \\ \forall i, \sigma(2i-1) < \sigma(2i)}} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}.$$

En 1952, Kac et Ward [20] ont retrouvé de manière «combinatoire» le résultat d'Onsager (1944) pour la fonction de partition du modèle d'Ising en dimension 2. Kasteleyn dit s'être inspiré de cette méthode pour établir qu'un pfaffien correspond à une somme pondérée sur des configurations de dimères. En choisissant ensuite une orientation convenable, il obtint le théorème suivant [21].

Théorème 2. *Soit G un graphe plan, fini, orienté selon une orientation de Kasteleyn. Alors*

$$Z(G) = |\text{pfaff}(A)|,$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ {}^tK & 0 \end{pmatrix}.$$

Kasteleyn s'intéressa aussi au calcul de $Z(G)$ pour des graphes tracés sur des surfaces de genre $g \geq 1$. Il obtint dans [22] une formule dans le cas du tore et mentionna que pour le genre g , la fonction de partition est une somme de 2^{2g} pfaffiens. Ce résultat n'a été démontré qu'en 1999 par Galluccio et Loebl [17].

3 Le cas des graphes bipartis

Les calculs se simplifient dans le cas où le graphe est biparti. En particulier le «processus ponctuel» sur les arêtes canoniquement associé au modèle de dimères est déterminantal. Cela veut dire que l'on peut exprimer les probabilités d'apparition d'un ensemble fini d'arêtes disjointes prescrites (appelé *motif fini*) dans une configuration aléatoire de dimères comme le mineur d'une matrice, appelée *noyau* du processus. Ce résultat a été démontré par Kenyon en 1997 dans [23] et fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 3. *Pour tout $k \geq 1$ et tout $(e_1, \dots, e_k) \in E^k$ on a*

$$P(e_1 \in m, \dots, e_k \in m) = \prod_{i=1}^k \left| K(w_i, b_i) \det K^{-1}(w_i, b_j) \right|.$$

Ce résultat est extrêmement puissant car il permet d'exprimer la probabilité d'apparition d'un motif fini à l'aide d'une sous-matrice finie de l'inverse de K . En particulier, pour démontrer des résultats de convergence lors de passage à la limite continue (voir § 8), il suffit de démontrer la convergence des coefficients de K^{-1} . Toute la difficulté réside alors dans le calcul de K^{-1} , ce qui peut être rendu plus aisé par le recours aux symétries du graphe.

Un autre avantage des graphes bipartis est qu'ils donnent la possibilité de définir une représentation d'une configuration de dimères en termes de fonction de hauteur.

3.1 Fonction de hauteur

On suppose ici que le graphe G est planaire. On définit une fonction à valeurs entières sur les faces du graphe de la manière suivante. À toute configuration de dimères sur G on peut associer un flot sur le graphe tel que chaque sommet blanc est une source et chaque sommet noir un puits. L'intensité du flot vaut 1 sur les arêtes qui appartiennent à la configuration de dimères et 0 sinon. Fixons une configuration de référence m_0 . Pour toute autre configuration m , nous définissons sa fonction de hauteur de la manière suivante. On considère une face de référence f_0 à laquelle on associe une valeur entière arbitraire. Pour toute autre face f , on considère un chemin γ dans le dual, reliant f_0 à f , et on attribue à f la valeur de l'intégrale du flot $\omega - \omega_0$ le long de γ . Comme le flot $\omega - \omega_0$ est de divergence nulle, l'intégrale ne dépend pas de γ . Il s'agit bien d'une fonction de la face et on l'appelle *fonction de hauteur*. La fonction de hauteur est ainsi définie de manière unique à un entier près.

Si l'on voit le modèle comme un modèle de pavage, le graphe de la fonction de hauteur peut être vu comme une surface discrète au-dessus du complexe dual de G . La hauteur définit le pavage de ce complexe et vice versa. Pour une région plane simplement connexe D , les valeurs prises par la fonction de hauteur sur le bord ∂D du domaine sont indépendantes du pavage et ne dépendent que de la forme de ∂D . Le graphe de la fonction de hauteur peut donc être vu comme une surface discrète au-dessus de D s'appuyant sur un contour fixe dans \mathbf{R}^3 . Dans le cas où le graphe sous-jacent est une partie du réseau hexagonal, la représentation géométrique de cette surface est particulièrement éclairante. En effet, un pavage du réseau triangulaire peut être vu comme la projection orthogonale selon la direction $(1, 1, 1)$ d'une surface décroissante en les deux coordonnées dessinée dans \mathbf{N}^3 . De façon imagée, un pavage correspond à l'image sans perspective qu'on a en le regardant selon l'axe $(1, 1, 1)$, d'un empilement de cubes de côté 1 dans le coin d'une pièce (modélisé ici par l'origine et les trois axes de coordonnées). C'est d'ailleurs dans ce cas que la notion de fonction de hauteur a été introduite pour la première fois ; nous en parlons maintenant.

La notion de fonction de hauteur a tout d'abord été introduite pour comprendre le problème de dimères d'un point de vue purement combinatoire. Le but était de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le graphe pour que des configurations de dimères existent effectivement et le cas échéant de donner un algorithme pour en construire. Le nombre de configurations de dimères est en fait une quantité très sensible à la forme du graphe. Pour certains, il n'y en a pas ; pour d'autres il n'y en a qu'une et pour d'autres encore il y en a une fonction exponentielle du nombre de sommets. C'est donc un problème compliqué que de répondre à ces questions. Néanmoins, dans le cas de réseaux réguliers du plan, on peut appréhender le problème en utilisant le formalisme de la théorie combinatoire des groupes. Prenons l'exemple du réseau hexagonal plan. Un recouvrement de dimères sur une portion de ce graphe peut être identifié avec un pavage par des losanges d'une portion

du réseau triangulaire plan. Trois types d'arêtes apparaissent. On les oriente et on les étiquette par a , b et c et les arêtes opposées par a^{-1} , b^{-1} et c^{-1} . Le réseau triangulaire apparaît alors comme un plongement dans le plan du graphe de Cayley du groupe $R = \langle a, b, c \mid abc = 1, cba = 1 \rangle$ appelé *groupe du réseau*. Dorénavant, tout lacet dans le plan sera identifié dans le groupe libre à trois générateurs $F = \langle a, b, c \rangle$ avec le mot obtenu en concaténant les lettres lues le long du lacet. Ainsi, les trois types de losanges pouvant être utilisés dans le pavage, appelés *tuiles*, correspondent aux mots $aba^{-1}b^{-1}$, $cac^{-1}a^{-1}$ et $bc b^{-1}c^{-1}$. On introduit le quotient intermédiaire entre le groupe libre et le groupe du réseau, appelé *groupe de pavage*, comme le quotient du groupe libre par les tuiles $P = \langle a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1} = cac^{-1}a^{-1} = bc b^{-1}c^{-1} = 1 \rangle = \mathbf{Z}^3$. En 1990, Thurston explique dans [40] qu'une condition nécessaire pour l'existence d'un pavage dans une région finie D dans le réseau triangulaire délimitée par un lacet correspondant à un mot $\pi \in F$ est que son image dans $P = \mathbf{Z}^3$ soit triviale. D'un point de vue géométrique, écrire le mot π dans R correspond à relever la courbe ∂D du bord de D en une courbe h dans \mathbf{Z}^3 . La condition de trivialité signifie que cette courbe doit se refermer sur elle-même. Bien sûr cette condition n'est pas suffisante. Introduisons la notion de distance sur le graphe du réseau. Soit v et w deux sommets de R . On définit $d(v, w)$ comme étant la longueur minimale d'un chemin orienté reliant v à w . Supposons qu'un pavage de D existe. Soit h la fonction de hauteur obtenue en relevant la courbe π dans \mathbf{Z}^3 , convenablement renormalisée pour être à valeurs entières. On voit qu'elle vérifie l'inégalité

$$h(w) - h(v) \geq d(v, w),$$

pour tous sommets v et w . Une condition nécessaire sur π est donc que cette inégalité soit vérifiée sur le bord du domaine. En fait ceci est aussi une condition suffisante, et si elle est vérifiée, la fonction définie par

$$h(x) = \min_{v \in \pi} \{d(v, x)\},$$

est une fonction de hauteur (de hauteur maximale) qui détermine donc un pavage. Cette condition nécessaire et suffisante fournit de surcroît un algorithme pour construire le cas échéant une fonction de hauteur, donc un pavage. L'algorithme se ramène donc à celui de la recherche d'une plus courte distance dans un graphe fini orienté. Fournier [15] mentionne que la complexité de cet algorithme est $O(n^{3/2})$, où n est le nombre de sommets du graphe.

Plusieurs travaux en informatique théorique portent sur des questions liées aux fonctions de hauteur. On peut s'intéresser à la complexité des algorithmes permettant de trouver une configuration de dimères, et aussi à la manière dont on peut, partant d'un pavage de départ, engendrer tous les pavages à l'aide d'opérations élémentaires. Dans le cas du réseau hexagonal, cela revient à partir d'une pièce vide et à finir avec une pièce contenant une pile de cubes, en ajoutant les cubes un à un.

4 Surfaces aléatoires : exemple du modèle de dimères sur un graphe plan, biparti et \mathbf{Z}^2 -périodique

Plusieurs domaines de recherche s'intéressent à la géométrie de surfaces aléatoires. Ce peut être d'un point de vue abstrait comme dans [2] qui étudie des surfaces gaussiennes ayant une fonction de covariance assurant une régularité presque sûre de la surface permettant l'emploi de techniques de géométrie différentielle. Ceci s'inscrit dans la tradition de

la *géométrie intégrale* et possède aujourd'hui des applications dans de nombreux domaines d'applications comme en imagerie médicale. Un autre domaine est celui de l'étude des *interfaces aléatoires* apparaissant dans des modèles de physique statistique comme le modèle d'Ising par exemple. Il est en général très difficile de résoudre de manière exacte ce type de problèmes. On pourra consulter les travaux autour du cristal de Wulff dans le modèle d'Ising dans [8]. Les modèles SOS (solid-on-solid) sont d'autres modèles couramment utilisés pour modéliser des surfaces de cristaux. Le modèle de dimères sur un graphe biparti est un cas particulier de tels modèles de surfaces aléatoires. En effet le graphe de la fonction de hauteur peut être vu comme une surface aléatoire discrétisée. Ce modèle possède l'avantage d'être exactement résoluble. En 2003, R. Kenyon, A. Okounkov et S. Sheffield ont donné dans [29] une description exhaustive de la physique des surfaces aléatoires du modèle de dimères sur un graphe plan, biparti et \mathbf{Z}^2 -périodique.

Dans la suite de cette partie, on suppose que G est un graphe plan, biparti et \mathbf{Z}^2 -périodique. La définition de configuration de dimères est la même que dans le cas d'un graphe fini. On note toujours $\mathcal{M}(G)$ l'espace de configuration de dimères et ν une fonction de poids sur les arêtes.

4.1 Mesures de Gibbs

Comme le graphe est désormais supposé infini, il n'est pas immédiat de savoir comment définir une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(G)$. Pour cela on a recours à la définition suivante. Une *mesure de Gibbs* est une mesure de probabilité sur $\mathcal{M}(G)$ telle que pour toute région annulaire finie H de G , on ait l'indépendance des lois conditionnelles des configurations de dimères à l'intérieur et à l'extérieur de H sachant quelle est la configuration sur H . De plus, la probabilité conditionnelle d'une configuration de dimères à l'intérieur de H est la mesure de Boltzmann définie plus haut. Il n'est pas clair que de telles mesures existent ni facile de savoir comment en construire explicitement s'il y en a.

Comme on étudie les mesures sur un graphe périodique, il est naturel de s'intéresser aux mesures qui sont invariantes et ergodiques sous l'action de \mathbf{Z}^2 . Une mesure μ est *invariante* par \mathbf{Z}^2 si pour tout événement A , et toute translation $T \in \mathbf{Z}^2$, les probabilités de A sous μ et sous $T * \mu$ sont égales. La mesure est de plus *ergodique* si pour tout $T \in \mathbf{Z}^2$, les seuls événements qui sont invariants par l'action de T sont les événements de probabilité 0 ou 1.

L'objet de la suite de cette partie est de décrire les mesures de Gibbs ergodiques existantes et de décrire pour chacune d'entre elles les statistiques locales du modèle, c'est-à-dire les probabilités d'apparition de certains motifs finis dans une configuration aléatoire de dimères.

4.2 Suite exhaustive de tores et polynôme caractéristique

Afin d'exploiter au mieux la périodicité du graphe, on introduit, pour tout entier n , le graphe G_n comme étant le quotient de G par l'action de $n\mathbf{Z}^2$. Il s'agit d'un graphe biparti fini plongé dans un tore. Construisons maintenant une modification «magnétique», notée $K(z, w)$, de la matrice de Kasteleyn. Soit γ_x (resp. γ_y) un chemin orienté dans le dual de G_1 qui tourne une fois horizontalement (resp. verticalement) autour du tore. Multiplions le poids de chaque arête que traverse γ_x par un facteur z ou z^{-1} selon que le sommet noir est à droite ou à gauche de l'arête. On multiplie selon la même règle le poids des arêtes traversées par γ_y par un facteur $w^{\pm 1}$. Le *polynôme caractéristique* est défini par

$P(z, w) = \det K(z, w)$. La fonction de partition du système peut être exprimée à l'aide du polynôme caractéristique par la formule

$$Z = \frac{1}{2}(-P(1, 1) + P(1, -1) + P(-1, 1) + P(-1, -1)).$$

Le résultat suivant découle de considérations sur la réduction de l'endomorphisme associé à la matrice de Kasteleyn et du fait que cette matrice commute avec les opérateurs de translation.

Théorème 4. *Soit P_n le polynôme caractéristique de G_n . Alors*

$$P_n(z, w) = \prod_{z_0^n=z} \prod_{w_0^n=w} P(z_0, w_0).$$

4.3 Fonction de hauteur et pente

Soit μ une mesure de Gibbs ergodique sur $\mathcal{M}(G)$. Soit h une fonction de hauteur sur G (définie de manière unique *modulo* une constante). On définit la *pente* de μ comme le couple (s, t) , où $s = \mathbf{E}(h(v + (1, 0)) - h(v))$ et $t = \mathbf{E}(h(v + (0, 1)) - h(v))$. Notons μ_n la mesure de Boltzmann sur $\mathcal{M}(G_n)$. Il est possible de définir une fonction de hauteur sur un tore, comme une fonction multivaluée ayant deux périodes, une horizontale, notée h_x et une verticale, notée h_y . Pour tout $(s, t) \in \mathbf{R}^2$, notons $\mathcal{M}_{s,t}(G_n)$ l'ensemble des configurations de dimères sur le tore G_n dont la fonction de hauteur a pour périodes $([ns], [nt])$. Pour les valeurs $(s, t) \in \mathbf{R}^2$ pour lesquelles $\mathcal{M}_{s,t}(G_n)$ est non vide, on définit la mesure conditionnelle $\mu_n(s, t)$ induite par μ_n sur $\mathcal{M}_{s,t}(G_n)$.

Le premier pas vers la classification des mesures de Gibbs ergodiques est un théorème dû à Sheffield [38] qui énonce qu'à toute pente (s, t) il correspond une et une seule mesure de Gibbs ergodique $\mu_{s,t}$ si et seulement si $\mathcal{M}_{s,t}(G_n)$ est non vide pour n suffisamment grand. Cette mesure est la limite des mesures $\mu_n(s, t)$.

4.4 Classification des mesures de Gibbs ergodiques

La classification exhaustive de la famille à deux paramètres réels des mesures de Gibbs ergodiques identifiée par Sheffield est donnée par le théorème suivant [29]. Rappelons que le *polygone de Newton* d'un polynôme $\sum_{p,q} a_{p,q} z^p w^q$ est l'enveloppe convexe dans \mathbf{R}^2 de l'ensemble fini des points à coordonnées entières (p, q) tels que $a_{p,q} \neq 0$.

Théorème 5. *Soit P le polynôme caractéristique du modèle de dimères et $N(P)$ son polygone de Newton. Pour tout $(s, t) \in N(P)$, il existe une unique mesure de Gibbs ergodique $\mu_{s,t}$ de pente (s, t) . Réciproquement, la pente de toute mesure de Gibbs ergodique est dans $N(P)$.*

4.5 Coordonnées magnétiques

La démonstration du théorème 5 de classification des mesures de Gibbs ergodiques fait apparaître les mesures $\mu_{s,t}$ comme des limites de mesures conditionnelles $\mu_n(s, t)$ sur $\mathcal{M}(G_n)$. Les mesures conditionnelles sont des objets difficiles à manipuler ; c'est pourquoi l'on a recours à l'astuce suivante. On introduit des coefficients complexes B_x et B_y que l'on ajoute de manière appropriée aux valeurs de l'énergie sur les arêtes. Par un bon choix de B_x et B_y , la mesure de Boltzmann perturbée sur G_n est égale à la mesure conditionnelle

$\mu_n(s, t)$. On appelle *coordonnées magnétiques* le couple (B_x, B_y) , en raison du fait que du point de vue physique, l'énergie du système se trouve modifiée comme si ce dernier avait été plongé dans un champ magnétique qui aurait tendance à favoriser les configurations d'une certaine pente. Il est possible d'expliciter le lien entre les coordonnées magnétiques (B_x, B_y) et la pente (s, t) de toute mesure de Gibbs ergodique à l'aide de la *fonction de Ronkin* du polynôme caractéristique P , définie par

$$R(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \log |P(e^x z, e^y w)| \frac{dz}{z} \frac{dw}{w}.$$

Par abus de notation, on note encore μ_{B_x, B_y} la mesure obtenue par ajout du champ magnétique (B_x, B_y) . La pente (s, t) de la mesure μ_{B_x, B_y} est la valeur en (B_x, B_y) du gradient de la fonction de Ronkin.

4.6 Statistiques locales

Avant la synthèse effectuée dans [29], Burton et Pemantle avaient montré dans [5] l'existence d'une mesure de Gibbs ergodique sur $\mathcal{M}(\mathbf{Z}^2)$ appelée *mesure de Burton et Pemantle*, et notée μ_{BP} . Il s'agit en fait de l'unique mesure de Gibbs ergodique d'entropie maximale. C'est la mesure $\mu_{(s_0, t_0)}$ dont la pente est la limite des pentes des mesures μ_n et correspond à un champ magnétique (B_x, B_y) nul. Kenyon [23] a ensuite montré que cette mesure est déterminantale et exprimé le noyau à l'aide d'une intégrale sur le tore, par la formule

$$P(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(x\theta + y\phi)} d\theta d\phi}{2 \cos(\theta) + 2i \cos(\phi)}.$$

Dans [29], les auteurs étendent le résultat à toutes les mesures de Gibbs ergodiques et obtiennent le théorème suivant.

Théorème 6. *Soient μ_{B_x, B_y} une mesure de Gibbs ergodique et $e_1 = w_1 b_1, \dots, e_k = w_k b_k$ des arêtes de G . On a*

$$\mu_{B_x, B_y}(e_1, \dots, e_k) = \left(\prod_{i=1}^k K_{B_x, B_y}(w_i, b_i) \right) \det(K_{B_x, B_y}^{-1}(b_i, w_i)_{1 \leq i, j \leq k}),$$

où K_{B_x, B_y} est la matrice de Kasteleyn associée au graphe G , et si b et w sont dans un même domaine fondamental, on a

$$K_{B_x, B_y}^{-1}(b, w + (x, y)) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{Q_{bw}(e^{B_x} z, e^{B_y} w)}{P(e^{B_x} z, e^{B_y} w)} z^x w^y \frac{dw}{w} \frac{dz}{z},$$

où $Q_{bw}(z, w)$ est le mineur signé de $K_1(z, w)$ d'indice (b, w) .

4.7 Le diagramme de phase

Les phases d'un système physique de particules en interaction sont définies selon l'intensité des corrélations à grande distance entre les particules. La *phase solide* est celle pour laquelle les fluctuations sont uniformément bornées. Un cas particulier en est la *phase gelée* où certaines corrélations à longue distance sont déterministes. La *phase gazeuse* est celle pour laquelle les fluctuations ne sont pas bornées mais les corrélations le sont. Enfin, la *phase liquide* est celle pour laquelle les corrélations croissent vers l'infini avec la distance.

Le modèle de dimères peut être vu comme un système physique de particules en interaction par le biais de la fonction de hauteur. Les particules (fictives) sont situées au-dessus des faces du graphe G et leur altitude est donnée par la fonction de hauteur. Le comportement à grande distance des corrélations entre hauteurs détermine les différentes phases du modèle. De manière équivalente, cette distinction en phase permet de classifier les surfaces aléatoires associées au modèle de dimères selon des propriétés de régularité.

La description de la phase dans laquelle se trouvent les mesures de Gibbs ergodiques μ_{B_x, B_y} est entièrement décrite dans [29]. Avant d'énoncer le théorème il nous faut introduire le concept d'amibe d'un polynôme ; voir [42]. L'*amibe* d'un polynôme complexe à deux variables P , notée $\mathbb{A}(P)$, est l'image de la courbe de \mathbf{C}^2 d'équation $P(z, w) = 0$ par l'application $(z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|)$.

Théorème 7. *Soit P le polynôme caractéristique du modèle de dimères et $\mathbb{A}(P)$ son amibe. La mesure μ_{B_x, B_y} est respectivement gelée, liquide ou gazeuse lorsque le couple de nombres complexes (B_x, B_y) se trouve respectivement dans l'adhérence de la composante non bornée de $\mathbb{A}(P)$, dans l'intérieur de $\mathbb{A}(P)$, ou dans l'adhérence d'une composante bornée du complémentaire de $\mathbb{A}(P)$.*

La compréhension du modèle de dimères, sur un graphe plan, biparti et \mathbf{Z}^2 -périodique, culmine avec ce théorème. Les auteurs de [29] calculent encore différentes quantités d'intérêt comme l'entropie.

5 Le cas de graphes plans plus généraux

Le cas du modèle de dimères sur des graphes non bipartis est moins bien compris pour l'instant. La grande différence avec le cas biparti, c'est qu'il n'est plus toujours possible de définir une fonction de hauteur. Mais le modèle est néanmoins étudié.

6 Le modèle de dimères sur des graphes tracés sur des surfaces de genre plus élevé

Le modèle de dimères est très naturellement étudié sur un tore, même pour comprendre le cas plan, parce que les calculs s'y simplifient grandement. En effet, la périodicité d'un graphe sur un tore entraîne la commutation des translations avec l'opérateur de Kasteleyn, ce qui permet de le diagonaliser explicitement et de calculer ainsi son déterminant. Mais l'étude de modèle de dimères en genre plus élevé a des significations (physiques et mathématiques) bien plus profondes et ne sert pas uniquement à rendre les calculs plus simples par un bon choix de conditions au bord. De nombreux travaux ont été effectués dans ce domaine, notamment par Kuperberg, Galluccio, Loebl, Tesler, Cimasoni, Reshetikhin, . . . On pourra se reporter à [11] pour un historique et une démonstration du théorème suivant, qui vise à établir un lien entre les orientations de la matrice de Kasteleyn et les *structures de spin* sur la surface, notion qui apparaît en théorie quantique des champs ; voir aussi [1].

Théorème 8. *Soit G un graphe fini plongé dans une surface de genre g . Notons S_g l'ensemble des structures de spin de la surface. Alors la fonction de partition du modèle vaut*

$$Z(G) = \frac{1}{2^g} \sum_{\xi \in S_g} (-1)^{Arf(\xi)} \text{pfaff}(A_\xi),$$

où A_ξ est une matrice de Kasteleyn convenablement orientée (selon l'orientation de Kasteleyn correspondant à la structure ξ) et où $\text{Arf}(\xi)$ désigne l'invariant de Arf de la forme quadratique associée à ξ .

Cette formule n'a un intérêt pratique que si l'on peut plonger le graphe dans une surface de genre suffisamment faible. Un article très récent de Cimasoni [10] établit une interprétation plus géométrique de ce résultat en reliant de manière explicite le modèle de dimères sur un graphe G , qui est le 1-squelette d'une 2-cellulation d'une surface Σ , et une version discrète de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur Σ dans le cas où G possède une structure conforme, c'est-à-dire est isoradial. Ce résultat représente un pas de plus dans la compréhension de ce modèle de physique statistique sur une surface de Riemann quelconque et laisse espérer une meilleure compréhension du lien entre géométrie des surfaces et propriétés probabilistes des modèles de mécanique statistique vivant sur ces surfaces.

7 Lien avec d'autres modèles de physique statistique

7.1 Les arbres couvrants sur un graphe

Temperley a observé en 1972 que le nombre d'arbres couvrants d'un quadrillage rectangulaire de taille $m \times n$ était asymptotiquement du même ordre que le nombre de configurations de dimères sur un quadrillage rectangulaire de taille $(2m+1) \times (2n+1)$; voir [35]. En 1974, dans [36], il montre l'existence d'une bijection entre l'ensemble des arbres couvrants sur la grille $m \times n$ et les configurations de dimères sur la grille $(2m+1) \times (2n+1)$ dont un coin est retiré. Généralisant des résultats de [5], Kenyon, Propp et Wilson ont montré dans [30] comment étendre la bijection de Temperley à tout graphe planaire orienté avec des poids. Ils y définissent les graphes de Temperley, une famille de graphes finis pour lesquelles la bijection se construit facilement de manière géométrique. Dans le cas de \mathbf{Z}^2 , ces graphes sont très utiles, puisqu'à tout sous-graphe fini de \mathbf{Z}^2 on peut associer un graphe de Temperley qui sera un sous-graphe de $\frac{1}{2}\mathbf{Z}^2$, contenu dans le précédent. Cette construction s'avère utile lors du passage à la limite continue; voir § 8.

L'existence de cette bijection est intéressante à divers titres. Tout d'abord, en vertu de l'algorithme de Wilson [43], il est possible en utilisant des marches aléatoires à boucles effacées de simuler un arbre couvrant avec des probabilités proportionnelles aux produits des poids des arêtes de l'arbre. En particulier, on peut simuler un arbre couvrant choisi uniformément au hasard (uniform spanning tree, UST). Ainsi, cette bijection fournit un algorithme effectif pour simuler, sous la mesure de Boltzmann, une configuration aléatoire de dimères. Cette bijection possède aussi un intérêt théorique pour démontrer l'existence d'une mesure de Gibbs sur $\mathcal{M}(\mathbf{Z}^2)$; voir [5]. Enfin cette bijection fait le pont entre le modèle de dimères et les modèles de la marche aléatoire à boucles effacées (loop-erased random walk, LERW) et de l'arbre couvrant aléatoire qui ont tout deux suscité beaucoup d'intérêt depuis la preuve dans [33] de propriétés d'invariance conforme de leurs limites continues; voir § 8.

7.2 Le modèle d'Ising

Dans [22], Kasteleyn remarque que le modèle d'Ising peut être décrit comme une généralisation du modèle de dimères. Fisher décrit plus particulièrement le lien entre le modèle d'Ising à la température critique et le modèle de dimères sur un graphe obtenu à

partir du premier par une légère modification appelée décoration. Les liens entre les deux modèles sont nombreux et leur étude est riche en résultats intéressants ; voir [6] et [7].

7.3 D'autres modèles

De nombreux autres modèles ont un lien combinatoire avec les configurations de dimères ou les pavages aléatoires. Un exemple frappant, décrit dans [19], est connu sous le nom anglais de *Arctic circle phenomenon* ; en voici une description. On s'intéresse à la mesure uniforme sur les pavages par des dominos d'un grand polyomino de forme asymptotique carrée dans \mathbf{Z}^2 dont les sommets ont pour coordonnées $(-n, 0)$, $(0, -n)$, $(n, 0)$ et $(0, n)$. Ce carré est connu sous le nom anglais de *Aztec diamond*. À cause de la forme de ce polyomino, la position des dominos sur le bord est entièrement déterminée. Au centre, le pavage a beaucoup plus de degrés de liberté. Asymptotiquement, il existe une limite géométrique entre la phase gelée sur le bord et la phase liquide au centre. Il s'agit du cercle inscrit dans le carré, appelé *cercle arctique*. Dans [18], Johansson décrit plus précisément la statistique du pavage aléatoire au centre du cercle arctique à l'aide d'un autre processus, le processus d'Airy. À l'origine, le processus d'Airy est apparu dans l'étude de modèles de croissance aléatoire de surfaces (Polynuclear Growth Model, PNG) et il permet de décrire la distribution de la plus grande valeur propre d'une grande matrice hermitienne aléatoire (Gaussian Unitary Ensemble, GUE). Ce phénomène peut aussi s'expliquer à l'aide du TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process), qui est un modèle dynamique de système de particules en interaction sur \mathbf{Z} ; voir [14].

8 Comportements limites

Un type de raisonnement largement répandu en physique statistique est celui du *passage à la limite continue*. Cela consiste à tenter de faire apparaître des objets continus aléatoires ou déterministes comme limites universelles de nombreux modèles discrets de physique statistique. Dans le cas du modèle de dimères, le sens à donner au passage à la limite pour une configuration de dimères n'a rien d'évident. Par contre, deux objets dont nous avons vu qu'ils représentaient fidèlement le modèle de dimères ont beaucoup plus de chances de répondre à notre attente. Il s'agit d'une part de la fonction de hauteur, d'autre part de l'arbre couvrant aléatoire donné par la bijection de Temperley.

Kenyon a établi un résultat de convergence de la fonction de hauteur dans le cas du réseau carré [26] et du réseau hexagonal [27]. Expliquons brièvement le cas du réseau carré. On considère le modèle de dimères sur \mathbf{Z}^2 avec une fonction de poids constante égale à 1 et on considère un domaine de Jordan U dans le plan (*i.e.*, un ouvert simplement connexe délimité par une courbe simple régulière). On note U_ε le graphe de Temperley obtenu à partir de $U \cap \varepsilon\mathbf{Z}^2$, et μ_ε la mesure de Boltzmann du modèle de dimères sur ce graphe. Il existe une mesure ergodique de Gibbs sur $\mathcal{M}(\mathbf{Z}^2)$ d'entropie maximale, notée μ_{BP} , telle que les probabilités μ_ε convergent localement autour de tout point intérieur à U vers μ_{BP} . Pour tout ε , on note h_ε la fonction de hauteur (aléatoire) sur U_ε . Alors h_ε converge vers une surface aléatoire dont la moyenne est une certaine fonction harmonique ne dépendant que de la forme de U et dont les fluctuations autour de cette valeur moyenne sont données par un *champ libre gaussien* (Gaussian Free Field, GFF) ; voir [39] pour une définition du champ libre gaussien.

D'autre part, Lawler, Schramm et Werner ont démontré dans [33] la convergence de nombreux modèles de physique statistique vers un objet aléatoire continu appelé SLE

(*Schramm Loewner Evolution*), introduit par Schramm en 2000 ; voir [32]. On peut penser intuitivement à ce processus comme à une courbe aléatoire fractale dans le plan. Cette convergence a en particulier lieu pour la courbe aléatoire qui entoure l'arbre couvrant aléatoire décrit plus haut. Intuitivement, on peut donc penser que la «courbe aléatoire» du SLE et la «surface aléatoire» du GFF doivent être liées puisque leurs analogues discrets le sont via la bijection de Temperley. Dans [37], Schramm et Sheffield ont donné un sens mathématique à cette intuition en montrant comment le SLE correspond aux «lignes de niveaux» du champ libre gaussien. C'est là un exemple particulièrement frappant d'une situation où le passage par le discret permet de mettre en relation des objets du continu qui ont été introduits dans des contextes différents.

Références

- [1] M. F. ATIYAH, *Riemann surfaces and spin structures*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 (1971), n° 4, 47–62.
- [2] R. J. ADLER, J. E. TAYLOR, *Random fields and geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [3] R. J. BAXTER, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [4] D. BEAUQUIER, J.-C. FOURNIER, *Groups and tilings*, Selected papers in honour of Maurice Nivat, Theoret. Comput. Sci. 281 (2002), n° 1–2, 81–97.
- [5] R. BURTON, R. PEMANTLE, *Local characteristics, entropy, and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances*, Annals of Probability 21 (1993), n° 3, 1329–1371.
- [6] C. BOUTILLIER, B. DE TILIÈRE, *The critical Z-invariant Ising model via dimers : the periodic case*, Prob. Th. Rel. Fields (2009).
- [7] C. BOUTILLIER, B. DE TILIÈRE, *The critical Z-invariant Ising model via dimers : locality property*, preprint, arXiv :0902.1882.
- [8] R. CERF, *The Wulff crystal in Ising and percolation models*, Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6th–24th, 2004, Lecture Notes in Mathematics, 1878, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [9] R. CERF, *Dimères et surfaces aléatoires*, Séminaire Bourbaki 61e année n° 997 (2008).
- [10] D. CIMASONI, *Discrete Dirac operators on Riemann surfaces and Kasteleyn matrices*, preprint, arXiv :0909.5339.
- [11] D. CIMASONI, N. RESHETIKHIN, *Dimers on surface graphs and spin structures. I*, Comm. Math. Phys. 275 (2007), n° 1, 187–208.
- [12] D. CIMASONI, N. RESHETIKHIN, *Dimers on surface graphs and spin structures. II*, Comm. Math. Phys. 281 (2008), n° 2, 445–468.
- [13] H. COHN, R. KENYON, J. PROPP, *A variational principle for domino tilings*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), n° 2, 297–346.
- [14] P. L. FERRARI, *Dimers and orthogonal polynomials : connections with random matrices*, Extended lecture notes of the minicourse at IHP, October 2009.
- [15] J.-C. FOURNIER, *Combinatorics of perfect matchings in plane bipartite graphs and application to tilings*, Tilings of the plane, Theoret. Comput. Sci. 303 (2003), n° 2–3, 333–351.

- [16] M. FISHER, H. TEMPERLEY, *The dimer problem in statistical mechanics – an exact result*, Phil. Mag. 6 (1961), 1061–1063.
- [17] A. GALLUCCIO, M. LOEBL, *On the theory of Pfaffian orientations. I. Perfect matchings and permanents*, Electron. J. Combin. 6 (1999), Research Paper 6.
- [18] K. JOHANSSON, *The arctic circle boundary and the Airy process*, Ann. Probab. 33 (2005), n° 1, 1–30.
- [19] W. JOCKUSCH, J. PROPP, P. SHOR, *Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem*, preprint, arXiv :9801068.
- [20] M. KAC, J. C. WARD, *A combinatorial solution of the two-dimensional Ising model*, Physical Review 88 (1952), n° 6, 1332–1337.
- [21] P. W. KASTELEYN, *The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, Physica 27 (1961), 1209–1225.
- [22] P. W. KASTELEYN, *Dimer statistics and phase transitions*, Journal of Mathematical Physics 4 (1963), n° 2, 1209–1225.
- [23] R. KENYON, *Local statistics of lattice dimers*, Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités 33 (1997), 591–618.
- [24] R. KENYON, *The asymptotic determinant of the discrete Laplacian*, Acta Math. 185 (2000), n° 2, 239–286.
- [25] R. KENYON, *Conformal invariance of domino tiling*, Ann. Probab. 28 (2000), n° 2, 759–795.
- [26] R. KENYON, *Dominos and the Gaussian free field*, Ann. Prob. 29 (2001), n° 3, 1128–1137.
- [27] R. KENYON, *Height fluctuations in the honeycomb dimer model*, Comm. Math. Phys. 281 (2008), n° 3, 675–709.
- [28] R. KENYON, *Lectures on dimers*, École d’été de Probabilités de Saint-Flour (2008), Lecture Notes in Mathematics, Springer, en préparation.
- [29] R. KENYON, A. OKOUNKOV, S. SHEFFIELD, *Dimers and amoebae*, Ann. of Math. (2) 163 (2006), n° 3, 1019–1056.
- [30] R. KENYON, J. G. PROPP, D. B. WILSON, DAVID B, *Trees and matchings*, Electron. J. Combin. 7 (2000), Research Paper 25.
- [31] R. KENYON, W. WERNER, *Pavages, arbres et labyrinthes aléatoires*, Images des Mathématiques, CNRS (2004).
- [32] G. LAWLER, *Schramm-Loewner evolution (SLE)*, Statistical mechanics, 231–295, IAS/Park City Math. Ser., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [33] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM, W. WERNER, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Ann. Probab. 32 (2004), n° 1B, 939–995.
- [34] J. K. PERCUS, *One more technique for the dimer problem*, J. Math. Phys. 10 (1969), 1881–1888.
- [35] H. N. V. TEMPERLEY, *Combinatorics : Proceedings of the Conference on Combinatorial Mathematics held at the Mathematical Institute, Oxford, 356–357, 1972.*
- [36] H. TEMPERLEY, *Combinatorics : Proceedings of the British Combinatorial Conference 1973*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 13 (1974), 202–20

- [37] O. SCHRAMM, S. SHEFFIELD, *Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field*, Acta Math. 202 (2009), n° 1, 21–137.
- [38] S. SHEFFIELD, *Random surfaces*, Astérisque 304, Société Mathématique de France, Paris, 2005.
- [39] S. SHEFFIELD, *Gaussian free fields for mathematicians*, Probability theory and related fields, Lectures Notes in Mathematics 139 (2007), n° 3–4, 521–541.
- [40] W. P. THURSTON, *Conway’s tiling groups*, American Mathematical Monthly 97 (1990), n° 8, 757–773.
- [41] B. DE TILIÈRE, *The dimer model in statistical mechanics*, Lecture notes of a mini-course at IHP, October 2009.
- [42] O. VIRO, *What is . . . an amoeba?*, Notices of the American Mathematical Society 49 (2002), n° 8, 916–917.
- [43] D. B. WILSON, *Generating random spanning trees more quickly than the cover time*, Proceedings of the 28th ACM Symposium on the Theory of Computing (1996), 296–303.