

# SUR L'ACTION DU GROUPE MODULAIRE SUR LA CUBIQUE DE MARKOFF

Fanny Kassel et Vincent Pilaud  
Sujet proposé par Frédéric Paulin,  
d'après un article de W. M. Goldman

Juin 2004

## Table des matières

<b>1. Étude algébrique de l'espace des représentations</b>	<b>2</b>
1.1. Action de $SL_2(\mathbb{C})$ au but . . . . .	2
1.2. Action du groupe libre $\pi$ à la source . . . . .	10
<b>2. Étude dynamique de l'action du groupe <math>PGL_2(\mathbb{Z})</math> sur les surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff</b>	<b>17</b>
2.1. Description . . . . .	17
2.2. Étude plus précise du cas $t = -2$ . . . . .	19
2.3. Étude plus précise du cas $-2 < t < 2$ . . . . .	25
2.4. Étude plus précise du cas $2 < t \leq 18$ . . . . .	27
<b>Annexes</b>	<b>30</b>
Annexe A : Groupes libres . . . . .	30
Annexe B : Présentations de groupes par générateurs et relations . . . . .	32
Annexe C : Automorphismes du groupe libre à deux générateurs . . . . .	36
Annexe D : Groupe fondamental . . . . .	41
Annexe E : Quelques notions élémentaires de géométrie hyperbolique . . . . .	44
Annexe F : Surfaces de niveau du polynôme de Markoff . . . . .	47
Annexe G : Quelques notions élémentaires de systèmes dynamiques . . . . .	50
<b>Références</b>	<b>52</b>

Soient  $\pi$  un groupe discret et  $G$  un groupe topologique. Il est courant de s'intéresser au groupe  $\text{Hom}(\pi, G)$  des morphismes de groupes de  $\pi$  dans  $G$ , muni de la topologie de la convergence simple. On étudie deux actions sur cet espace topologique :

1. l'action de  $G$  par conjugaison au but définie par

$$g \cdot \rho = g\rho(\cdot)g^{-1} \text{ pour tout } g \in G \text{ et tout } \rho \in \text{Hom}(\pi, G),$$

2. l'action de  $\text{Aut}(\pi)$  par translation à droite à la source définie par

$$\alpha \cdot \rho = \rho \circ \alpha^{-1} \text{ pour tout } \alpha \in \text{Aut}(\pi) \text{ et tout } \rho \in \text{Hom}(\pi, G).$$

Notons que ces deux actions commutent.

Dans ce travail, on va considérer un exemple simple et dont l'étude mène à des résultats intéressants : celui du groupe fondamental  $\pi$  du tore percé et de  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Soit  $\mathring{\mathbb{T}}$  le tore percé, c'est-à-dire le tore  $\mathbb{T}^2$  privé d'un point, ce qui revient, à  $C^\infty$ -difféomorphisme près, à supprimer du tore un petit disque fermé. On notera  $\partial\mathring{\mathbb{T}}$  la frontière du tore percé, c'est-à-dire la frontière de ce disque fermé.

Le groupe fondamental  $\pi$  du tore percé est un groupe libre à deux générateurs (cf annexes A et D). On notera  $\{X, Y\}$  une partie génératrice libre de  $\pi$  et  $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$  le commutateur de  $X$  et  $Y$ .

Soit  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  le groupe topologique des matrices carrées complexes de taille 2 et de déterminant 1.

On va s'intéresser à l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . On s'appuiera principalement sur un article de William M. Goldman [GOL3].

## 1. Étude algébrique de l'espace des représentations

On notera  $\pi$  le groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{L}_2$ , qui s'identifie au groupe fondamental du tore percé  $\mathring{\mathbb{T}}$ .

### 1.1. Action de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ au but

Commençons par étudier l'action du groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  sur l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  par conjugaison au but, définie par  $g \cdot \rho = g\rho(\cdot)g^{-1}$  pour tout  $g \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  et tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ .

Soit  $\phi$  l'application définie par :

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C})) &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ \rho &\longmapsto (\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)). \end{aligned}$$

**Proposition.** *L'application  $\phi$  est surjective et passe au quotient par l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ .*

**Démonstration.** La trace d'un conjugué d'une matrice  $A$  est égale à la trace de  $A$ , donc il est clair que l'application  $\phi$  passe au quotient. Montrons la surjectivité de  $\phi$ . Considérons un triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ . Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$  tel que  $\zeta + \zeta^{-1} = z$ . Posons

$$u = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{-1} \\ -\zeta & y \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$uv = \begin{pmatrix} \zeta & x\zeta^{-1} - y \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'on définit une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  par  $\rho(X) = u$  et  $\rho(Y) = v$ , ce qui est possible par la propriété universelle d'un groupe libre, alors on a  $\phi(\rho) = (x, y, z)$ .  $\square$

Notons  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  l'ensemble des classes d'équivalence par l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , et

$$\tilde{\phi} : \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

l'application induite de  $\phi$  par passage au quotient. Le but de ce qui suit est de démontrer que  $\tilde{\phi}$  réalise un homéomorphisme d'un ouvert dense de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  sur un ouvert dense de  $\mathbb{C}^3$ .

**Proposition.** *Pour tout élément  $W$  de  $\pi$ , il existe un polynôme  $P_W \in \mathbb{Z}[x, y, z]$  tel que pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  on a*

$$\text{tr } \rho(W) = P_W(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)).$$

**Démonstration.** Soient  $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . On note  $I_2$  la matrice identité de taille 2.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $A^2 - (\text{tr } A)A + (\det A)I_2 = A^2 - (\text{tr } A)A + I_2 = 0$ , donc  $A^{-1} = (\text{tr } A)I_2 - A$ , et en prenant la trace, on obtient

$$\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr } A. \quad (1)$$

On a  $B + B^{-1} = (\text{tr } B)I_2$ , donc  $AB + AB^{-1} = (\text{tr } B)A$ , et en prenant la trace, on obtient

$$\text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}) = (\text{tr } B)(\text{tr } A). \quad (2)$$

Soit  $W$  un élément de  $\pi$ . On peut écrire  $W$  sous la forme

$$W = Z_1^{k_1} Z_2^{k_2} \dots Z_n^{k_n},$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et  $Z_1, \dots, Z_n \in \{X, Y\}$  vérifiant  $Z_{i+1} \neq Z_i, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

On dit que  $W$  possède  $n$  syllabes.

Montrons le résultat de la proposition par récurrence sur le nombre  $n$  de syllabes de  $W$ .

1. Si  $n = 0$ , alors  $W$  est l'élément neutre du groupe  $\pi$ , et pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ , on a  $\text{tr } \rho(W) = \text{tr}(I_2) = 2$ .
2. Si  $n = 1$ , la relation (2) permet d'écrire, pour tout mot  $W$  de  $\pi$ , tout morphisme  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  et tout entier  $p \geq 2$ ,

$$\text{tr } \rho(W^p) = \text{tr}(\rho(W)^p) = \text{tr}(\rho(W)^{p-1})\text{tr}(\rho(W)) - \text{tr}(\rho(W)^{p-2}).$$

On en déduit par récurrence sur  $p$  que  $\text{tr } \rho(W^p) = P_p(\text{tr } \rho(W))$ , où  $P_p$  est un polynôme.

La relation (1) permet d'affirmer que tout mot  $W$  de  $\pi$ , tout morphisme  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  et tout entier relatif  $p$ , on a

$$\text{tr } \rho(W^p) = P_{|p|}(\text{tr } \rho(W)).$$

Il en résulte que  $\text{tr } \rho(Z_1^{k_1})$  est un polynôme en  $\text{tr } \rho(Z_1)$ .

3. Si  $n = 2$ , alors  $W$  s'écrit  $W = Z_1^{k_1} Z_2^{k_2}$ . Procédons par récurrence sur la somme  $|k_1| + |k_2|$ .
  - Si  $|k_1| + |k_2| \leq 1$ , on est dans l'un des cas précédents.

- Si  $|k_1| + |k_2| = 2$ , alors soit  $W = XY$ , soit  $W = X^{-1}Y$  (ce qui implique  $\text{tr } \rho(W) = \text{tr } \rho(X)\text{tr } \rho(Y) - \text{tr } \rho(XY)$ ) soit  $W = XY^{-1}$  (ce qui implique  $\text{tr } \rho(W) = \text{tr } \rho(X)\text{tr } \rho(Y) - \text{tr } \rho(XY)$ ), soit  $W = X^{-1}Y^{-1}$  (ce qui implique  $\text{tr } \rho(W) = \text{tr } \rho(XY)$ ). Dans ces quatre cas, on obtient bien le résultat.
- Si  $|k_1| + |k_2| > 2$ , on peut supposer par exemple  $|k_2| \geq 2$ , donc les relations (2) puis (1) donnent

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2}) &= \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2 - \text{sgn}(k_2)} Z_2^{\text{sgn}(k_2)}) \\ &= \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2 - \text{sgn}(k_2)}) \text{tr } \rho(Z_2^{\text{sgn}(k_2)}) - \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2 - 2\text{sgn}(k_2)}) \\ &= \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2 - \text{sgn}(k_2)}) \text{tr } \rho(Z_2) - \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} Z_2^{k_2 - 2\text{sgn}(k_2)}), \end{aligned}$$

et l'on obtient le résultat par hypothèse de récurrence (la somme des valeurs absolues des exposants a diminué strictement).

4. Si  $n \geq 3$ , on écrit

$$\text{tr } \rho(Z_1^{k_1} \dots Z_n^{k_n}) = \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} \dots Z_{n-2}^{k_{n-2}}) \text{tr } \rho(Z_{n-1}^{k_{n-1}} Z_n^{k_n}) - \text{tr } \rho(Z_1^{k_1} \dots Z_{n-2}^{k_{n-2} - k_n} Z_{n-1}^{-k_{n-1}}),$$

et l'on obtient le résultat par hypothèse de récurrence (le nombre de syllabes a diminué strictement).

□

Notons que le groupe fondamental  $\pi$  du tore percé  $\mathring{\mathbb{T}}$  diffère du groupe fondamental du tore  $\mathbb{T}$  par le fait que le second est l'abélianisé du premier. On est donc naturellement amené à s'intéresser au commutateur  $[X, Y]$  des deux générateurs de  $\pi$ , qui engendre le sous-groupe dérivé du groupe  $\pi$ . Topologiquement, pour un bon choix de la partie génératrice libre  $\{X, Y\}$  de  $\pi$ , le commutateur  $[X, Y]$  correspond, à conjugaison près, à la classe d'homotopie des lacets effectuant un tour du trou dans le sens positif (voir annexe D). Le polynôme  $P_{[X, Y]}$  associé, donné par la proposition précédente, est appelé *polynôme de Markoff* et est défini par

$$\kappa(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2.$$

Ce dernier résultat, qui fait l'objet de la proposition suivante, est dû à Fricke [FRI].

**Proposition.** *Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ , on a*

$$\text{tr } \rho([X, Y]) = \kappa(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)) = \kappa(\phi(\rho)).$$

**Démonstration.** Soit  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . Posons  $x = \text{tr } \rho(X)$ ,  $y = \text{tr } \rho(Y)$  et  $z = \text{tr } \rho(XY)$ . En utilisant les deux relations (1) et (2) introduites dans la démonstration de la proposition précédente, on montre successivement :

$$\text{tr } \rho(X^2) = \text{tr}(\rho(X))^2 = (\text{tr } \rho(X))^2 - \text{tr } I_2 = x^2 - 2,$$

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho(Y^{-1}X) &= \text{tr } \rho(XY^{-1}) = \text{tr } \rho(X) \cdot \text{tr } \rho(Y^{-1}) - \text{tr } \rho(XY) \\ &= \text{tr } \rho(X) \cdot \text{tr } \rho(Y) - \text{tr } \rho(XY) = xy - z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho(XYX^{-1}Y) &= \text{tr } \rho(XY) \cdot \text{tr } \rho(X^{-1}Y) - \text{tr } \rho(XYY^{-1}X) = \text{tr } \rho(XY) \cdot \text{tr } \rho(Y^{-1}X) - \text{tr } \rho(X^2) \\ &= z(xy - z) - (x^2 - 2) = 2 - x^2 - z^2 + xyz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho([X, Y]) &= \text{tr } \rho(XYX^{-1}Y^{-1}) = \text{tr } \rho(XYX^{-1}) \cdot \text{tr } \rho(Y^{-1}) - \text{tr } \rho(XYX^{-1}Y) \\ &= (\text{tr } \rho(Y))^2 - \text{tr } \rho(XYX^{-1}Y) = y^2 - (2 - x^2 - z^2 + xyz) \\ &= \kappa(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)). \end{aligned}$$

□

On va saisir toute l'importance du polynôme de Markoff dans l'étude de théorie des invariants qui suit.

Soient

$$U = \{\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C})) \mid \kappa(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)) \neq 2\}$$

et  $\tilde{U}$  son image dans  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Notons que  $U$  est un ouvert de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  pour la topologie de la convergence simple ;  $\tilde{U}$  est donc un ouvert de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  pour la topologie quotient.

Cette topologie quotient n'est pas séparée. En effet, considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$$

et soit  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  la représentation définie par

$$\rho(X) = \rho(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la suite  $(A_n \cdot \rho)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la représentation constante égale à la matrice  $I_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , qui n'est pas conjuguée à la représentation  $\rho$ . Cela signifie que dans l'espace quotient  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , la suite constante égale à  $\bar{\rho}$  admet pour limite un élément différent de  $\bar{\rho}$ . Il n'y a donc pas unicité de la limite des suites convergentes dans cet espace quotient, ce qui prouve que sa topologie n'est pas séparée.

**Proposition.** *L'application  $\tilde{\phi}_{|\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \kappa^{-1}(2)$  est un homéomorphisme.*

**Démonstration.** L'application  $\tilde{\phi}$  est surjective et continue. Avant de montrer que  $\tilde{\phi}_{|\tilde{U}}$  est injective, commençons par quelques résultats préliminaires.

Soit  $\mathcal{A}$  (respectivement  $G$ ) une  $\mathbb{C}$ -algèbre associative unifère (respectivement un groupe) et  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On dit qu'une représentation  $\rho : \mathcal{A}$  (resp.  $G$ )  $\rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$  (resp.  $\text{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ ) de l'algèbre  $\mathcal{A}$  (respectivement du groupe  $G$ ) est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par l'image de  $\rho$  sont  $\{0\}$  et  $E$ .

Le théorème suivant est un résultat classique, démontré par exemple dans [LAN].

**Théorème (Burnside).** *Soit  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$  une représentation irréductible de  $\mathcal{A}$  de dimension finie. Alors  $\rho(\mathcal{A}) = \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$ .*

**Lemme (1).** *Soit  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . Alors  $\rho$ , vue comme une représentation du groupe  $\pi$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^2$ , est irréductible si et seulement si  $\kappa(\phi(\rho)) \neq 2$ .*

**Preuve.** Si  $\rho$  est réductible, il existe une droite de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^2$  qui est stable par l'image de  $\rho$ . Par conséquent, les deux matrices  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$  se trigonalisent dans une même base, ce qui signifie que  $\rho$  est conjuguée à une représentation  $r$  telle que les matrices  $r(X)$  et  $r(Y)$  sont triangulaires supérieures.

Posons

$$r(X) = \begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } r(Y) = \begin{pmatrix} b & b' \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Alors on voit facilement que  $r([X, Y]) = r(X)r(Y)r(X)^{-1}r(Y)^{-1}$  est de la forme

$$r([X, Y]) = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où  $\kappa(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)) = 2$  par la relation de Fricke.

Réciproquement, supposons  $\kappa(\phi(\rho)) = 2$ . Soit  $\mathcal{A}$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  engendré par  $I_2, \rho(X), \rho(Y)$  et  $\rho(XY)$ . Montrons que  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre propre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Pour simplifier les notations, on pose  $\xi = \rho(X)$  et  $\eta = \rho(Y)$  (ce qui implique  $\rho(XY) = \xi\eta$ ). On a vu que l'on a  $A = (\text{tr } A)I_2 - A^{-1}$  pour toute matrice  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . On trouve donc

$$\begin{aligned} \eta\xi &= (\text{tr}(\eta\xi))I_2 - (\eta\xi)^{-1} = (\text{tr}(\eta\xi))I_2 - \xi^{-1}\eta^{-1} \\ &= (\text{tr}(\eta\xi))I_2 - ((\text{tr}(\xi)I_2 - \xi)((\text{tr}(\eta)I_2 - \eta)) \\ &= (\text{tr}(\eta\xi) - \text{tr}(\xi)\text{tr}(\eta))I_2 + \text{tr}(\eta)\xi + \text{tr}(\xi)\eta - \xi\eta \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

et de même,  $\xi^2, \eta^2, (\xi\eta)^2, \xi^2\eta, \xi\eta\xi, \eta\xi\eta$  et  $\xi\eta^2$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ , donc  $\mathcal{A}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Si l'on identifie l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{C}^4$  via sa base canonique constituée des quatre matrices élémentaires

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

un simple calcul montre que l'endomorphisme linéaire  $f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  défini par  $f(E_{11}) = I_2, f(E_{12}) = \xi, f(E_{21}) = \eta$  et  $f(E_{22}) = \xi\eta$  est de déterminant  $2 - \kappa(\text{tr } \xi, \text{tr } \eta, \text{tr } \xi\eta) = 0$ , donc la sous-algèbre  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est bien une sous-algèbre propre. La représentation  $\rho$  est donc réductible, par la contraposée du théorème de Burnside énoncé ci-dessus.  $\square$

Venons-en maintenant à l'injectivité de l'application  $\tilde{\phi}_{|\tilde{V}}$ . Soient  $\rho, \rho' \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  deux représentations du groupe  $\pi$  vérifiant  $\phi(\rho) = \phi(\rho') \notin \kappa^{-1}(2)$ . On veut montrer que  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées.

Soit  $\mathbb{C}[\pi] = \{\sum_{i \in I} \lambda_i W_i \mid I \text{ fini et } \forall i \in I, \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ et } W_i \in \pi\}$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre du groupe  $\pi$ , et  $\rho_1$  et  $\rho'_1$  les représentations de  $\mathbb{C}[\pi]$  induites par  $\rho$  et  $\rho'$ , données explicitement par

$$\begin{aligned} \rho_1 : \mathbb{C}[\pi] &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \sum_{i \in I} \lambda_i W_i &\longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \rho(W_i), \\ \rho'_1 : \mathbb{C}[\pi] &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \sum_{i \in I} \lambda_i W_i &\longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \rho'(W_i). \end{aligned}$$

D'après le lemme (1), les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  du groupe  $\pi$  sont irréductibles. Par conséquent, les représentations  $\rho_1$  et  $\rho'_1$  sont également irréductibles, donc surjectives par le théorème de Burnside.

Étudions à présent leurs noyaux.

**Lemme (2).** *Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Alors on a  $\text{tr}(AB) = 0$  pour tout  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  si et seulement si  $A = 0$ .*

**Preuve.** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $\text{tr}(AB) = 0$  pour tout  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Par linéarité de la trace, et comme le groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  engendre l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on a  $\text{tr}(AB) = 0$  pour tout  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . En particulier on a  $\text{tr}(A^t A) = 0$ , ce qui implique  $A = 0$ .  $\square$

Par conséquent, en utilisant la surjectivité de  $\rho$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Ker } \rho_1 &= \{\sum_{i \in I} \lambda_i W_i \mid \forall V \in \pi, \text{tr}(\sum_{i \in I} \lambda_i \rho(W_i)\rho(V)) = 0\} \\ &= \{\sum_{i \in I} \lambda_i W_i \mid \forall V \in \pi, \sum_{i \in I} \lambda_i \text{tr } \rho(W_i V) = 0\}. \end{aligned}$$

**Lemme (3).** Pour tous  $\rho, \rho' \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ , l'égalité  $\phi(\rho) = \phi(\rho')$  implique  $\text{tr } \rho(W) = \text{tr } \rho'(W)$  pour tout  $W \in \pi$ .

**Preuve.** On a montré que pour tout élément  $W$  de  $\pi$ , il existe un polynôme  $P_W \in \mathbb{Z}[x, y, z]$  tel que pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  on a

$$\text{tr } \rho(W) = P_W(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)).$$

Si  $\phi(\rho) = \phi(\rho')$ , alors pour tout  $W \in \pi$  on a

$$\text{tr } \rho(W) = P_W(\phi(\rho)) = P_W(\phi(\rho')) = \text{tr } \rho'(W).$$

□

On en déduit les égalités

$$\begin{aligned} \text{Ker } \rho_1 &= \{ \sum_{i \in I} \lambda_i W_i \mid \forall V \in \pi, \sum_{i \in I} \lambda_i \text{tr } \rho(W_i V) = 0 \} \\ &= \{ \sum_{i \in I} \lambda_i W_i \mid \forall V \in \pi, \sum_{i \in I} \lambda_i \text{tr } \rho'(W_i V) = 0 \} = \text{Ker } \rho'_1. \end{aligned}$$

Notons  $K = \text{Ker } \rho_1 = \text{Ker } \rho'_1$ .

Le morphisme  $\rho_1$  (respectivement  $\rho'_1$ ) se factorise en un isomorphisme d'algèbres

$$\tilde{\rho} \text{ (respectivement } \tilde{\rho}') : \mathbb{C}[\pi]/K \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

L'application  $\tilde{\rho}' \circ \tilde{\rho}^{-1}$  est donc un automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Le lemme suivant est classique, voir par exemple [LAN].

**Lemme (4).** Tout automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est la conjugaison par un élément  $g$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

On en déduit l'égalité  $\rho' = g \cdot \rho$  et donc  $\bar{\rho} = \overline{\rho'}$ , ce qui prouve l'injectivité de l'application  $\tilde{\phi}_{\tilde{U}}$ .

Ainsi, l'application  $\tilde{\phi}_{\tilde{U}}$  est une bijection continue. Pour montrer que c'est un homéomorphisme, on va montrer qu'elle est propre et que l'espace topologique  $\tilde{U}$  est séparé.

**Lemme (5).** L'espace topologique  $\tilde{U}$  est séparé.

**Preuve.** L'espace  $\tilde{U}$  est le quotient de l'espace topologique  $U$  par l'action du groupe de Lie  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Notons  $\mathcal{S}$  la relation d'équivalence sur  $U$  définie par  $\rho \mathcal{S} \rho'$  si et seulement si  $\rho$  et  $\rho'$  sont dans la même orbite sous l'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Pour montrer la séparation de l'espace topologique quotient  $\tilde{U}$ , nous allons montrer que la relation  $\mathcal{S}$  est un fermée de  $U \times U$ .

Pour cela, considérons une suite de couples de représentations conjuguées  $(\rho_n, \rho'_n) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers un couple  $(\rho, \rho') \in U \times U$ . On veut montrer que les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $g_n \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\rho'_n = g_n \rho_n g_n^{-1}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la représentation  $\rho_n$  appartient à l'ouvert  $U$ , donc elle est irréductible par le lemme 1. Il existe donc une base unitaire  $(e_n, f_n)$  de  $\mathbb{C}^2$  telle que

$$\rho_n(X) \mathbb{C}e_n = \mathbb{C}e_n \quad \text{et} \quad \rho_n(Y) \mathbb{C}f_n = \mathbb{C}f_n.$$

La base  $(e'_n, f'_n) = (g_n e_n, g_n f_n)$  de  $\mathbb{C}^2$  vérifie alors

$$\rho'_n(X) \mathbb{C}e'_n = \mathbb{C}e'_n \quad \text{et} \quad \rho'_n(Y) \mathbb{C}f'_n = \mathbb{C}f'_n.$$

Par compacité, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite de la suite  $(\rho_n, \rho'_n)$ , que les suites  $(e_n)$ ,  $(f_n)$ ,  $(e'_n)$  et  $(f'_n)$  convergent respectivement vers  $e$ ,  $f$ ,  $e'$  et  $f'$ .

Soit  $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}$  la matrice dans ces bases de l'application canoniquement associée  $g_n$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n e_n = e'$ , la suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0, et de même la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0. Un calcul simple permet alors de montrer que les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite de la suite  $(\rho_n, \rho'_n)$ , on peut supposer que les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers  $\alpha$  et  $\alpha^{-1}$ . L'élément  $g$  dont la matrice dans les bases  $(e, f)$  et  $(e', f')$  est  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$  conjugue donc les deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$ . Par conséquent, la relation d'équivalence  $\mathcal{S}$  est fermée ce qui nous permet de conclure que l'espace topologique  $\tilde{U}$  est séparé.  $\square$

**Lemme (6).** *L'application  $\tilde{\phi}_{|\tilde{U}}$  est propre.*

**Preuve.** Comme une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  est entièrement déterminée par les images  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$ , la topologie de la convergence simple sur l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  s'identifie à la topologie usuelle de l'espace  $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , ce dernier pouvant être vu comme une partie de  $\mathbb{C}^8$ . Puisque l'on se trouve dans un espace vectoriel de dimension finie et que l'on a déjà la continuité de  $\tilde{\phi}_{|\tilde{U}}$ , il suffit en fait de montrer que l'image réciproque par  $\tilde{\phi}_{|\tilde{U}}$  de tout compact est bornée.

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}^3$  inclus dans  $\mathbb{C}^3 \setminus \kappa^{-1}(2)$ . On veut montrer qu'il existe une constante positive  $N_K$  telle que toute représentation  $\rho \in \phi^{-1}(K)$  est conjuguée à une représentation  $r \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  dont le maximum des modules des coefficients des images  $r(X)$  et  $r(Y)$  est inférieur ou égal à  $N_K$ .

Soit  $M \geq 2$  tel que le compact  $K$  soit inclus dans la boule de centre 0 et de rayon  $M$ . Soit  $\rho \in \phi^{-1}(K)$  une représentation. Puisque  $K$  est inclus dans  $\mathbb{C}^3 \setminus \kappa^{-1}(2)$ , la représentation  $\rho$  est irréductible, par le lemme 1. Par conséquent, elle est conjuguée à une représentation  $r$  telle que

$$r(X) = \begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } r(Y) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b' & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

avec  $a, a', b, b' \neq 0$ .

On sait que  $\phi(r)$  appartient à  $K \subset B(0, M)$ , donc on a

$$|\text{tr } r(X)| = \left| a + \frac{1}{a} \right| \leq M, \quad |\text{tr } r(Y)| = \left| b + \frac{1}{b} \right| \leq M \text{ et } |\text{tr } r(XY)| = \left| ab + \frac{1}{ab} + a'b' \right| \leq M.$$

On veut montrer que les modules des coefficients de  $r(X)$  et de  $r(Y)$  sont majorés par une constante ne dépendant que de  $M$ .

Or on a  $|a + \frac{1}{a}| \leq M$ , donc  $|a|^2 - M|a| + 1 \leq 0$ , d'où

$$\frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} \leq |a| \leq \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}.$$

On obtient donc

$$|a| \leq \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|a|} \leq \frac{2}{M - \sqrt{M^2 - 4}}.$$

De la même façon, on a

$$|b| \leq \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|b|} \leq \frac{2}{M - \sqrt{M^2 - 4}}.$$

Il reste donc à majorer les modules  $|a'|$  et  $|b'|$ . Mais on sait qu'il existe une constante strictement positive  $n_K$  telle que pour toute représentation  $\rho \in \phi^{-1}(K)$ , conjuguée à une représentation  $r$  dont les images sont de la forme

$$r(X) = \begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } r(Y) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b' & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$



on a  $|a'| \geq n_K$  et  $|b'| \geq n_K$ . En effet, raisonnons par l'absurde en considérant par exemple une suite  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de représentations conjuguées à des représentations  $r_n$  dont les modules des termes  $a'_n$  des matrices  $r_n(X) = \begin{pmatrix} a_n & a'_n \\ 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$  tendent vers 0. Alors cette suite tend vers une représentation  $\rho$  conjuguée à une représentation  $r$  de la forme

$$r(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } r(Y) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b' & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

qui est réductible et n'appartient donc pas à  $\phi^{-1}(K)$ . Ceci contredit le fait que  $K$  est fermé.

On a ainsi  $|a'b'| \geq |a'|n_K$ , et comme on a  $|ab + \frac{1}{ab} + a'b'| \leq M$ , on en déduit

$$|a'| \leq \frac{1}{n_K} |a'b'| \leq \frac{1}{n_K} \left( M + \left| ab + \frac{1}{ab} \right| \right) \leq \frac{C}{n_K},$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $M$ , puisque les modules  $|a|$ ,  $|b|$ ,  $\frac{1}{|a|}$  et  $\frac{1}{|b|}$  ont déjà été majorés par une constante ne dépendant que de  $M$ .

On obtient donc une majoration de tous les coefficients, et donc le caractère propre de  $\tilde{\phi}|_{\tilde{U}}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$   $\square$

L'ouvert  $\tilde{U}$  est dense dans  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$ . En effet, par définition de la topologie quotient, il suffit de montrer que l'ouvert  $U$  est dense dans  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . Pour cela, identifions l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{C}^8$ . Comme une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  est entièrement déterminée par les images  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$ , l'espace des représentations  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  s'identifie à la sous-variété algébrique  $V$  de  $\mathbb{C}^8$  définie par les équations polynomiales

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 = 1 \text{ et } z_5 z_8 - z_6 z_7 = 1,$$

qui traduisent le fait que  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$  sont de déterminant 1. Le complémentaire de  $U$  s'identifie alors à la sous-variété algébrique  $W$  de  $V$  définie par l'équation polynomiale

$$\kappa(z_1 + z_4, z_5 + z_8, z_1 z_5 + z_2 z_7 + z_3 z_6 + z_4 z_8) = 2.$$

Cette sous-variété algébrique est d'intérieur vide dans  $V$  car elle n'est pas égale à tout  $V$ . On en déduit que  $U$  est dense dans  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ .

On aimerait alors avoir une propriété de séparation sur  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  tout entier.

Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie sur  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  par  $\tilde{\rho} \mathcal{R} \tilde{\rho}'$  si et seulement si deux voisinages quelconques de  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\rho}'$  se rencontrent, et soit  $\tilde{\mathcal{R}}$  la relation d'équivalence engendrée par  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire la relation définie par  $\tilde{\rho} \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\rho}'$  si et seulement s'il existe  $n \geq 1$  et  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  tels que  $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\rho}_n = \tilde{\rho}'$  et, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , soit  $\tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_{i+1}$ , soit  $\tilde{\rho}_i \mathcal{R} \tilde{\rho}_{i+1}$ , soit  $\tilde{\rho}_{i+1} \mathcal{R} \tilde{\rho}_i$ .

Soit  $\overline{\text{Hom}}$  l'espace topologique quotient  $(\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C}))/\tilde{\mathcal{R}}$ .

**Lemme.** *L'espace topologique  $\overline{\text{Hom}}$  est séparé et l'application  $\tilde{\phi}$  induit un homéomorphisme  $\overline{\phi}$  de  $\overline{\text{Hom}}$  dans  $\mathbb{C}^3$ .*

**Preuve.** Il est clair que c'est une surjection continue. Par ailleurs, l'injectivité suffira pour conclure par le théorème de Brouwer, qui affirme qu'une bijection continue d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme.

Soient  $\rho, \rho' \in (\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C}))$  deux représentations ayant la même image par  $\tilde{\phi}$ . Si

cette image est différente de 2, la proposition précédente nous assure l'égalité des deux représentations. Dans le cas contraire, les deux représentations sont réductibles. On peut donc les écrire sous la forme

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } \rho(Y) = \begin{pmatrix} b & \beta \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

$$\rho'(X) = \begin{pmatrix} a' & \alpha' \\ 0 & \frac{1}{a'} \end{pmatrix} \text{ et } \rho'(Y) = \begin{pmatrix} b' & \beta' \\ 0 & \frac{1}{b'} \end{pmatrix}.$$

Les égalités de traces montrent que  $a = a'$  et  $b = b'$ . De plus, si l'on définit  $g_n$  par la matrice  $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ , alors pour tout voisinage  $V$  de la représentation  $\rho''$  définie par

$$\rho''(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ et } \rho''(Y) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix},$$

il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $g_N \rho g_N^{-1} \in V$ . Donc les représentations  $\rho$  et  $\rho''$  sont  $\mathcal{R}$ -équivalentes, et de même les représentations  $\rho'$  et  $\rho''$  sont  $\mathcal{R}$ -équivalentes. Par conséquent, les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  sont  $\tilde{\mathcal{R}}$ -équivalentes par transitivité. On en déduit l'injectivité, et par suite le résultat recherché.  $\square$

Désormais, on ne s'intéressera plus qu'à  $\overline{\text{Hom}}$ .

On vient de montrer le résultat fondamental suivant.

**Théorème.** *L'espace topologique quotient  $\overline{\text{Hom}}$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}^3$ .*

Dans la suite, on identifiera l'espace topologique quotient  $\overline{\text{Hom}}$  à  $\mathbb{C}^3$  par l'application  $\bar{\phi}$ .

## 1.2. Action du groupe libre $\pi$ à la source

Le groupe discret  $\text{Aut}(\pi)$  des automorphismes du groupe  $\pi$  agit continûment sur l'espace  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  par translation à droite à la source : pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$  et tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ ,  $\alpha \cdot \rho = \rho \circ \alpha^{-1}$ . Notons que cette action commute avec celle de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  au but, donc induit une action continue de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))/\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , donc sur  $\overline{\text{Hom}}$ .

Le groupe libre  $\pi$  étant le groupe fondamental du tore percé  $\dot{\mathbb{T}}$ , on peut se demander à quoi correspond cette action géométriquement. En fait, d'un point de vue topologique, le groupe  $\text{Aut}(\pi)$  n'admet a priori pas d'interprétation simple. En revanche, le quotient  $\text{Out}(\pi) = \text{Aut}(\pi)/\text{Int}(\pi)$  peut s'interpréter comme étant le «mapping class group» du tore percé  $\dot{\mathbb{T}}$ , c'est-à-dire le groupe  $\pi_0(\text{Homéo}(\dot{\mathbb{T}})) = \text{Homéo}(\dot{\mathbb{T}})/\text{Homéo}_0(\dot{\mathbb{T}})$  des classes d'isotopie d'homéomorphismes de  $\dot{\mathbb{T}}$  qui coïncident avec l'identité sur un voisinage de la frontière  $\partial\dot{\mathbb{T}}$  (on a noté  $\text{Homéo}(\dot{\mathbb{T}})$  le groupe des homéomorphismes de  $\dot{\mathbb{T}}$  et  $\text{Homéo}_0(\dot{\mathbb{T}})$  le sous-groupe distingué des homéomorphismes de  $\dot{\mathbb{T}}$  isotopes à l'identité).

En effet, soit  $x_0$  un point-base de  $\dot{\mathbb{T}}$ . Considérons  $\pi$  comme le groupe fondamental de  $\dot{\mathbb{T}}$  relativement à ce point-base. Tout homéomorphisme de  $\dot{\mathbb{T}}$  est isotope à un homéomorphisme fixant  $x_0$  et induit donc un automorphisme de groupe de  $\pi$ . De plus, deux homéomorphismes isotopes définissent des automorphismes de  $\pi$  conjugués, d'où l'existence d'un morphisme de groupes de  $\pi_0(\text{Homéo}(\dot{\mathbb{T}}))$  dans  $\text{Out}(\pi)$ . Un théorème, dit de Dehn-Nielsen, affirme que c'est un isomorphisme (on pourra se référer à [RAT]).

Comme l'application

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : \overline{\text{Hom}} &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ \bar{\rho} &\longmapsto (\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, le groupe  $\text{Aut}(\pi)$  agit sur  $\mathbb{C}^3$  en conjuguant l'action de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $\overline{\text{Hom}}$  par  $\overline{\phi}$ . Cette action est donnée explicitement par

$$\alpha \cdot (x, y, z) = \overline{\phi}(\alpha \cdot \overline{\phi}^{-1}(x, y, z)) = (\text{tr}((\alpha \cdot \rho)(X)), \text{tr}((\alpha \cdot \rho)(Y)), \text{tr}((\alpha \cdot \rho)(XY)))$$

pour  $(x, y, z) = (\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY))$ .

Intéressons-nous au comportement des surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff sous l'action de  $\text{Aut}(\pi)$ .

On a montré dans l'annexe C le lemme suivant.

**Lemme.** *Pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$ , l'élément  $\alpha([X, Y])$  est conjugué à  $[X, Y]$  ou à son inverse.*

D'où le résultat suivant, qui résulte de la formule (1) et de l'invariance de la trace par conjugaison.

**Proposition.** *Pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  et tout  $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$ , on a*

$$\text{tr } \rho(\alpha([X, Y])) = \text{tr } \rho([X, Y]).$$

Ceci implique, par la relation de Fricke, que l'application  $\rho \longmapsto \kappa \circ \phi(\rho)$  est invariante sous l'action de  $\text{Aut}(\pi)$ . Par commutativité des actions et compatibilité de l'action à la source avec la relation d'équivalence  $\tilde{\mathcal{R}}$ , il en est de même de l'application  $\overline{\rho} \longmapsto \kappa \circ \overline{\phi}(\overline{\rho})$ . Le groupe discret  $\text{Aut}(\pi)$  agit donc sur  $\mathbb{C}^3$  en préservant les surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff.

En outre, c'est une action par automorphismes polynomiaux à coefficients entiers. En effet, soit  $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$ . On a montré qu'il existe des polynômes à coefficients entiers  $P_{\alpha^{-1}(X)}$ ,  $P_{\alpha^{-1}(Y)}$  et  $P_{\alpha^{-1}(XY)}$  tels que

$$\text{tr}(\rho(\alpha^{-1}(X))) = P_{\alpha^{-1}(X)}(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY)),$$

$$\text{tr}(\rho(\alpha^{-1}(Y))) = P_{\alpha^{-1}(Y)}(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY))$$

$$\text{et } \text{tr}(\rho(\alpha^{-1}(XY))) = P_{\alpha^{-1}(XY)}(\text{tr } \rho(X), \text{tr } \rho(Y), \text{tr } \rho(XY))$$

pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . On a donc

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (P_{\alpha^{-1}(X)}(x, y, z), P_{\alpha^{-1}(Y)}(x, y, z), P_{\alpha^{-1}(XY)}(x, y, z))$$

pour tout triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ , ce qui prouve que le groupe  $\text{Aut}(\pi)$  agit bien par automorphismes polynomiaux sur  $\mathbb{C}^3$ .

Si l'on poursuit notre étude de l'action de  $\text{Aut}(\pi)$  sur  $\mathbb{C}^3$ , on peut se demander si cette action est fidèle. On est donc naturellement amené à étudier le noyau du morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Psi : \text{Aut}(\pi) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^3) \\ \alpha &\longmapsto \left( (x, y, z) \mapsto \overline{\phi}(\alpha \cdot \overline{\phi}^{-1}(x, y, z)) \right), \end{aligned}$$

qui est bien sûr égal au noyau du morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Psi' : \text{Aut}(\pi) &\longrightarrow \text{Aut}(\overline{\text{Hom}}) \\ \alpha &\longmapsto (\overline{\rho} \mapsto \alpha \cdot \overline{\rho}), \end{aligned}$$

Notons  $\text{Int}(\pi)$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(\pi)$  des automorphismes intérieurs de  $\pi$ .

**Proposition.** *Le noyau de  $\Psi$  est le sous-groupe de  $\text{Aut}(\pi)$  engendré par  $\text{Int}(\pi)$  et par l'automorphisme*

$$\tau : \begin{cases} X \mapsto X^{-1} \\ Y \mapsto Y^{-1} \end{cases} .$$

**Démonstration.** Pour tout automorphisme intérieur  $i_W \in \text{Int}(\pi)$  et tout  $\rho \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ , on a

$$i_W \cdot \bar{\rho} = \overline{\rho \circ i_W^{-1}} = \overline{i_{\rho(W)^{-1}} \circ \rho} = \bar{\rho},$$

donc le groupe  $\text{Int}(\pi)$  est inclus dans le noyau de  $\Psi'$ , c'est-à-dire dans le noyau de  $\Psi$ . De plus, on a vu que  $\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr}(A)$  pour toute matrice  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$ , ce qui prouve que l'automorphisme  $\tau$  est lui aussi inclus dans le noyau de  $\Psi$ . Il en est donc de même du sous-groupe de  $\text{Aut}(\pi)$  engendré par  $\text{Int}(\pi)$  et  $\tau$ .

Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $\alpha \in \text{Ker}(\Psi)$ .

**Lemme.** *Il existe des éléments  $W_X, W_Y$  et  $W_{XY}$  de  $\pi$  et des entiers  $\varepsilon(X), \varepsilon(Y), \varepsilon(XY) \in \{\pm 1\}$  tels que*

$$\begin{aligned} \alpha(X) &= W_X X^{\varepsilon(X)} (W_X)^{-1}, \\ \alpha(Y) &= W_Y Y^{\varepsilon(Y)} (W_Y)^{-1}, \\ \alpha(XY) &= W_{XY} (XY)^{\varepsilon(XY)} (W_{XY})^{-1}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Pour tout  $t \in \mathbb{C}$  et tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ , notons  $\rho_{\lambda, \mu, t}$  la représentation définie par

$$\rho_{\lambda, \mu, t}(X) = \begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \text{ et } \rho_{\lambda, \mu, t}(Y) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ t & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} .$$

On montre par récurrence que

$$\rho_{\lambda, \mu, t}(X^n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & t(\lambda^n + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^{-n+2} + \lambda^{-n}) \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \rho_{\lambda, \mu, t}(Y^m) = \begin{pmatrix} \mu^m & 0 \\ t(\mu^m + \mu^{m-2} + \dots + \mu^{-m+2} + \mu^{-m}) & \mu^{-m} \end{pmatrix}$$

pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . On obtient

$$\rho_{\lambda, \mu, t}(X^n Y^m) = \begin{pmatrix} \lambda^n \mu^m + t^2(\lambda^n + \dots + \lambda^{-n})(\mu^m + \dots + \mu^{-m}) & t\mu^{-m}(\lambda^n + \dots + \lambda^{-n}) \\ t\lambda^{-n}(\mu^m + \dots + \mu^{-m}) & \lambda^{-n} \mu^{-m} \end{pmatrix},$$

pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ .

Une récurrence facile montre enfin que

$$\rho_{\lambda, \mu, t}(X^{n_1} Y^{m_1} X^{n_2} Y^{m_2} \dots X^{n_k} Y^{m_k}) = \begin{pmatrix} P_1(\lambda, \mu, t) & P_2(\lambda, \mu, t) \\ P_3(\lambda, \mu, t) & P_4(\lambda, \mu, t) \end{pmatrix},$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tous  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ , où  $P_1(\lambda, \mu, t), P_2(\lambda, \mu, t), P_3(\lambda, \mu, t)$  et  $P_4(\lambda, \mu, t)$  sont des polynômes complexes à trois variables, de degrés respectifs  $2k, 2k-1, 2k-1$  et  $2k-2$  en  $t$ .

Comme  $\alpha^{-1} \in \text{Ker}(\Psi)$ , on a  $\text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(\alpha(X)) = \text{tr}(\alpha^{-1} \cdot \rho_{\lambda, \mu, t}(X)) = \text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(X)$  pour tout triplet  $(\lambda, \mu, t) \in \mathbb{C}^{*2} \times \mathbb{C}$ . On va montrer que  $\alpha(X)$  est conjugué à  $X$  ou à  $X^{-1}$  (les autres égalités se montrent de manière analogue). Pour cela, distinguons trois cas.

– Si  $\alpha(X)$  est conjugué à  $X^p$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ , alors  $\text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(\alpha(X)) = \lambda^p + \lambda^{-p}$ , d'où l'égalité  $\lambda^p + \lambda^{-p} = \lambda + \lambda^{-1}$  qui doit être vérifiée pour tout complexe non nul  $\lambda$ . On obtient donc  $p = \pm 1$ , et  $\alpha(X)$  est bien conjugué à  $X$  ou à  $X^{-1}$ .

- Si  $\alpha(X)$  est conjugué à  $Y^p$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ , alors  $\text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(\alpha(X)) = \mu^p + \mu^{-p}$ , d'où l'égalité  $\mu^p + \mu^{-p} = \lambda + \lambda^{-1}$  qui doit être vérifiée pour tous complexes non nuls  $\lambda$  et  $\mu$ . Un choix judicieux de  $\lambda$  et  $\mu$  nous assure que ce cas est impossible.
- Sinon,  $\alpha(X)$  est nécessairement conjugué à un mot cycliquement réduit de la forme

$$W = X^{n_1} Y^{m_1} X^{n_2} Y^{m_2} \dots X^{n_k} Y^{m_k},$$

avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ , et alors

$$\text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(\alpha(X)) = \text{tr } \rho_{\lambda, \mu, t}(W) = P_1(\lambda, \mu, t) + P_4(\lambda, \mu, t)$$

est un polynôme complexe en  $t$  de degré  $2k$ , donc ne peut pas être égal au polynôme constant  $\lambda + \lambda^{-1}$ . Ce cas est donc aussi à exclure. □

On a  $\alpha(XY) = \alpha(X)\alpha(Y)$ . D'où

$$W_{XY}(XY)^{\varepsilon(XY)}(W_{XY})^{-1} = W_X X^{\varepsilon(X)}(W_X)^{-1} W_Y Y^{\varepsilon(Y)}(W_Y)^{-1}.$$

On a donc nécessairement  $\varepsilon(XY) = \varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = \varepsilon$  et l'égalité précédente peut s'écrire

$$W_X^{-1} W_{XY} (XY)^{\varepsilon} (W_{XY})^{-1} W_Y = X^{\varepsilon} (W_X)^{-1} W_Y Y^{\varepsilon} (W_Y)^{-1} W_X \quad (3)$$

$$= X^{\varepsilon} [(W_X)^{-1} W_Y] Y^{\varepsilon} [(W_X)^{-1} W_Y]^{-1}. \quad (4)$$

Pour conclure, on fait appel au lemme suivant.

**Lemme.** Soient  $V$  un élément de  $\pi$  et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  tels que  $X^{\varepsilon} V Y^{\varepsilon} V^{-1}$  soit conjugué à  $(XY)^{\varepsilon}$ . Alors il existe des entiers  $\ell, m \in \mathbb{Z}$  tels que  $V = X^{\ell} Y^m$ .

**Preuve.**

1. Cas où  $\varepsilon = 1$ .

Notons  $v$  le mot réduit représentant  $V$ . Soient  $\ell, m \in \mathbb{Z}$  et  $w$  un mot réduit de  $\pi$  ne commençant pas par une puissance de  $X$  et ne terminant pas par une puissance de  $Y$ , tels que  $v = X^{\ell} w Y^m$ . On a

$$X v Y v^{-1} = X (X^{\ell} w Y^m) Y (Y^{-m} w^{-1} X^{-\ell}) = X^{\ell} (X w Y w^{-1}) X^{-\ell}.$$

Puisque  $X v Y v^{-1}$  est conjugué à  $XY$  par hypothèse,  $X w Y w^{-1}$  l'est aussi. Les hypothèses sur  $w$  impliquent que  $w$  est le mot vide, et donc que  $V = X^{\ell} Y^m$ .

2. Cas où  $\varepsilon = -1$ .

L'élément  $X^{-1} V Y^{-1} V^{-1}$  est conjugué à  $(XY)^{-1}$  par hypothèse, donc  $V Y^{-1} V^{-1} X^{-1}$  aussi, et donc  $X V Y V^{-1}$  est conjugué à  $XY$ . On retrouve donc le cas précédent. □

Par conséquent, d'après l'égalité (4) il existe deux entiers relatifs  $\ell$  et  $m$  tels que  $(W_X)^{-1} W_Y = X^{\ell} Y^m$ . En substituant dans l'égalité  $\alpha(Y) = W_Y Y^{\varepsilon(Y)} (W_Y)^{-1}$ , on obtient

$$\alpha(Y) = (W_X X^{\ell} Y^m) Y^{\varepsilon} (W_X X^{\ell} Y^m)^{-1} = (W_X X^{\ell}) Y^{\varepsilon} (W_X X^{\ell})^{-1}.$$

D'autre part, on a

$$\alpha(X) = W_X X^{\varepsilon} (W_X)^{-1} = (W_X X^{\ell}) X^{\varepsilon} (W_X X^{\ell})^{-1}.$$

Par conséquent, soit  $\varepsilon = 1$  et  $\alpha$  est la conjugaison par  $W_X X^{\ell}$ , soit  $\varepsilon = -1$  et  $\alpha$  est la composée de  $\tau$  et de la conjugaison par  $W_X X^{\ell}$ . Dans les deux cas,  $\alpha$  appartient bien au sous-groupe de  $\text{Aut}(\pi)$  engendré par  $\text{Int}(\pi)$  et  $\tau$ . □

**Proposition.** *Le quotient  $\text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(\Psi)$  est isomorphe au groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** Nous renvoyons à l'annexe C pour le résultat suivant : le groupe  $\text{Out}(\pi)$ , engendré par les images des automorphismes

$$\lambda : \begin{cases} X \mapsto XY \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases}, \quad \mu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases} \quad \text{et } \nu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X \end{cases},$$

est isomorphe au groupe

$$\text{GL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s, t, u \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, (su)^2 = 1, (tu)^2 = 1 \rangle,$$

via le morphisme  $h'$  qui à l'image de  $\lambda$  associe  $s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , à l'image de  $\mu$  associe  $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et à l'image de  $\nu$  associe  $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\hat{\tau}$  l'image de  $\tau$  dans  $\text{Out}(\pi)$ . Comme  $\tau = \mu^2$ , on a  $h'(\hat{\tau}) = t^2 = -I_2$ , d'où

$$\text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(\Psi) \simeq \text{Out}(\pi)/\langle \hat{\tau} \rangle \simeq \text{GL}_2(\mathbb{Z})/\langle -I_2 \rangle = \text{PGL}_2(\mathbb{Z}).$$

□

Comme conséquence des deux propositions précédentes, on a le théorème suivant.

**Théorème.** *Le groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$  agit fidèlement sur  $\mathbb{C}^3$ , par automorphismes polynomiaux à coefficients entiers, en préservant les surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff.*

Plus précisément, l'action est donnée par

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = (z, x, y),$$

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = (y, x, xy - z),$$

$$\text{et } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z) = (y, x, z),$$

où  $\{s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$  est une partie génératrice de la présentation

$$\langle s, t, u \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, (su)^2 = 1, (tu)^2 = 1 \rangle$$

de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

On peut alors se demander, plus généralement, quel est le groupe  $\Gamma$  de tous les automorphismes polynomiaux à coefficients entiers de  $\mathbb{C}^3$  qui préservent le polynôme de Markoff.

**Proposition.** *Le groupe  $\Gamma$  est isomorphe à un produit semi-direct  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** Pour montrer ce résultat, on va s'intéresser au groupe  $\Gamma'$  des automorphismes polynomiaux à coefficients complexes de  $\mathbb{C}^3$  qui préservent le polynôme de Markoff et montrer que ses éléments sont nécessairement à coefficients entiers, puis que  $\Gamma'$  est bien le produit semi-direct recherché.

La surjectivité de l'application  $\phi$  nous permet d'identifier les anneaux de polynômes

$$\mathbb{C}[x, y, z] \text{ et } \mathbb{C}[\chi(X), \chi(Y), \chi(XY)],$$

où  $\chi : \pi \rightarrow \mathbb{C}$  est un caractère additif indéterminé.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Aut}(\pi) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}[x, y, z]) = \text{Aut}(\mathbb{C}[\chi(X), \chi(Y), \chi(XY)]) \\ \alpha &\longmapsto (P(\chi(X), \chi(Y), \chi(XY)) \mapsto P(\chi(\alpha^{-1}(X)), \chi(\alpha^{-1}(Y)), \chi(\alpha^{-1}(XY)))) . \end{aligned}$$

Cette application  $\Theta$  est un morphisme de groupes. On vient de montrer que son noyau est le sous-groupe de  $\text{Aut}(\pi)$  engendré par  $\text{Int}(\pi)$  et  $\tau$ , et que le quotient  $\text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(\Theta)$  est isomorphe à  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ .

Soit

$$\begin{aligned} \bar{\Theta} : \text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(\Theta) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}[x, y, z]) = \text{Aut}(\mathbb{C}[\chi(X), \chi(Y), \chi(XY)]) \\ \bar{\alpha} &\longmapsto \Theta(\alpha) \end{aligned}$$

le morphisme injectif induit par factorisation.

On rappelle qu'on a noté

$$\lambda : \begin{cases} X \mapsto XY \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases}, \quad \mu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases} \quad \text{et } \nu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X \end{cases}$$

trois automorphismes de  $\pi$  qui engendrent  $\text{Aut}(\pi)$ . Désignons par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  leurs images respectives par  $\bar{\Theta}$ . Elles sont données par

$$\alpha : \begin{cases} x \mapsto z \\ y \mapsto x \\ z \mapsto y \end{cases}, \quad \beta : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto xy - z \end{cases} \quad \text{et } \gamma : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto z \end{cases} .$$

Notons enfin  $\delta$  et  $\varepsilon$  les automorphismes de  $\Gamma'$  définis par :

$$\delta : \begin{cases} x \mapsto -x \\ y \mapsto -y \\ z \mapsto z \end{cases} \quad \text{et } \varepsilon : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto -y \\ z \mapsto -z \end{cases} .$$

**Théorème.** *Le groupe  $\Gamma'$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$  qui préservent le polynôme de Markoff est engendré par  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $\varepsilon$ .*

**Preuve.** Notons  $H$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(\mathbb{C}[x, y, z])$  engendré par  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $\varepsilon$ .

L'inclusion  $H \subset \Gamma'$  est claire. Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $\sigma \in \Gamma'$  un automorphisme. Posons  $\sigma(x) = P(x, y, z)$ ,  $\sigma(y) = Q(x, y, z)$  et  $\sigma(z) = R(x, y, z)$ , avec  $P, Q, R \in \mathbb{C}[x, y, z]$ . On a

$$P^2 + Q^2 + R^2 - PQR = x^2 + y^2 + z^2 - xyz. \quad (5)$$

Posons  $P = P_p + P_{p-1} + \dots + P_0$  (avec  $P_p \neq 0$  et  $P_i$  homogène de degré  $i$  pour tout  $i$ ), et de même  $Q = Q_q + Q_{q-1} + \dots + Q_0$  et  $R = R_r + R_{r-1} + \dots + R_0$ .

Puisque les permutations  $(1, 3, 2)$  et  $(1, 2)$  engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ , les automorphismes  $\alpha$  et  $\gamma$  engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}(x, y, z)$ . On pourra donc permuter sans restriction les polynômes  $P, Q$  et  $R$ . Ainsi, on peut supposer  $p \leq q \leq r$ .

Notons qu'on a  $p \geq 1$ . En effet, si  $p = 0$ , alors  $x = \sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma^{-1}(P_0) = P_0$  est une constante, ce qui est absurde.

Montrons par récurrence sur  $r$  que  $\sigma$  appartient à  $H$  :

- Si  $r = 1$ , alors  $p = q = r = 1$ . Par conséquent les termes de plus haut degré dans l'équation (5) sont  $-P_1Q_1R_1$  dans le membre de gauche et  $-xyz$  dans le membre de droite. Puisque  $x, y$  et  $z$  sont irréductibles dans  $\mathbb{C}[x, y, z]$ , on en déduit (quitte à permuter  $P, Q$  et  $R$  encore une fois) qu'il existe des nombres complexes  $\zeta_1, \zeta_2$  et  $\zeta_3$  tels que  $P_1 = \zeta_1x$ ,  $Q_1 = \zeta_2y$ ,  $R_1 = \zeta_3z$  et  $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = 1$ . On substitue alors dans l'équation (5) et on trouve que  $\zeta_1, \zeta_2$  et  $\zeta_3$  valent  $\pm 1$ , puis que  $P_0, Q_0$  et  $R_0$  sont nuls. On a donc quatre possibilités pour  $\sigma$ ,

$$\sigma : \begin{cases} x \mapsto \zeta_1x \\ y \mapsto \zeta_2y \\ z \mapsto \zeta_3z \end{cases} \text{ avec } \zeta_i = \pm 1 \text{ et } \zeta_1\zeta_2\zeta_3 = 1,$$

et il suffit de vérifier qu'elles sont toutes dans  $H$ .

- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $r - 1$ , avec  $r \geq 2$ . L'équation (5) s'écrit

$$P_p^2 + \dots + Q_q^2 + \dots + R_r^2 + \dots - P_pQ_qR_r = x^2 + y^2 + z^2 - xyz.$$

Le degré total du membre de droite est 3. On en déduit que  $r = p + q$  (sinon, soit  $r > p + q$  et  $R_r^2$  est le seul terme de plus haut degré  $2r$  qui est pair, soit  $r < p + q$  et  $-P_pQ_qR_r$  est le seul terme de degré maximal  $p + q + r$  qui vaut au moins 4), puis que  $P_pQ_qR_r = R_r^2$  (ce sont les seuls termes de degré  $2r$ ).

On a donc  $P_pQ_q = R_r$ . L'hypothèse de récurrence montre alors que l'automorphisme

$$\sigma' = \beta \circ \sigma : \begin{cases} x \mapsto P(x, y, z) \\ y \mapsto Q(x, y, z) \\ z \mapsto (PQ - R)(x, y, z) \end{cases}$$

appartient à  $H$ , et donc l'automorphisme  $\sigma$  lui-même appartient à  $H$ . □

En particulier, les automorphismes de  $\mathbb{C}[x, y, z]$  préservant le polynôme de Markoff sont à coefficients entiers, i.e. les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont égaux.

On peut maintenant démontrer la proposition.

D'une part, le sous-groupe  $\langle \delta, \varepsilon \rangle$  de  $\Gamma$  engendré par  $\delta$  et  $\varepsilon$  est isomorphe au produit cartésien  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  via l'isomorphisme donné par  $\delta \mapsto (1, 0)$  et  $\varepsilon \mapsto (0, 1)$ , et ce sous-groupe est distingué dans  $\Gamma$ .

D'autre part, le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  est isomorphe à  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ . En effet, on a

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = \text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(\Theta) \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{Z}),$$

et l'isomorphisme est donné explicitement par

$$\begin{aligned} \alpha &\mapsto \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta &\mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma &\mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on a  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cap \langle \delta, \varepsilon \rangle = \{1\}$  et  $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \langle \delta, \varepsilon \rangle = H$ . D'où le résultat. □

Notons que dans le produit semi-direct  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ , l'action de  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est donnée explicitement par

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0) = (0, 1) \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0, 1) = (1, 1),$$



$$\begin{aligned} \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0) &= (1, 0) \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0, 1) = (1, 1), \\ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0) &= (1, 0) \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (0, 1) = (1, 1). \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que le groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est d'indice fini (égal à 4) dans  $\Gamma$ . Dans la suite, on s'intéressera principalement à l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ .

## 2. Étude dynamique de l'action du groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ sur les surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff

L'action décrite dans la première partie du travail donne lieu à des comportements dynamiques intéressants, dont nous allons essayer de donner quelques idées. En fait, les comportements sont très différents selon les surfaces de niveau considérées. Nous renvoyons à l'annexe F pour l'allure des surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff.

### 2.1. Description

Tout d'abord, commençons par définir une mesure positive  $\sigma$ -finie sur les surfaces de niveau réelles  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  munies de la tribu  $\mathcal{B}$  des boréliens pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Si l'on considère le polynôme de Markoff  $\kappa = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$  comme une application polynomiale de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut définir son gradient  $X = \mathrm{grad} \kappa$ . C'est un champ de vecteurs orthogonal en tout point aux surfaces de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  et dirigé selon les  $t$  croissants, donné explicitement par

$$X(x, y, z) = (2x - yz) \frac{\partial}{\partial x} + (2y - zx) \frac{\partial}{\partial y} + (2z - xy) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Considérons la 3-forme différentielle  $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$  sur  $\mathbb{R}^3$ , et soit

$$\Omega = i_X \omega = (2x - yz) dy \wedge dz + (2y - zx) dz \wedge dx + (2z - xy) dx \wedge dy$$

le produit intérieur de  $\omega$  par  $X$ . Un calcul montre que  $\Omega_{(x,y,z)} = 0$  si et seulement  $(x, y, z)$  est l'un des cinq points  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, -2, -2)$ ,  $(-2, 2, -2)$  ou  $(-2, -2, 2)$ . Notons que le point  $(0, 0, 0)$  appartient à la surface de niveau  $\kappa^{-1}(-2)$ , alors que les quatre autres points appartiennent à la surface de niveau  $\kappa^{-1}(2)$ . Ainsi, si l'on suppose  $t \neq \pm 2$ , alors  $\Omega$  ne s'annule pas sur  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ , et l'on retrouve le fait que cette variété est orientable (cf. annexe F). Le point 0 étant isolé dans la variété  $\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3$ , le même raisonnement montre que la variété  $(\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$  est orientable. Désignons désormais par  $M$  la variété  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  lorsque  $t \neq \pm 2$  et la variété  $(\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$  lorsque  $t = -2$ . Orientons  $M$  par le gradient de  $\kappa$ , à l'aide de l'orientation naturelle de  $\mathbb{R}^3$ .

Par un résultat classique, la 2-forme différentielle  $\Omega$  sur la variété orientée  $M$  définit une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sur  $M$  qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette mesure est donnée localement par

$$\int_U f d\mu = \int_{\phi(U)} f \circ \phi^{-1} (\phi^{-1})^* \Omega$$

pour toute carte locale orientée  $(U, \phi)$  de  $M$  et toute fonction  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  dont le support est contenu dans  $U$ . Montrons que cette mesure  $\mu$  est positive.

Notons que l'ensemble des points de  $M$  en lesquels le plan tangent à  $M$  est vertical forme une sous-variété  $N$  de  $M$  de dimension 1, donc de mesure de Lebesgue nulle, et donc également de mesure  $\mu$  nulle, car  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On va montrer que sur son complémentaire  $M \setminus N$ ,  $\mu$  est une mesure de densité positive par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui prouvera que la mesure  $\mu$  est positive sur tout  $M$ .

Sur  $M \setminus N$ , la coordonnée  $z$  s'exprime en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ . Plus précisément, pour tout point  $(x, y, z)$  de  $M \setminus N$ , on a  $z^2 - (xy)z + (x^2 + y^2 - t - 2) = 0$ , soit

$$z = \frac{1}{2}xy \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8}.$$

Plaçons-nous par exemple sur la composante de  $M \setminus N$  où

$$z = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8}.$$

On a alors

$$dz = \left( \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \frac{2xy^2 - 8x}{\sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8}} \right) dx + \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \frac{2x^2y - 8y}{\sqrt{x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8}} \right) dy.$$

En remplaçant dans l'expression

$$\Omega_{(x,y,z)} = (2x - yz) dy \wedge dz + (2y - zx) dz \wedge dx + (2z - xy) dx \wedge dy,$$

on trouve une égalité de la forme  $\Omega_{(x,y,z)} = g(x, y) dx \wedge dy$ , et on montre qu'on a  $g(x, y) > 0$  sur  $M \setminus N$ . En effet, on a vu que  $\Omega$ , donc  $g$  ne s'annule pas sur  $M \setminus N$ . Par continuité de  $g$ , il suffit de qu'on a  $g(x, y) > 0$  pour un certain point  $(x, y) \in M \setminus N$ , ce que l'on fait facilement. Ceci prouve la positivité de  $\mu$ .

Notons que nous n'avons pas défini de mesure pour  $t = 2$ . Il s'agit d'un cas plus délicat que nous ne traiterons pas. Nous renvoyons à [GOL3] pour plus de détails.

À présent, montrons que la mesure  $\mu$  ainsi définie est invariante sous l'action du groupe  $\Gamma$ , c'est-à-dire que pour tout sous-ensemble mesurable  $A$  de  $M$  et tout élément  $g$  de  $\Gamma$ , on a  $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$ . On sait que le groupe  $\Gamma$  est engendré par les automorphismes

$$\alpha : \begin{cases} x \mapsto z \\ y \mapsto x \\ z \mapsto y \end{cases}, \quad \beta : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto xy - z \end{cases}, \quad \gamma : \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto z \end{cases},$$

$$\delta : \begin{cases} x \mapsto -x \\ y \mapsto -y \\ z \mapsto z \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto -y \\ z \mapsto -z \end{cases}$$

de  $\mathbb{C}^3$ . Il suffit donc de vérifier l'invariance de la mesure  $\mu$  par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\varepsilon$ . Mais il est clair par construction que la mesure  $\mu$  est invariante par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\varepsilon$  si et seulement si la forme différentielle  $\Omega = i_X \omega$  l'est, ou encore si et seulement si le champ de vecteurs  $X$  et la forme différentielle  $\omega$  le sont. Il suffit donc de voir que cette dernière condition est vérifiée, ce qui consiste simplement en dix calculs. Ainsi, la mesure  $\mu$  est invariante sous l'action

du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ . Cette propriété est assez remarquable. Notons par exemple, à titre de comparaison, qu'il n'existe pas de mesure finie non nulle sur la droite projective  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  qui soit invariante sous l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$  par homographies.

Décrivons maintenant brièvement les différents comportements de l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur les surfaces de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ . Nous précisons plus loin ce qu'il faut entendre par une action ergodique. Le théorème suivant, qui traite plus généralement de l'action du groupe  $\Gamma$  des automorphismes polynomiaux à coefficients entiers de  $\mathbb{C}^3$  préservant le polynôme de Markoff, constitue le résultat principal de l'article de W.G. Goldman [GOL3] sur lequel se fonde notre travail.

**Théorème.** *Soit  $\kappa = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$  le polynôme de Markoff.*

- Pour  $t < -2$ , l'action du groupe  $\Gamma$  est propre sur la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .
- Pour  $-2 \leq t < 2$ , la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  possède cinq composantes connexes, dont une qui est compacte. L'action du groupe  $\Gamma$  est ergodique sur cette composante compacte, et propre sur son complémentaire.
- Pour  $t = 2$ , l'action du groupe  $\Gamma$  est ergodique sur le sous-ensemble  $\kappa^{-1}(2) \cap [-2, 2]^3$  de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(2)$ , et ergodique également sur son complémentaire.
- Pour  $2 < t \leq 18$ , le groupe  $\Gamma$  agit ergodiquement sur la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .
- Enfin, pour  $t > 18$ , le groupe  $\Gamma$  agit librement et proprement sur un certain ouvert  $\Omega_t$  de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ , en permutant ses composantes connexes. L'action sur le complémentaire de  $\Omega_t$  est ergodique.

Dans la suite, nous préférons souvent nous intéresser à l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ , dont la structure est plus simple que celle de  $\Gamma$ . Nous démontrons les résultats suivants :

- Pour  $t = -2$ , le groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  agit proprement sur  $\kappa^{-1}(t) \cap [2, \infty[^3$ .
- Pour  $-2 < t < 2$ , l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est ergodique sur la composante compacte de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .
- Pour  $2 < t \leq 18$ , l'action du groupe  $\Gamma$  est ergodique sur la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .

Notons que comme  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ , ceci implique des résultats analogues pour  $\Gamma$  dans les cas  $t = -2$  et  $-2 < t < 2$ .

## 2.2. Étude plus précise du cas $t = -2$

Nous allons être amenés à utiliser un peu de géométrie hyperbolique. Pour les premières définitions et propriétés, nous renvoyons à l'annexe E. Dans cette annexe, on a noté  $\mathbb{H}$  le demi-plan de Poincaré et  $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H})$  le groupe des isométries de  $\mathbb{H}$  qui préservent l'orientation.

### STRUCTURE HYPERBOLIQUE SUR UNE SURFACE

Une *structure hyperbolique* sur une surface  $S$  est la donnée en tout point  $x$  de  $S$  d'un produit scalaire sur l'espace tangent  $T_x S$  de manière localement isométrique à  $\mathbb{H}$ , c'est-à-dire de sorte que pour tout point  $x$  de  $S$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}$  tels que l'application tangente  $T_x \phi : T_x S \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{H}$  à  $\phi$  en  $x$  est une isométrie, où, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ ,  $T_z \mathbb{H}$  est muni du produit scalaire  $\frac{1}{\mathrm{Im}(z)} \langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple (fondamental).** *Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H})$ , alors la projection canonique  $\mathbb{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$  est un revêtement  $\mathcal{C}^\infty$  de la surface hyperbolique  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ .*

En fait, toute surface munie d'une structure hyperbolique dont la distance hyperbolique associée est complète est de la forme  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ . En effet, soit  $S$  une surface munie d'une structure hyperbolique complète  $\sigma$ . Soit  $p : \tilde{S} \rightarrow S$  son revêtement universel. En relevant sur  $\tilde{S}$  la structure hyperbolique  $\sigma$  de  $S$ , on obtient une structure hyperbolique complète  $\tilde{\sigma}$  sur la surface simplement connexe  $\tilde{S}$ . On admet le théorème suivant (voir par exemple [GHL]).

**Théorème (Cartan-Hadamard).** *Toute surface simplement connexe munie d'une structure hyperbolique complète est isométrique à  $\mathbb{H}$ .*

Ce théorème donne l'existence d'une isométrie  $\theta$  de  $\tilde{S}$  dans  $\mathbb{H}$ . Si  $S$  est orientée et si l'on oriente  $\tilde{S}$  de manière compatible pour le  $C^\infty$ -difféomorphisme local  $p$ , alors on peut même demander que cette isométrie  $\theta$  préserve l'orientation.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{S}, \tilde{\sigma}) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{H} \\ p \downarrow & & \\ (S, \sigma) & & \end{array}$$

Soit  $\mathcal{G}$  le groupe des automorphismes du revêtement  $p : \tilde{S} \rightarrow S$ , c'est-à-dire le groupe des homéomorphismes  $h$  de  $\tilde{S}$  tels que  $p \circ h = p$ . On sait que  $S$  est homéomorphe à  $\mathcal{G} \backslash \tilde{S}$  et que la structure hyperbolique relevée sur  $\tilde{S}$  est invariante par  $\mathcal{G}$ . Il existe donc une représentation  $r_\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \text{Isom}_+(\mathbb{H}) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $x \in \tilde{S}$  et tout  $g \in \mathcal{G}$  on ait  $\theta(g(x)) = r_\sigma(g)(\theta(x))$ . Cette représentation est définie à conjugaison près par  $\text{Isom}_+(\mathbb{H}) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Son image dans  $\text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2(\mathbb{R}))/\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  s'appelle la *représentation d'holonomie* de la structure hyperbolique  $\sigma$  de  $S$ , et est souvent encore notée  $r_\sigma$ .

Notons que pour toute structure hyperbolique  $\sigma$  sur  $S$ , la représentation  $r_\sigma$  est fidèle et discrète, au sens où son image est un sous-groupe discret de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . En effet, on montre (voir [RAT] par exemple) que  $r_\sigma$  est fidèle et discrète si et seulement si le groupe  $\mathcal{G}$  agit librement et proprement sur  $\mathbb{H}$  via l'isomorphisme  $\theta$ . Or le caractère propre de cette action résulte de la séparation de l'espace quotient  $S = \mathcal{G} \backslash \tilde{S}$ , et son caractère libre est un résultat classique, énoncé par exemple dans [PAU].

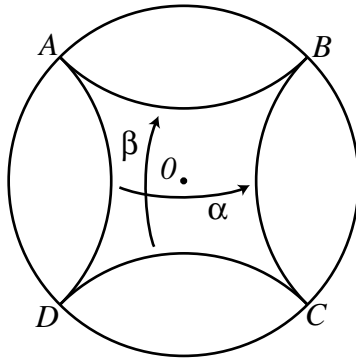
#### APPLICATION AU TORE PERCÉ $\mathring{\mathbb{T}}$

Soit  $\mathring{\mathbb{T}}$  le tore percé.

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les deux homographies du disque de Poincaré définies par les matrices

$$\xi = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \eta = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Sur le disque de Poincaré, si  $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ ,  $B = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ ,  $C = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$  et  $D = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$  désignent les points à l'infini sur les diagonales, l'homographie  $\alpha$  envoie la géodésique  $AD$  sur la géodésique  $BD$  (et  $A$  sur  $B$ ), tandis que l'homographie  $\beta$  envoie la géodésique  $DC$  sur la géodésique  $AB$  (et  $D$  sur  $A$ ).



On montre que le groupe  $\mathcal{G} = \langle \alpha, \beta \rangle$  engendré par ces deux transformations est un groupe libre à deux générateurs. Il agit librement et proprement sur le disque de Poincaré  $\mathbb{D}$ , et l'espace quotient  $\langle \alpha, \beta \rangle \backslash \mathbb{D}$  est  $C^\infty$ -difféomorphe au tore percé. Par conséquent, la projection canonique  $p : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{\mathbb{T}}$  est un revêtement universel du tore percé  $\tilde{\mathbb{T}}$ , et munit ce dernier d'une structure hyperbolique.

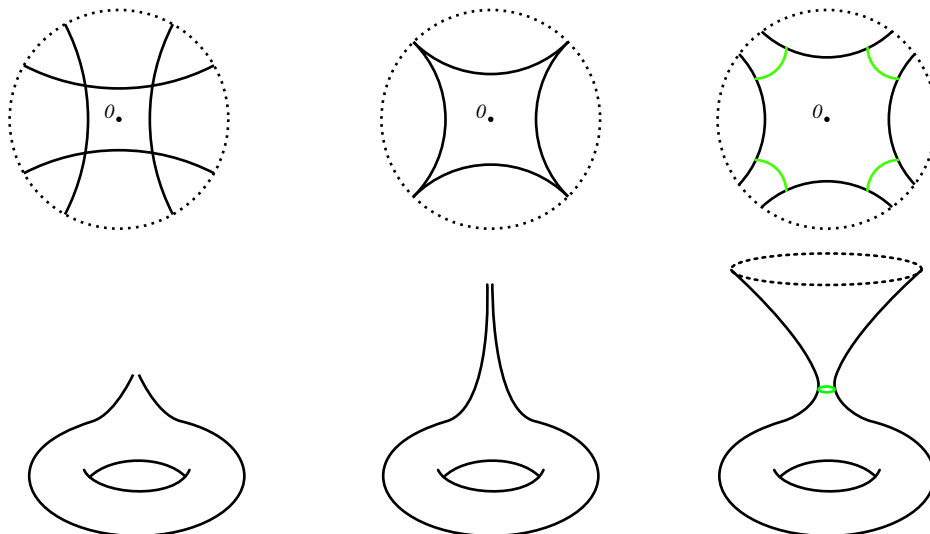
Notons que l'on aurait pu obtenir ce résultat plus directement grâce au théorème d'uniformisation de Riemann, en utilisant le fait que le tore percé  $\tilde{\mathbb{T}}$  peut être muni d'une structure de variété complexe sans bord de dimension 1, c'est-à-dire d'une structure de surface de Riemann, pour adopter un langage plus technique.

**Théorème (d'uniformisation de Riemann).** *Les seules surfaces de Riemann simplement connexes sont, à isomorphisme près, la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  (compactifié d'Alexandroff du plan complexe), le plan complexe  $\mathbb{C}$  et le disque hyperbolique  $\mathbb{D}$ .*

Nous ne démontrons pas ici ce théorème célèbre, mais renvoyons à [FK] pour une preuve.

Le revêtement universel  $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}$  ne peut pas être la sphère de Riemann, car le tore percé  $\tilde{\mathbb{T}}$  n'est pas compact. Il ne peut pas non plus être le plan complexe  $\mathbb{C}$ , car le groupe libre  $\pi$  n'est pas résoluble, alors que le groupe des automorphismes complexes de  $\mathbb{C}$  l'est. Par conséquent, le revêtement universel  $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}$  du tore percé  $\tilde{\mathbb{T}}$  est le disque hyperbolique.

Notons enfin que le type de singularité du tore percé dépend de la position des points  $A, B, C$  et  $D$ . La figure suivante montre comment divers positionnements de ces points permettent d'obtenir des singularités différentes.



Dans le premier cas, la métrique hyperbolique admet une singularité dite *conique*, au point correspondant au recollement des quatre sommets du carré hyperbolique. Dans le deuxième cas on parle de *pointe* (ou *cusps*), et dans le troisième de *bout évasé*.

On montre que l'on se trouve dans la première (respectivement la deuxième, la troisième) situation si et seulement si la matrice du commutateur des homographies  $\alpha$  et  $\beta$  est une matrice elliptique (respectivement parabolique, hyperbolique), selon la classification des éléments de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  vue dans l'annexe E.

#### CARACTÈRE PROPRE DE L'ACTION DE $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ SUR $\kappa^{-1}(-2) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$

Comme le sous-groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  est d'indice fini dans  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ , il suffit de montrer que l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\kappa^{-1}(-2) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  est propre.

Rappelons que la surface de niveau  $\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3$  du polynôme de Markoff est une sous-variété  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$  qui admet cinq composantes connexes : le point  $\{0\}$  et quatre hyperboloïdes qui sont des sous-variétés de dimension 2 incluses dans  $(] - \infty, -2] \cup [2, \infty[)^3$ .

Notons  $M$  la sous-variété  $\kappa^{-1}(-2) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  de dimension 2. On peut remarquer tout d'abord que l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{C}^3$  préserve  $M$ . En effet, on sait que  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est engendré par les éléments

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui correspondent respectivement aux transformations

$$\begin{cases} x \mapsto z \\ y \mapsto x \\ z \mapsto y \end{cases}, \quad \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto xy - z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \mapsto y \\ y \mapsto x \\ z \mapsto z \end{cases}$$

de  $\mathbb{C}^3$  (voir la présentation de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  par générateurs et relations donnée dans l'annexe B). On vérifie facilement que le sous-espace  $\kappa^{-1}(-2) \cap (] - \infty, -2] \cup [2, \infty[)^3$  est préservé par ces trois transformations.

À présent, esquissons une preuve du résultat suivant.

**Théorème.** *Le groupe  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$  agit proprement sur la variété  $M$ .*

Pour cela, on va étudier les différentes structures hyperboliques complètes de volume fini que l'on peut construire sur le tore percé  $\mathring{\mathbb{T}}$ .

**Démonstration.** Notons  $\Sigma$  l'espace des métriques hyperboliques complètes de volume fini sur le tore percé  $\mathring{\mathbb{T}}$ . Le groupe  $\mathrm{Diff}(\mathring{\mathbb{T}})$  des difféomorphismes  $C^\infty$  de  $\mathring{\mathbb{T}}$  agit naturellement sur  $\Sigma$  de la manière suivante : pour tout élément  $\sigma$  de  $\Sigma$  et tout difféomorphisme  $h$ , la distance  $d_{h \cdot \sigma}$  associée à la métrique hyperbolique  $h \cdot \sigma$  est donnée par

$$d_{h \cdot \sigma}(x, y) = d_\sigma(h^{-1}(x), h^{-1}(y))$$

pour tous  $x, y \in \mathring{\mathbb{T}}$ , où  $d_\sigma$  est la distance hyperbolique complète associée à  $\sigma$ . Une telle distance  $d_{h \cdot \sigma}$  définit comme  $d_\sigma$  une métrique hyperbolique complète de volume fini sur  $\mathring{\mathbb{T}}$ .

En particulier, le groupe  $\text{Diff}_0(\mathbb{T})$  des difféomorphismes de  $\mathbb{T}$  isotopes à l'identité agit naturellement sur  $\Sigma$ . Soit

$$\mathcal{T} = \Sigma / \text{Diff}_0(\mathbb{T})$$

l'espace quotient. On l'appelle l'*espace de Teichmüller* du tore percé  $\mathbb{T}$ . Si l'on note  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}))$  le groupe quotient  $\text{Diff}(\mathbb{T})/\text{Diff}_0(\mathbb{T})$ , alors l'action de  $\text{Diff}(\mathbb{T})$  sur  $\Sigma$  induit une action naturelle de  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}))$  sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$ . Cette action est propre, comme l'établit [GAR] par exemple.

Or les groupes  $\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}))$  et  $\text{Out}(\pi)$  sont isomorphes. En effet, tout homéomorphisme d'une surface est isotope à un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$ , et deux difféomorphismes  $\mathcal{C}^\infty$  qui sont homotopes sont également  $\mathcal{C}^\infty$ -isotopes (voir [MOI]), donc l'inclusion  $\text{Diff}(\mathbb{T}) \subset \text{Homéo}(\mathbb{T})$  induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T})) \simeq \text{Homéo}(\mathbb{T}).$$

Or on a vu au début de la partie 1.2 que le «mapping class group»  $\text{Homéo}(\mathbb{T})$  est isomorphe au groupe  $\text{Out}(\pi)$ .

Soit  $l : \text{Out}(\pi) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(\mathbb{T}))$  un isomorphisme. Soit  $\tau$  l'automorphisme du groupe  $\pi$  défini par  $\tau(X) = X^{-1}$  et  $\tau(Y) = Y^{-1}$ . L'isomorphisme  $l$  envoie  $\tau$  sur la classe de la symétrie centrale par rapport à un axe passant par le trou du tore percé  $\mathbb{T}$  et traversant le tore percé de façon symétrique. Or cette symétrie, en tant qu'élément de  $\text{Diff}(\mathbb{T})$ , agit trivialement sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$ . De plus, on a vu dans la partie 1.2 que le groupe quotient  $\text{Out}(\pi)/\langle \tau \rangle = \text{Ker}(\Psi)$  est isomorphe à  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . Par conséquent, l'action (propre) de  $\text{Out}(\pi)$  sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  induit une action propre du groupe  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathcal{T}$ .

Pour prouver que l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  sur la variété  $M = (\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$  est propre, nous allons montrer qu'il existe un homéomorphisme  $h$  de  $M$  sur quatre copies de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  du tore percé  $\mathbb{T}$  qui est équivariant pour l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , i.e. tel que pour tout  $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  et tout  $u = (x, y, z) \in M$  on a  $h(\gamma \cdot u) = \gamma \cdot h(u)$ .

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{T}$  dans l'espace

$$\{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

qui à une structure hyperbolique  $\sigma$  associe la classe de conjugaison de sa représentation d'holonomie  $r_\sigma$ . Cette application est équivariante pour l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , car elle l'est pour l'action de  $\text{Out}(\pi)$  : pour tout  $\gamma \in \text{Out}(\pi)$  et tout  $W \in \pi$ , on a  $r_\sigma(\gamma \cdot W) = \gamma \cdot r_\sigma(W)$ .

Soit  $\sigma \in \Sigma$  une structure hyperbolique. Comme la représentation  $r_\sigma \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$  est fidèle et discrète, aucun élément de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  de la forme  $r_\sigma(W)$  avec  $W \in \pi$  ne peut être elliptique. Le sous-groupe  $r_\sigma(\pi)$  de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est donc composé uniquement d'éléments hyperboliques et paraboliques et de l'identité. De plus,  $\sigma$  étant de volume fini, on ne peut pas être en présence d'une singularité à bout évasé sur le tore percé, ce qui implique que l'image  $r_\sigma([X, Y])$  du commutateur de  $X$  et de  $Y$  n'est pas hyperbolique. Ce n'est évidemment pas non plus l'identité puisque la représentation  $r_\sigma \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$  est fidèle. C'est donc un élément parabolique, selon la classification des éléments de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  donnée dans l'annexe E. De manière équivalente, sa trace vaut 2 en valeur absolue.

Or, toute représentation  $r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$  se relève en une représentation  $\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$  (voir par exemple [CUL]), i.e. si  $p_1 : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  est le revêtement canonique trivial à deux feuillets, alors le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & \text{SL}_2(\mathbb{R}) & \\ & \nearrow \tilde{r} & \downarrow p_1 \\ \pi & \xrightarrow{r} & \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

De plus, pour toute représentation fidèle et discrète  $r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$ , l'égalité  $|\text{tr } r_\sigma([X, Y])| = 2$  implique l'égalité  $\text{tr } \tilde{r}_\sigma([X, Y]) = -2$ , par des arguments analogues à ceux que donne [CG]. Par conséquent, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & \{\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète} \mid \text{tr } r([X, Y]) = -2\} & \\ & \uparrow & \downarrow \tilde{r} \mapsto p_1 \circ \tilde{r} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\bar{\sigma} \mapsto r_\sigma} \{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} & \end{array}$$

Mais l'action de  $-I_2$  sur  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$  par conjugaison au but est triviale. L'action de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  induit donc, par passage au quotient par  $\{\pm I_2\}$ , une action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , ce qui permet d'identifier les espaces

$$\{\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète} \mid \text{tr } \tilde{r}([X, Y]) = -2\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

et

$$\{\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète} \mid \text{tr } \tilde{r}([X, Y]) = -2\} / \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Or, l'inclusion  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R})) \hookrightarrow \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  induit une injection continue de l'espace

$$\{\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète} \mid \text{tr } \tilde{r}_\sigma([X, Y]) = -2\} / \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

dans l'espace

$$\{\tilde{r} \in \text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{C})) \text{ fidèle et discrète} \mid \text{tr } \tilde{r}_\sigma([X, Y]) = -2, (\tilde{r}_\sigma(X), \tilde{r}_\sigma(Y), \tilde{r}_\sigma(XY)) \in \mathbb{R}^3\} / \text{SL}_2(\mathbb{C}),$$

ce dernier étant homéomorphe à  $M$  via  $\bar{\phi}$ . Des arguments sur les formes réelles de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  permettent alors d'affirmer que cette injection continue est un homéomorphisme : nous renvoyons à [FH] et à [GOL3] pour plus de détails. Si l'on note

$$p_2 : M \longrightarrow \{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

l'application induite par l'homéomorphisme précédent et par l'application naturelle de  $\text{Hom}(\pi, \text{SL}_2(\mathbb{R}))$  dans  $\text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R}))$ , alors  $p_2$  est un revêtement trivial à deux feuillets, et le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \uparrow & \downarrow p_2 \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{f} \{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R}) & \end{array}$$

Comme la variété  $M$  possède quatre composantes connexes, l'espace

$$\{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

en possède deux. D'après [HIT], l'application

$$f : \mathcal{T} \longrightarrow \{r \in \text{Hom}(\pi, \text{PSL}_2(\mathbb{R})) \text{ fidèle et discrète}\} / \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

est un homéomorphisme sur son image, et cette dernière est l'une des deux composantes connexes de l'espace d'arrivée. Par conséquent, il existe un homéomorphisme  $h$  de la variété  $M$  sur quatre copies de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  du tore percé qui est équivariant pour l'action de  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , ce qui termine la démonstration.  $\square$



### 2.3. Étude plus précise du cas $-2 < t < 2$

Nous allons nous intéresser au caractère ergodique de l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur la composante compacte  $C_t$  de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  dans le cas  $-2 < t < 2$ .

**Définition.** Soient  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable muni d'une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\mu$ , et  $G$  un groupe dénombrable agissant sur  $X$  en préservant la mesure, c'est-à-dire vérifiant  $\mu(g \cdot B) = \mu(B)$  pour tout  $B \in \mathcal{B}$  et tout  $g \in G$ . On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est ergodique si pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , l'égalité  $g(B) = B$  pour tout  $g \in G$  implique que la mesure de  $B$  est nulle ( $\mu(B) = 0$ ) ou totale ( $\mu(X \setminus B) = 0$ ).

On a vu que l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  préserve la mesure  $\mu$  définie un peu plus haut. Montrons maintenant que cette action est ergodique sur la composante compacte  $C_t$  de  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  pour  $-2 < t < 2$ . L'action définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $C_t$ , dont les classes d'équivalence sont les orbites de l'action, et pour des raisons techniques on préférera s'intéresser de manière équivalente à l'ergodicité de la relation d'équivalence mesurée  $\mathcal{R}$ , selon la définition suivante.

**Définition.** Soit  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable muni d'une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$ .

On dit qu'une relation d'équivalence  $\mathcal{R} \in X \times X$  est mesurée si  $\mathcal{R}$  est une partie mesurable de  $X \times X$ , si les classes d'équivalence sont dénombrables, et si  $\mathcal{R}$  préserve la mesure  $\mu$ , au sens où pour tous les ensembles mesurables  $A$  et  $B$  tels qu'il existe une bijection  $f : A \rightarrow B$  vérifiant  $f(a)\mathcal{R}a$  pour tout  $a \in A$ , on a  $f_*\mu|_A = \mu|_B$ .

On dit de plus qu'une telle relation d'équivalence mesurée est ergodique si toute partie mesurable saturée de  $X$  (i.e. qui contient la classe d'équivalence de chacun de ses points) est de mesure nulle ou totale.

Notons que si  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence mesurée sur  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , alors le saturé de tout ensemble de mesure nulle est encore de mesure nulle. En particulier, pour toute propriété  $\mathcal{P}$ , les expressions «pour presque tout  $x$ , la classe de  $x$  vérifie  $\mathcal{P}$ » et «presque toute classe vérifie  $\mathcal{P}$ » sont équivalentes.

Le lemme suivant nous sera très utile par la suite.

**Lemme.** Une relation d'équivalence mesurée  $\mathcal{R}$  est ergodique si et seulement si toute fonction mesurable constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  est constante  $\mu$ -presque partout sur  $X$ .

**Démonstration.** Si  $\mathcal{R}$  est ergodique, alors chaque classe d'équivalence est de mesure nulle ou totale. Il y a donc au plus une classe de mesure totale. Soit  $f$  une fonction constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ . Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas presque partout constante. Alors il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que les ensembles mesurables  $\{x \in X \mid f(x) < \lambda\}$  et  $\{x \in X \mid f(x) \geq \lambda\}$  sont tous deux de mesure non nulle et non totale. Comme  $f$  est constante sur les classes d'équivalence, ces deux ensembles sont saturés, ce qui contredit le caractère ergodique de la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ .

Réciproquement, supposons que toute fonction constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  est constante  $\mu$ -presque partout sur  $X$ . Soit  $A$  une partie mesurable saturée de  $X$ . La fonction caractéristique de  $A$  est constante sur les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ , donc  $A$  est de mesure nulle ou totale.  $\square$

Avant de démontrer le résultat principal de ce paragraphe, introduisons une dernière définition.

**Définition.** Soit  $\pi : X \rightarrow Y$  une application mesurable, où  $(X, \mathcal{B})$  est un espace mesurable muni d'une mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$ . On a  $X = \coprod_{y \in Y} \pi^{-1}(\{y\})$ .

On dit que la mesure  $\mu$  se désintègre si pour  $\pi_*\mu$ -presque tout  $y \in Y$ , il existe une mesure  $\nu_y$  sur  $\pi^{-1}(y)$  telle que pour toute fonction mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application  $y \mapsto \int_{\pi^{-1}(\{y\})} f d\nu_y$  est mesurable pour  $\pi_*\mu$  et

$$\int_X f d\mu = \int_{y \in Y} \left( \int_{\pi^{-1}(\{y\})} f d\nu_y \right) d\pi_*\mu(y).$$

On peut maintenant démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** Pour  $t \in ]-2, 2[$ , l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est ergodique sur  $C_t$ .

**Démonstration.** Pour tout  $x \in ]-2, 2[$ , posons  $E(x) = C_t \cap (e_x^*)^{-1}(x)$ , où  $e_x^*$  désigne l'application première coordonnée. L'ensemble

$$E(x) = \{x\} \times \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2+x}{4}(y+z)^2 + \frac{2-x}{4}(y-z)^2 = 2+t-x^2\}$$

est une ellipse. Effectuons le changement de variable linéaire

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2}y + \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2}z \\ z' = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2}y + \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2}z \end{cases}.$$

On vérifie que

$$E(x) = \{x\} \times \{(y', z') \in \mathbb{R}^2 \mid y'^2 + z'^2 = 2+t-x^2\}$$

est un cercle dans le nouveau système de coordonnées.

Soit  $\tau_X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  l'élément de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  dont l'action sur  $\mathbb{C}^3$  est donnée par

$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto z \\ z \mapsto xz - y \end{cases}$$

dans les coordonnées usuelles. Dans les nouvelles coordonnées introduites ci-dessus, elle est donnée par

$$\tau_X : \begin{pmatrix} x \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

avec  $\theta = \cos^{-1}(\frac{x}{2})$ . Il s'agit donc d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $\mathbb{R}e_x$ , qui préserve le cercle  $E(x)$ .

Notons que la mesure  $\mu$  se désintègre sur  $\mathbb{R}$ , via la projection  $e_x^* : M \rightarrow \mathbb{R}$ , en la mesure de Lebesgue sur  $E(x)$  (voir par exemple [GOL3]). Cette dernière mesure est invariante par  $\tau_X$ .

Dès que  $\frac{\theta}{\pi} = \frac{\cos^{-1}(\frac{x}{2})}{\pi}$  est irrationnel, ce qui est vrai pour presque tout  $x \in ]-2, 2[$  au sens de la mesure de Lebesgue,  $\tau_X$  agit sur  $E(x)$  par une rotation d'ordre infini, et l'action est donc ergodique sur  $E(x)$  (voir [BP]). Grâce au lemme énoncé plus haut, on en déduit qu'à  $x$  fixé, toute fonction mesurable  $f$  invariante par  $\tau_X$  est constante Lebesgue-presque partout sur  $E(x)$ , donc finalement

que  $f$  coïncide  $\mu$ -presque partout sur  $C_t$  avec une fonction ne dépendant que de  $x$ .

Introduisons ensuite l'élément  $\tau_Y = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  correspondant à l'action

$$\begin{cases} x \mapsto z \\ y \mapsto y \\ z \mapsto yz - x \end{cases}$$

sur  $\mathbb{C}^3$ . En raisonnant de même, on montre que toute fonction mesurable invariante par  $\tau_Y$  coïncide  $\mu$ -presque partout sur  $C_t$  avec une fonction ne dépendant que de  $y$ .

Par conséquent, toute fonction mesurable invariante par l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  est constante  $\mu$ -presque partout. D'après le lemme ci-dessus, ceci implique que l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $C_t$  est ergodique.  $\square$

En particulier, le groupe  $\Gamma$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$  préservant le polynôme de Markoff, qui est isomorphe à un produit semi-direct  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$ , agit de manière ergodique sur la surface de niveau  $M = \kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .

## 2.4. Étude plus précise du cas $2 < t \leq 18$

Pour  $t \in ]2, 18]$ , l'action du groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur la surface de niveau  $M = \kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  n'est plus ergodique. Toutefois, on a le résultat suivant.

**Théorème.** *Pour  $t \in ]2, 18]$ , l'action du groupe  $\Gamma$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^3$  préservant le polynôme de Markoff est ergodique sur la surface de niveau  $M = \kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ .*

La démonstration de ce résultat repose largement sur la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable muni d'une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\mu$ . Soient  $A$  une partie mesurable de  $X$ , et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence mesurée sur  $X$ . On suppose que presque tout élément  $x$  de  $X$  est en relation avec un élément  $a$  de  $A$ . Alors la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est ergodique si et seulement si la relation induite  $\mathcal{R}|_{A \times A}$  sur  $A$  est ergodique pour la mesure induite  $\mu|_A$ .*

**Démonstration.** Supposons  $\mathcal{R}$  ergodique. Soit  $f$  une fonction constante sur presque toutes les classes d'équivalence de la relation induite  $\mathcal{R}|_{A \times A}$ . On prolonge  $f$  en une fonction  $g$  constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ . Comme  $\mathcal{R}$  est ergodique,  $g$  est constante presque partout sur  $X$ , donc  $f$  est constante presque partout sur  $A$ , et la relation induite  $\mathcal{R}|_{A \times A}$  est ergodique.

Réciproquement, supposons  $\mathcal{R}|_{A \times A}$  ergodique. Soit  $f$  une fonction constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$ . En particulier,  $f$  est constante sur presque toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}|_{A \times A}$ , donc la restriction  $f|_A$  de  $f$  à  $A$  est constante presque partout, égale à  $\lambda$ . Introduisons le sous-ensemble mesurable

$$A' = \{a \in A \mid f(a) \neq \lambda\}$$

de  $A$ . Il est de mesure nulle, donc son saturé aussi, car  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence mesurée. Or,  $f$  est constante sur les classes d'équivalence, donc on a  $f(x) = \lambda$  pour tout  $x \in X$  n'appartenant pas au saturé de  $A'$ , donc pour presque tout  $x \in X$ . On en déduit que la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est ergodique.  $\square$

Donnons à présent une démonstration du théorème.

**Démonstration.** Notons  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $M$  définie par «être dans la même orbite pour l'action de  $\Gamma$ » .

Posons

$$A = \{(x, y, z) \in M \mid -2 < x, y < 2\}.$$

On utilise le lemme suivant, dont la démonstration est donnée plus loin.

**Lemme.** *Pour tout  $u \in M$ , on a  $(\Gamma \cdot u) \cap A \neq \emptyset$ .*

D'après la proposition précédente, il suffit donc de montrer que la relation d'équivalence  $\mathcal{R}|_{A \times A}$  induite sur  $A$  est ergodique.

Considérons l'élément  $Q_z$  de  $\Gamma$  défini par

$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y \\ z \mapsto xy - z \end{cases}.$$

C'est une involution qui préserve  $M$ .

Notons  $\Pi_{(x,y)} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection sur le plan  $(x, y)$ . Un calcul simple montre que l'on a

$$\text{Im } \Pi_{(x,y)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 4)(y^2 - 4) + t - 2 \geq 0\},$$

d'où  $\Pi_{(x,y)}(A) = ] - 2, 2[ \times ] - 2, 2[$ .

**Lemme.** *La relation d'équivalence  $\mathcal{R}|_{A \times A}$  est ergodique sur  $A$  si et seulement si la relation d'équivalence induite sur  $\Pi_{(x,y)}(A) = ] - 2, 2[ \times ] - 2, 2[$  l'est.*

**Preuve.** Soit  $(x_0, y_0) \in \text{Im } \Pi_{(x,y)}$ . On a

$$\Pi_{(x,y)}^{-1}(x_0, y_0) = \left\{ \frac{1}{2}x_0y_0 + \frac{1}{2}\sqrt{x_0^2y_0^2 - 4x_0^2 - 4y_0^2 + 8}, \frac{1}{2}x_0y_0 - \frac{1}{2}\sqrt{x_0^2y_0^2 - 4x_0^2 - 4y_0^2 + 8} \right\}.$$

Ainsi, l'image réciproque de  $(x_0, y_0)$  par  $\Pi_{(x,y)}$  est de cardinal 2, sauf quand  $x_0^2y_0^2 - 4x_0^2 - 4y_0^2 + 8 = 0$ . Mais l'ensemble  $\{(x, y) \in \text{Im } \Pi_{(x,y)} \mid x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 8 = 0\}$  est de mesure de Lebesgue nulle. Plaçons-nous sur son complémentaire  $\mathcal{C}$  dans  $\text{Im } \Pi_{(x,y)}$ . Ce qui précède montre que la restriction  $\Pi_{(x,y)|_{\mathcal{C}}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un revêtement à deux feuilletts. Comme l'automorphisme polynomial  $Q_z$  défini ci-dessus appartient au groupe  $\Gamma$ , les deux points  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $(x_0, y_0, x_0y_0 - z_0)$  de la fibre au-dessus d'un point  $(x_0, y_0) \in \text{Im } \Pi_{(x,y)}$  sont dans la même classe d'équivalence. La proposition précédente s'applique donc, et dit que la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $A$  est ergodique si et seulement si la relation induite  $\mathcal{R}|_{B \times B}$  l'est, où  $B$  désigne l'ensemble  $\{(x_0, y_0, \frac{1}{2}x_0y_0 + \frac{1}{2}\sqrt{x_0^2y_0^2 - 4x_0^2 - 4y_0^2 + 8}) \in M\}$ .

Or, la restriction de  $\Pi_{(x,y)}$  à  $B$  est un homéomorphisme sur son image, donc la relation  $\mathcal{R}|_{B \times B}$  est ergodique si et seulement si la relation induite sur  $\Pi_{(x,y)}(A) = ] - 2, 2[ \times ] - 2, 2[$  l'est.  $\square$

Maintenant, soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable invariante sous l'action de  $\Gamma$ . En particulier,  $f$  est invariante sous l'action de  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ . En raisonnant comme dans la preuve de l'ergodicité dans le cas  $-2 < t < 2$ , on montre que la fonction  $\bar{f} : ] - 2, 2[ \times ] - 2, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$  induite par  $f$  est ergodique. Le lemme ci-dessus termine la démonstration.  $\square$

Démontrons maintenant le premier lemme utilisé dans la preuve du théorème.

**Lemme.** *Pour tout  $u \in M$ , on a  $(\Gamma \cdot u) \cap A \neq \emptyset$ .*

**Démonstration.** Soit  $u = (x, y, z) \in M$ . On commence par trouver  $u' \in ] - \infty, 2[$  tel que  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  sont situés dans la même orbite.

Si  $u \in ] - \infty, 2[$ , c'est fini. Supposons donc que ce n'est pas le cas.

Quitte à appliquer des automorphismes permutant  $x, y$  et  $z$  (ces automorphismes appartiennent à  $\Gamma$ ), on peut supposer  $2 < x \leq y \leq z$ .

**Sous-lemme.** Posons  $z' = xy - z$ . Alors on a  $z - z' > 2\sqrt{t-2}$ .

**Preuve.** Définissons une fonction quadratique

$$\begin{aligned} \kappa_{x,y} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \kappa(x, y, z) - 2 = z^2 - (xy)z + (x^2 + y^2 - 4). \end{aligned}$$

On a  $\kappa_{x,y}(z) \leq 0$  si et seulement si  $z$  appartient au segment

$$\left[ \frac{1}{2}(xy - \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}), \frac{1}{2}(xy + \sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}) \right].$$

Posons  $\zeta_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(xy + \varepsilon\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)})$ , avec  $\varepsilon \in \{+, -\}$ . On a  $\kappa_{x,y}(z) = \kappa(x, y, z) - 2 = t - 2 > 0$  par hypothèse, donc  $z > \zeta_+(x, y)$ , et donc  $z' < \zeta_-(x, y) < \zeta_+(x, y) < z$ . Or on a  $(z - z')^2 = 4(\kappa(x, y, z) - 2) + (x^2 - 4)(y^2 - 4) > 4(\kappa(x, y, z) - 2)$ , d'où  $z - z' > 2\sqrt{\kappa(x, y, z) - 2} = 2\sqrt{t-2}$ .  $\square$

Ainsi, l'automorphisme polynomial  $Q_z$  préservant  $M$  introduit dans la preuve du théorème, défini par

$$\begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y \\ z \mapsto xy - z \end{cases},$$

fait diminuer la coordonnée  $z$  d'une quantité strictement supérieure à  $2\sqrt{t-2}$ . Si l'on a  $z' = xy - z \leq 2$ , alors  $u' = Q_z \cdot u = (x, y, z')$  convient. Sinon, on réitère le processus, et pour  $k \geq \frac{x+y+z-6}{2\sqrt{t-2}}$  le point  $u' = Q_z^k \cdot u$  convient.

Ainsi, il existe  $u' \in ]-\infty, 2[$  tel que  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  sont situés dans la même orbite. Comme  $M \cap ]-\infty, -2]^3 = \emptyset$ , on a nécessairement  $-2 < x' < 2$ ,  $-2 < y' < 2$  ou  $-2 < z' < 2$ . Comme les permutations des coordonnées  $x, y$  et  $z$  sont des éléments de  $\Gamma$ , on peut supposer sans restriction  $-2 < x' < 2$ .

Dans la démonstration de l'ergodicité de l'action de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $C_t$  dans le cas  $-2 < t < 2$ , on a vu que  $\tau_X = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  agit sur l'ellipse

$$E(x') = \{x'\} \times \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2+x'}{4}(y+z)^2 + \frac{2-x'}{4}(y-z)^2 = 2+t-x'^2\}$$

par rotation. Il suffit donc d'appliquer une puissance de  $\tau_X$  à  $u'$  pour obtenir un point  $u'' = (x'', y'', z'')$  situé dans la même orbite que  $u$  et tel que  $-2 < x'', y'' < 2$ .  $\square$

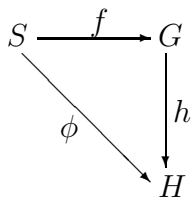
# Annexes

## Annexe A : Groupes libres

### DÉFINITION

Soient  $G$  un groupe,  $S$  un ensemble et  $f$  une application de  $S$  dans  $G$ .

On dit que  $G$  est *librement engendré* par  $S$  (via  $f$ ), ou que  $G$  est un *groupe libre* engendré par  $S$ , si la propriété universelle suivante est vérifiée : pour tout groupe  $H$ , pour toute application  $\phi$  de  $S$  dans  $H$ , il existe un unique morphisme de groupes  $h$  de  $G$  dans  $H$  tel que le diagramme suivant commute.

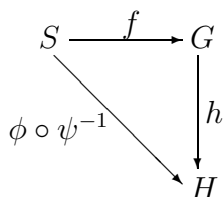


### REMARQUES

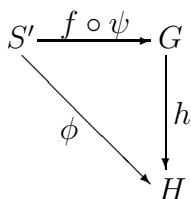
L'injectivité de  $f$  est une conséquence de la définition. En effet, si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux éléments distincts de  $S$ , il suffit d'appliquer cette définition au groupe  $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et à une application  $\phi$  de  $S$  dans  $H$  telle que  $\phi(x_1) = 0$  et  $\phi(x_2) = 1$ . Les deux points sont alors séparés.

La définition implique aussi que  $f(S)$  engendre  $G$ . En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément  $x \in G$  qui n'est pas dans le sous-groupe  $G'$  de  $G$  engendré par  $f(S)$ . Soit  $H$  l'image réciproque de  $G'$  par le morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  dans  $G$  défini par  $n \mapsto x^n$ . En considérant le groupe quotient  $\mathbb{Z}/H$  et l'application nulle, on obtient deux morphismes distincts qui conviennent, l'un envoyant  $x$  sur 0 et l'autre sur 1, ce qui contredit l'unicité de  $h$ .

Si  $S'$  est un ensemble en bijection avec  $S$  via une application  $\psi$ , alors le groupe  $G$  est aussi librement engendré par  $S'$ , via  $f \circ \psi$ . En effet pour tout groupe  $H$ , pour toute application  $\phi$  de  $S'$  dans  $H$ ,  $\phi \circ \psi^{-1}$  est un morphisme de groupes de  $S$  dans  $H$ . Soit  $h$  une application de  $G$  dans  $H$  tel que le diagramme



commute. Alors on a bien la commutativité du diagramme suivant.



Réciproquement, si  $h : G \rightarrow H$  est un morphisme faisant commuter le second diagramme, alors  $h$  fait commuter le premier diagramme, d'où l'unicité de  $h$ .

## EXISTENCE ET UNICITÉ

On va montrer ici l'existence et l'unicité du groupe libre engendré par  $S$ . L'unicité est facile et fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit  $S$  un ensemble. Lorsqu'il existe, le groupe  $G$  librement engendré par  $S$  est unique à unique isomorphisme près.*

**Démonstration.** Si  $G$  et  $G'$  sont librement engendrés par  $S$  via  $f$  et  $f'$  respectivement, alors il existe un unique morphisme de groupe  $h$  de  $G$  dans  $G'$  et un unique morphisme de groupe  $h'$  de  $G'$  dans  $G$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow f' & \updownarrow \begin{array}{l} h' \\ h \end{array} \\ & & G' \end{array}$$

commute. On a donc la commutativité du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ & \searrow f' & \downarrow h' \circ h \\ & & G' \end{array}$$

Par unicité du morphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$  dans la propriété universelle, les morphismes  $h$  et  $h'$  sont inverses l'un de l'autre. Le morphisme de groupes  $h$  est donc l'unique isomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$ .  $\square$

L'existence se fait par construction explicite d'un groupe ayant les propriétés qui nous intéressent.

**Proposition.** *Soit  $S$  un ensemble. Il existe un groupe libre engendré par  $S$ .*

**Démonstration.** On peut supposer  $S$  non vide, car sinon  $G = \{1\}$  convient.

Soit  $S^{-1}$  un ensemble disjoint de  $S$  en bijection avec  $S$ , dont les éléments seront indicés par  $S$  :

$$S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}.$$

On appelle *alphabet construit à partir de  $S$*  l'ensemble  $\mathbb{A} = S \sqcup S^{-1}$ .

Un *mot*  $W$  sur l'alphabet  $\mathbb{A}$  est par définition une suite finie d'éléments de  $\mathbb{A}$ . On notera  $W = w_1 w_2 \dots w_n$  cette suite, et on appellera *longueur* de  $W$ , que l'on notera  $\ell(W)$ , l'entier  $n$ . Le mot de longueur 0 sera appelé le *mot vide* et noté  $\varepsilon$ . L'ensemble des mots sur l'alphabet  $\mathbb{A}$  sera noté  $\mathbb{A}^*$ .

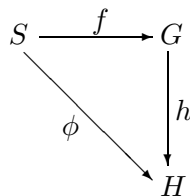
On définit l'opération de *concaténation* par  $WW' = w_1 \dots w_n w'_1 \dots w'_m$  pour tous  $W = w_1 \dots w_n$  et  $W' = w'_1 \dots w'_m \in \mathbb{A}^*$ , et l'*inverse* par  $W^{-1} = w_n^{-1} \dots w_1^{-1}$  pour tout  $W = w_1 \dots w_n \in \mathbb{A}^*$  (avec la convention  $(w^{-1})^{-1} = w$ ).

Il est clair que la loi de concaténation est associative et que le mot vide est l'élément neutre pour cette loi. Cependant, seul le mot vide est inversible pour la loi de concaténation (en effet, si  $W$  et  $W'$  sont deux mots sur  $\mathbb{A}$ , on a  $\ell(WW') = \ell(W) + \ell(W')$ , or le mot vide est le seul mot de longueur nulle).

Pour obtenir un groupe, on commence par définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des mots  $\mathbb{A}^*$  : si  $W$  et  $W'$  sont deux mots sur  $\mathbb{A}$ , on dit qu'ils sont *équivalents*, et l'on note  $W \sim W'$ , si l'on peut obtenir  $W'$  à partir de  $W$  par un nombre fini d'opérations du type

- insertion de  $aa^{-1}$  ou  $a^{-1}a$  pour  $a \in \mathbb{A}$ ,
- suppression de  $aa^{-1}$  ou  $a^{-1}a$  pour  $a \in \mathbb{A}$ .

On montre alors (voir par exemple [DUB] ou [MKS]) que  $\mathbb{A}^*/\sim$  est un groupe pour la loi de concaténation induite (le plus difficile est de montrer la compatibilité de la concaténation et l'associativité de la loi induite), et satisfait les propriétés de la définition : si  $f$  est l'application qui à  $s \in S$  associe  $s \in \mathbb{A}$  et si  $H$  est un groupe et  $\phi$  une application de  $S$  dans  $H$ , il suffit de poser  $h(f(s)) = \phi(s)$  pour tout  $s \in S$  pour obtenir la commutativité du diagramme ci-dessous.



Par ailleurs, l'image de  $S$  par  $f$  engendre  $\mathbb{A}^*/\sim$ , ce qui assure l'unicité d'un tel  $h$ . □

Si  $n$  est un entier strictement positif et  $S$  un ensemble à  $n$  éléments, on appelle *groupe libre à  $n$  générateurs*, noté  $\mathbb{L}_n$ , l'unique groupe librement engendré par  $S$  (il ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de  $S$ ).

Dans la suite, on notera  $\{X, Y\}$  une partie génératrice libre de  $\mathbb{L}_2$ .

## Annexe B : Présentations de groupes par générateurs et relations

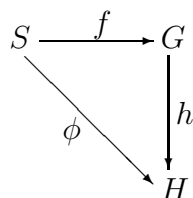
### GÉNÉRALITÉS

Soient  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{A} = S \sqcup S^{-1}$  l'alphabet construit à partir de  $S$ . Soient  $R_1, \dots, R_m$  des mots sur l'alphabet  $\mathbb{A}$ .

On dit qu'un groupe  $G$  admet la *présentation par générateurs et relations* (ou plus simplement la *présentation*)  $G = \langle s_1, \dots, s_n \mid R_1, \dots, R_p \rangle$  s'il existe une application  $f$  de  $S$  dans  $G$  telle que

1. pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , on a  $R_k(f(s_1), \dots, f(s_n)) = \text{Id}_G$ ,
2. pour tout groupe  $H$ , pour toute application  $\phi$  de  $S$  dans  $H$  telle que  $R_k(\phi(s_1), \dots, \phi(s_n)) = \text{Id}_H$  pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ , il existe un unique morphisme de groupes  $h$  de  $G$  dans  $H$  tel que le diagramme suivant commute.





De même que pour les groupes libres, on montre les propriétés suivantes :

- l'ensemble  $f(S)$  engendre le groupe  $G$ ,
- si un ensemble  $S' = \{s'_1, \dots, s'_n\}$  est en bijection avec  $S$  via une application  $\psi$ , alors le groupe  $G$  admet aussi la présentation  $\langle s'_1, \dots, s'_n \mid \psi(R_1), \dots, \psi(R_p) \rangle$ .

On montre aussi l'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un tel groupe  $G$  (voir par exemple [MKS]).

On note que dans ce cas, le groupe  $G$  est égal au quotient du groupe libre engendré par  $S$  par son sous-groupe distingué engendré par les éléments  $R_1, \dots, R_p$ .

Notons enfin que la présentation d'un groupe n'a aucune raison d'être unique, comme le montre l'exemple important ci-dessous.

## PRODUITS ET QUOTIENTS DE GROUPES DÉFINIS PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

Soient  $A = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_p \rangle$  et  $B = \langle b_1, \dots, b_m \mid S_1, \dots, S_q \rangle$  deux groupes définis par générateurs et relations. On appelle *produit libre* de  $A$  et  $B$  le groupe  $A * B$  qui admet pour présentation

$$A * B = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid R_1, \dots, R_p, S_1, \dots, S_q \rangle.$$

On montre (par exemple dans [MKS]) que  $A * B$  est bien défini au sens où le groupe obtenu, à isomorphisme près, ne dépend pas des présentations choisies pour  $A$  et  $B$ .

De plus, le produit libre  $A * B$  est engendré par deux sous-groupes  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  respectivement isomorphes à  $A$  et  $B$  et tels que  $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\text{Id}_{A*B}\}$ .

Soit  $A = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_p \rangle$  un groupe défini par générateurs et relations. Soit  $N$  un sous-groupe distingué de  $A$  engendré par les éléments de  $A$  définis par les mots  $W_1, \dots, W_k$  en  $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ . Alors une présentation par générateurs et relations du groupe quotient  $A/N$  est donnée par

$$A/N = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_p, W_1, \dots, W_k \rangle.$$

### UN EXEMPLE IMPORTANT : LE GROUPE MODULAIRE $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$

**Proposition.** *Le groupe  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  admet pour présentations par générateurs et relations*

$$\langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, (aba)^4 \rangle \text{ et } \langle s, t \mid s^3t^{-2}, t^4 \rangle,$$

que l'on notera

$$\langle a, b \mid aba = bab, (aba)^4 = 1 \rangle \text{ et } \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle.$$

*Le groupe  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$  admet pour présentation par générateurs et relations*

$$\langle s, t, u \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, (su)^2 = 1, (tu)^2 = 1 \rangle.$$

On peut choisir comme générateurs  $a, b, s, t, u$  les matrices respectives

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La démonstration que nous donnons ici s'inspire largement de [REI].

**Démonstration.** Commençons par le cas de  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

On voit facilement que les deux présentations données définissent le même groupe  $G$ . En effet, si l'on note  $G_1 = \langle a, b \mid aba = bab, (aba)^4 = 1 \rangle$ , alors il suffit de poser  $s = ba$  et  $t = aba$  pour retrouver la présentation 2. Réciproquement, si  $G_2 = \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle$ , il suffit de poser  $a = ts^{-1}$  et  $b = s^2t^{-1}$  pour retrouver la présentation 1. Les vérifications sont laissées au lecteur.

On veut maintenant montrer que  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  est isomorphe à  $G$ .

Pour cela, considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

définies plus haut. Elles vérifient  $ABA = BAB$  et  $(ABA)^4 = I_2$ . Par conséquent, il existe un unique morphisme de groupes  $f$  de  $G$  dans  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  tel que  $f(a) = A$  et  $f(b) = B$ . Montrons que c'est un isomorphisme.

Montrons d'abord la surjectivité. On utilise pour cela la première présentation.

Notons que

$$ABA = BAB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (ABA)^2 = -I_2.$$

Donnons-nous une matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Trois cas sont possibles :

1. Si  $b = 0$ , alors comme  $M$  est de déterminant 1, on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = B^{-c} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = -I_2 B^c = (ABA)^2 B^c.$$

2. Si  $d = 0$ , alors on a de même

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-a} ABA$$

ou  $M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2 \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (ABA)^2 A^{-a} ABA.$

3. Sinon,  $bd \neq 0$ .

Notons que

$$A^n M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On raisonne par récurrence sur l'entier  $|bd|$ . Le cas où ce produit est nul a déjà été traité. Considérons donc le cas  $|bd| > 0$ . On peut supposer (quitte à multiplier par  $ABA$  à gauche, ce qui change la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  en la matrice  $\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ ) que  $|b| \geq |d|$ . On effectue la division euclidienne  $b = qd + r$  avec  $0 \leq r < |d|$ . En multipliant à gauche par  $A^{-q}$ , on fait décroître strictement le produit  $|bd|$ . On obtient le résultat par hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant l'injectivité. On utilise pour cela la seconde présentation.

Comme l'élément  $x = s^3 = t^2$  de  $G$  commute avec les générateurs de  $G$ , le sous-groupe  $\langle x \rangle$  engendré par  $x$  est central, donc distingué. Le groupe quotient  $H = G/\langle x \rangle$  est donc bien défini et admet la présentation par générateurs et relations  $\langle s, t \mid s^3 = t^2 = 1 \rangle$ . On peut remarquer que le quotient  $H$  est le produit libre des sous-groupes  $\langle s \rangle$  d'ordre 3 et  $\langle t \rangle$  d'ordre 2.

D'autre part, le sous-groupe  $\langle x \rangle$  est d'ordre 2.

Par conséquent le morphisme  $f : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  passe au quotient en une application

$$\bar{f} : H \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}),$$

et  $f$  est injective si et seulement si  $\bar{f}$  l'est.

Tout élément de  $H$  s'écrit de manière unique sous la forme  $w = s^{\varepsilon_1} t s^{\varepsilon_2} t \dots t s^{\varepsilon_n}$  (avec  $\varepsilon_i = \pm 1$ ), ou  $wt$ , ou  $tw$ , ou  $twt$ , ou  $t$ . Comme les éléments  $wt$  et  $tw$  d'une part et  $w$  et  $twt$  sont conjugués par  $t$  dans  $H$ , il suffit, pour montrer l'injectivité, de montrer que  $\bar{f}(t), \bar{f}(wt)$  et  $\bar{f}(w) \neq 1$ .

– Si l'on note  $p$  la projection canonique de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , on voit que

$$\bar{f}(t) = p \circ f(t) = p\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq 1.$$

– On a  $\bar{A} = \bar{f}(s^{-1}t)$  et  $\bar{B} = \bar{f}(st)^{-1}$ . Ainsi,  $\bar{f}(wt)$  est un produit non vide de matrices  $\bar{A}$  et  $\bar{B}^{-1}$ , et un tel produit ne peut pas être égal à 1 (car toute multiplication par  $A$  ou  $B^{-1}$  fait augmenter strictement la somme des coefficients non diagonaux).

– Enfin, si  $\bar{f}(w) = 1$ , alors  $\bar{f}(wt) \neq \bar{f}(t)$ , ce qui est absurde (puisque la somme des coefficients non diagonaux de  $f(wt)$  est non nulle tandis que celle de  $f(t)$  est nulle), donc ce cas n'est pas envisageable.

Ainsi, le groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  admet pour présentations par générateurs et relations

$$\langle a, b \mid aba = bab, (aba)^4 = 1 \rangle \text{ et } \langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle.$$

Étudions maintenant le cas de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

Notons  $H_0$  un groupe admettant la présentation  $\langle s, t \mid s^3 = t^2, t^4 = 1 \rangle$ , et  $H_1$  un groupe admettant la présentation  $\langle s, t, u \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, (su)^2 = 1, (tu)^2 = 1 \rangle$ .

Soit  $j : H_0 \rightarrow H_1$  le morphisme de groupes envoyant  $s$  (respectivement  $t$ ) sur lui-même, et  $p : H_1 \rightarrow H_1/\langle s, t \rangle \simeq \langle u \mid u^2 = 1 \rangle$  la surjection canonique.

On a  $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Im} i$ , donc la suite

$$H_0 \xrightarrow{j} H_1 \xrightarrow{p} H_1/\langle s, t \rangle \longrightarrow 1$$

est exacte, et on a le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H_0 & \xrightarrow{j} & H_1 & \xrightarrow{p} & H_1/\langle s, t \rangle & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \sim & & \downarrow \phi & & \downarrow \sim & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \end{array}$$

où  $\phi : H_1 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  est le morphisme de groupe envoyant  $s$  sur  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $t$  sur  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

et  $u$  sur  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ceci implique que l'application  $j$  est injective, et donc que  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

## Annexe C : Automorphismes du groupe libre à deux générateurs

### RÉDUCTION DE NIELSEN

Fixons une partie génératrice libre  $\{X, Y\}$  du groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{L}_2$ , et notons  $\mathbb{A} = \{X, Y, X^{-1}, Y^{-1}\}$  l'alphabet construit avec  $\{X, Y\}$ .

On appelle *mot (librement) réduit* sur l'alphabet  $\mathbb{A}$  tout mot dans lequel les lettres  $X$  et  $X^{-1}$  d'une part, et  $Y$  et  $Y^{-1}$  d'autre part n'apparaissent pas consécutivement. On montre que pour tout élément  $W$  du groupe libre  $\mathbb{L}_2$ , il existe un unique mot  $R_W = w_1 \dots w_p$  librement réduit sur  $\mathbb{A}$  dont l'image dans  $\mathbb{L}_2$  est  $W$  (voir par exemple [MKS]). Par conséquent, pour tout mot  $R \in \mathbb{A}^*$ , il existe un unique mot librement réduit  $\bar{R}$  correspondant au même élément de  $\mathbb{L}_2$  que  $R$ . On l'obtient en supprimant dans  $R$  tous les couples de lettres consécutives de la forme  $(X, X^{-1})$  ou  $(Y, Y^{-1})$ .

Par définition, un *préfixe* d'un mot  $R = r_1 \dots r_n$  sur l'alphabet  $\mathbb{A}$  est un mot de la forme  $R' = r_1 \dots r_{n'}$  avec  $n' \leq n$ . Si  $R \in \mathbb{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$  est un mot librement réduit, on appelle *préfixe principal* de  $R$  l'unique préfixe de  $R$  de longueur  $\ell = E[\frac{\ell(R)}{2}] + 1$ . On définit de la même façon les *suffixes* et les *suffixes principaux* de  $R$ .

Soient  $R, S \in \mathbb{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$  deux mots librement réduits. On dit que le couple  $(R, S)$  est *réduit au sens de Nielsen* s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- C1 : le préfixe principal de  $R$  (respectivement  $S$ ) est *isolé*, i.e. n'est pas préfixe de  $R^{-1}$ ,  $S$  ou  $S^{-1}$  (respectivement  $R$ ,  $R^{-1}$  ou  $S^{-1}$ ),
- C2 : le suffixe principal de  $R$  (respectivement  $S$ ) est *isolé*, i.e. n'est pas suffixe de  $R^{-1}$ ,  $S$  ou  $S^{-1}$  (respectivement  $R$ ,  $R^{-1}$  ou  $S^{-1}$ ),
- C3 : si  $R$  (respectivement  $S$ ) est de longueur paire, alors la moitié gauche de  $R$  (respectivement  $S$ ) n'est pas un préfixe de  $S$  (respectivement  $R$ ) ou la moitié droite de  $R$  (respectivement  $S$ ) n'est pas un suffixe de  $S$  (respectivement  $R$ ).

Soient  $R, S \in \mathbb{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$  deux mots non vides. On appelle *transformations élémentaires de Nielsen* du couple  $(R, S)$  les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_{\varepsilon, \varepsilon'} &: \begin{cases} R \mapsto R^\varepsilon \\ S \mapsto S^{\varepsilon'} \end{cases}, \\
 b_{\varepsilon, \varepsilon'} &: \begin{cases} R \mapsto S^\varepsilon \\ S \mapsto R^{\varepsilon'} \end{cases}, \\
 c_\varepsilon &: \begin{cases} R \mapsto R \\ S \mapsto SR^\varepsilon \end{cases}, \quad \bar{c}_\varepsilon : \begin{cases} R \mapsto RS^\varepsilon \\ S \mapsto S \end{cases}, \\
 d_\varepsilon &: \begin{cases} R \mapsto R \\ S \mapsto R^\varepsilon S \end{cases}, \quad \bar{d}_\varepsilon : \begin{cases} R \mapsto S^\varepsilon R \\ S \mapsto S \end{cases}, \\
 e_\varepsilon &: \begin{cases} R \mapsto R \\ S \mapsto R^\varepsilon SR^\varepsilon \end{cases}, \quad \bar{e}_\varepsilon : \begin{cases} R \mapsto S^\varepsilon RS^\varepsilon \\ S \mapsto S \end{cases},
 \end{aligned}$$

où  $\varepsilon, \varepsilon' \in \{1, -1\}$  seront souvent notés  $+$  ou  $-$ .

Notons que la réciproque d'une transformation élémentaire de Nielsen est encore une transformation élémentaire de Nielsen.

D'autre part, si l'image dans  $\mathbb{L}_2$  d'un couple de mots  $(R, S) \in \mathbb{A}^{*2}$  engendre librement

$\mathbb{L}_2$ , alors l'image dans  $\mathbb{L}_2$  de tout couple  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  obtenu à partir de  $(R, S)$  par une transformation élémentaire de Nielsen engendre aussi librement  $\mathbb{L}_2$ .

Les transformations élémentaires de Nielsen vont nous permettre, à partir d'un couple de mots  $(R, S) \in \mathbb{A}^{*2}$  dont l'image dans  $\mathbb{L}_2$  engendre librement  $\mathbb{L}_2$ , de trouver un couple  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  vérifiant la même propriété, et qui est réduit au sens de Nielsen.

Plus précisément, si l'on note  $L(U, V) = \ell(U) + \ell(V)$  la longueur totale d'un couple de mots  $(U, V) \in \mathbb{A}^{*2}$ , on a le résultat suivant.

**Théorème.** *Soit  $(R, S)$  un couple de mots librement réduits dont l'image dans  $\mathbb{L}_2$  engendre  $\mathbb{L}_2$ . Il existe des transformations de Nielsen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  telles que :*

1.  $L(R, S) \geq L(\omega_1(R, S)) \geq \dots \geq L(\omega_k \dots \omega_1(R, S))$ ,
2. le couple de mots librement réduits  $\overline{\omega_k \dots \omega_1(R, S)}$  est réduit au sens de Nielsen.

**Démonstration.** La démonstration se fait en trois étapes (une pour chaque condition demandée) :

1. Supposons que le couple  $(R, S)$  ne satisfait pas la condition C1. Quitte à permuter  $R$  et  $S$  (c'est-à-dire à appliquer  $\omega_0 = b_{+,+}$ ), on peut supposer  $\ell(R) \leq \ell(S)$ . Le préfixe principal de  $R$  est alors un préfixe de  $S$ .

Posons

$$\omega_1 = d_- : \begin{cases} R \mapsto R \\ S \mapsto R^{-1}S \end{cases} .$$

On a alors  $\ell(R^{-1}S) < \ell(S)$ , donc  $L(\omega_1(R, S)) < L(R, S)$ .

Si la condition C1 n'est toujours pas satisfaite, on réitère l'opération jusqu'à ce qu'elle le soit (la décroissance stricte de la longueur totale assure la terminaison de ce processus). Ainsi, soient  $n_1 \in \mathbb{N}$  et  $k_1, \dots, k_{n_1} \in \{0, 1\}$  tels que le couple  $(R', S') = (\prod_{i=1}^{n_1} \omega_1 \circ \omega_0^{k_i})(R, S)$  satisfait la condition C1, et soit  $\tau_1 = \prod_{i=1}^{n_1} \omega_1 \circ \omega_0^{k_i}$ .

2. Supposons que le couple  $(R', S')$  ne satisfait pas la condition C2. Quitte à permuter  $R'$  et  $S'$  (c'est-à-dire à appliquer  $\omega_0 = b_{+,+}$ ), on peut supposer  $\ell(R') \leq \ell(S')$ . Le suffixe principal de  $R'$  est alors un suffixe de  $S'$ .

Posons

$$\omega_2 = c_- : \begin{cases} R' \mapsto R' \\ S' \mapsto S'R'^{-1} \end{cases} .$$

On a alors  $\ell(S'R'^{-1}) < \ell(S')$ , donc  $L(\omega_2(R', S')) < L(R', S')$ .

Si la condition C2 n'est toujours pas satisfaite, on réitère l'opération jusqu'à ce qu'elle soit satisfaite (la décroissance stricte de la longueur totale assure la terminaison de ce processus).

Ainsi, soient  $n_2 \in \mathbb{N}$  et  $k'_1, \dots, k'_{n_2} \in \{0, 1\}$  tels que le couple  $(R'', S'') = (\prod_{i=1}^{n_2} \omega_2 \circ \omega_0^{k'_i})(R', S')$  satisfait la condition C2, et soit  $\tau_2 = \prod_{i=1}^{n_2} \omega_2 \circ \omega_0^{k'_i}$ .

Notons que lors de l'application de  $\omega_2$ , la condition C1 reste vérifiée. On obtient donc un couple  $(R'', S'') = \tau_2 \circ \tau_1(R, S)$  qui vérifie les deux conditions C1 et C2.

3. Supposons maintenant que  $(R'', S'')$  ne satisfait pas la condition C3. Quitte à permuter  $R''$  et  $S''$  (c'est-à-dire à appliquer  $\omega_0 = b_{+,+}$ ), on peut supposer  $\ell(R'') \leq \ell(S'')$ .

– Supposons que  $S''$  est de longueur paire, et écrivons  $S'' = UV$  avec  $\ell(U) = \ell(V)$ . Supposons de plus que  $U$  est un préfixe de  $R''$  et que  $V$  est un suffixe de  $R''$ , et écrivons  $R'' = UWV$  avec  $W \in \mathbb{L}_2$ . Comme on a supposé  $\ell(R'') \leq \ell(S'')$ , on a  $W = \varepsilon$  et  $R'' = S''$ , ce qui n'est pas possible puisque le couple  $(R'', S'')$  doit engendrer  $\mathbb{L}_2$ . Ce premier cas n'est donc pas envisageable.

– Supposons que  $R''$  est de longueur paire, et écrivons  $R'' = UV$  avec  $\ell(U) = \ell(V)$ . Supposons enfin que  $U$  est un préfixe de  $S''$  et que  $V$  est un suffixe de  $S''$ , et écrivons  $S'' = UWV$

avec  $W \in \mathbb{L}_2$ . On sait que  $R''^{-1} = V^{-1}U^{-1}$  et que  $V^{-1} \neq U$  (sinon  $R'' = \varepsilon$ ). Posons

$$\omega_3 = a_{-,+} : \begin{cases} R'' \mapsto R''^{-1} \\ S'' \mapsto S'' \end{cases} .$$

Ainsi, soit  $k''$  tel que le couple  $\omega_3 \circ \omega_0^{k''}(R'', S'')$  vérifie la condition C3. Posons  $\tau_3 = \omega_3 \circ \omega_0^{k''}$ . Les conditions C1 et C2 restent vérifiées, donc le couple  $\tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1(R, S)$  vérifie les trois conditions C1, C2 et C3. □

Un tel couple  $(\tilde{R}, \tilde{S}) = \overline{\omega_k \dots \omega_1(R, S)}$  possède la propriété remarquable suivante.

**Proposition.** *Si  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  est un couple réduit au sens de Nielsen dont l'image dans  $\mathbb{L}_2$  engendre librement  $\mathbb{L}_2$ , alors on a  $(\tilde{R}, \tilde{S}) = (X^{\pm 1}, Y^{\pm 1})$  ou  $(\tilde{R}, \tilde{S}) = (Y^{\pm 1}, X^{\pm 1})$ .*

**Démonstration.** À tout  $U \in \mathbb{L}_2$  correspond un unique mot librement réduit  $W = R_U$  sur l'alphabet  $\mathbb{A} = \{X, Y, X^{-1}, Y^{-1}\}$ . Notons  $U(R, S)$  l'élément de  $\mathbb{L}_2$  correspondant au mot  $W(R, S)$  obtenu en remplaçant simultanément toutes les occurrences de  $X$  par  $R$  et toutes celles de  $Y$  par  $S$  dans  $W$ .

On va utiliser le lemme suivant.

**Lemme.** *Si  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  est un couple réduit au sens de Nielsen, alors pour tout mot  $W \in \mathbb{A}^*$ , on a l'inégalité  $\ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) \geq \max(\ell(\tilde{R}), \ell(\tilde{S}))$ .*

**Preuve.** Soient  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  un couple réduit au sens de Nielsen et  $W \in \mathbb{A}^*$  un mot librement réduit. On peut écrire  $W = Z_1^{\varepsilon_1} Z_2^{\varepsilon_2} \dots Z_r^{\varepsilon_r}$ , avec  $Z_i \in \{X, Y\}$  et  $\varepsilon_i = \pm 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Montrons par récurrence sur  $r$  les deux propriétés suivantes :

1.  $\ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) \geq \max(\ell(\tilde{R}), \ell(\tilde{S}))$ ;
2. si l'on réduit librement  $W(\tilde{R}, \tilde{S})$  comme mot en  $X$  et  $Y$ , alors un certain suffixe isolé de  $Z_r^{\varepsilon_r}(\tilde{R}, \tilde{S})$  est conservé.

Le cas  $r = 1$  est clair.

Supposons le résultat vrai au rang  $r$ , et montrons-le au rang  $r + 1$ . On a

$$W(\tilde{R}, \tilde{S}) = P_1^{\varepsilon_1} P_2^{\varepsilon_2} \dots P_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}},$$

avec  $P_i \in \{\tilde{R}, \tilde{S}\}$  et  $\varepsilon_i = \pm 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Par hypothèse de récurrence, si l'on réduit librement le mot  $W' = P_1^{\varepsilon_1} P_2^{\varepsilon_2} \dots P_r^{\varepsilon_r}$  en  $X$  et  $Y$ , un isolé suffixe  $T$  de  $P_r^{\varepsilon_r}$  est conservé : la forme librement réduite de  $W'$  s'écrit  $UT$ . Écrivons  $TP_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}} = T_1 T_2 T_2^{-1} V$ , où  $T_1 V$  est librement réduit comme mot en  $X$  et  $Y$ . Alors la forme librement réduite de  $W(\tilde{R}, \tilde{S})$  est  $UT_1 V$ . Comme  $T$  est isolé, on a nécessairement  $T_2 \neq T$ , soit  $T_1 \neq \varepsilon$ . De plus, comme le préfixe principal de  $P_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}}$  est isolé par hypothèse, on a  $\ell(T_2) \leq \frac{1}{2} \ell(P_{r+1})$ . Deux cas se présentent alors :

- si l'inégalité est stricte, alors  $U$  contient le suffixe principal de  $P_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}}$ , donc le suffixe  $U$  est isolé ;
- sinon,  $T_2^{-1}$  est la moitié gauche de  $P_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}}$ , et n'est pas un préfixe isolé, donc la moitié droite de  $P_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}}$  est isolée par hypothèse.

Dans les deux cas, le point 2. est vérifié.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) &= \ell(UTV) = \ell(UT_1) + \ell(V) \\ &= \ell(UT_1 Y) + \ell(Y^{-1} V) - 2\ell(T_2) \\ &= \ell(W') + \ell(P_{r+1}) - 2\ell(T_2). \end{aligned}$$

Or on a

$$\ell(T_2) \leq \frac{1}{2}\ell(P_r) \leq \frac{1}{2}\ell(W'), \text{ d'où } \ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) \geq \ell(P_{r+1}),$$

$$\text{et } \ell(T_2) \leq \frac{1}{2}\ell(P_{r+1}), \text{ d'où } \ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) \geq \ell(W').$$

Par hypothèse de récurrence, on a  $\ell(W') \geq \ell(P_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , d'où  $\ell(W(\tilde{R}, \tilde{S})) \geq \ell(P_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r+1\}$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

Soit maintenant  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \mathbb{A}^{*2}$  un couple réduit au sens de Nielsen dont l'image dans  $\mathbb{L}_2$  engendre librement  $\mathbb{L}_2$ . Il existe un mot  $W \in \mathbb{L}_2$  tel que  $W(\tilde{R}, \tilde{S}) = X$ . D'après le lemme, on a alors  $\ell(\tilde{R}) = \ell(\tilde{S}) = 1$ . Pour que le couple  $(\tilde{R}, \tilde{S})$  engendre effectivement  $\mathbb{L}_2$ , il faut donc que  $(\tilde{R}, \tilde{S}) \in \{(X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}), (Y^{\pm 1}, X^{\pm 1})\}$ .  $\square$

## AUTOMORPHISMES DU GROUPE LIBRE $\mathbb{L}_2$

On sait que si  $\phi$  est un automorphisme de  $\mathbb{L}_2$ , le couple  $(\phi(X), \phi(Y))$  engendre librement  $\mathbb{L}_2$ . Réciproquement tout couple de  $\mathbb{L}_2^2$  engendrant librement  $\mathbb{L}_2$  est l'image du couple  $(X, Y)$  par un automorphisme de  $\mathbb{L}_2$ . On a ainsi une correspondance bijective entre le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{L}_2)$  des automorphismes de  $\mathbb{L}_2$  et l'ensemble des couples de  $\mathbb{L}_2^2$  engendrant librement  $\mathbb{L}_2$ .

Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathbb{L}_2$ . Cet automorphisme induit une transformation  $N_\phi$  qui à tout couple de mots  $(R, S) \in \mathbb{A}^{*2}$  associe le couple  $(\phi(X)(R, S), \phi(Y)(R, S))$  obtenu en remplaçant simultanément toutes les occurrences de  $X$  par  $R$  et toutes celles de  $Y$  par  $S$  dans les mots librement réduits correspondants aux éléments  $\phi(X)$  et  $\phi(Y)$  de  $\mathbb{L}_2$ . L'ensemble  $\{N_\phi \mid \phi \in \text{Aut}(\mathbb{L}_2)\}$  est clairement un groupe pour la composition.

De plus l'application

$$\begin{aligned} N : \text{Aut}(\mathbb{L}_2) &\longrightarrow \{N_\phi \mid \phi \in \text{Aut}(\mathbb{L}_2)\} \\ \phi &\longmapsto N_\phi \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

On dira que  $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{L}_2)$  est un *automorphisme élémentaire* de  $\mathbb{L}_2$  si  $N_\phi$  est une transformation élémentaire de Nielsen.

Le théorème suivant joue un rôle essentiel.

**Théorème.** *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{L}_2)$  est engendré par les automorphismes élémentaires de  $\mathbb{L}_2$ .*

**Démonstration.** Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathbb{L}_2$ . Le couple  $(\phi(X), \phi(Y))$  engendre librement  $\mathbb{L}_2$ . Notons  $(R, S)$  le couple de mots librement réduits qui lui correspond.

D'après le théorème précédent, il existe des transformations élémentaires de Nielsen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  telles que le couple  $(\tilde{R}, \tilde{S}) = \overline{\omega_k \dots \omega_1(R, S)}$  est réduit au sens de Nielsen. On a vu que l'image de  $(\tilde{R}, \tilde{S})$  dans  $\mathbb{L}_2$  engendre  $\mathbb{L}_2$ .

D'après la proposition précédente, le couple  $(\tilde{R}, \tilde{S})$  s'écrit  $(\tilde{R}, \tilde{S}) = \omega_0(X, Y)$  avec  $\omega_0 \in \{a_{\pm, \pm}, b_{\pm, \pm}\}$ . On a donc  $\overline{\omega_1^{-1} \dots \omega_k^{-1} \omega_0(X, Y)} = (R, S)$ , soit  $\overline{N_\phi(X, Y)} = (R, S)$ , où  $N_\phi = \omega_1^{-1} \dots \omega_k^{-1} \omega_0$  est un produit de transformations élémentaires de Nielsen.

Via l'isomorphisme  $N$ ,  $\phi$  est donc un produit d'automorphismes élémentaires de  $\mathbb{L}_2$ .  $\square$

Ainsi, on a montré que le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{L}_2)$  est engendré par les automorphismes

$$\alpha_{\varepsilon, \varepsilon'} : \begin{cases} X \mapsto X^\varepsilon \\ Y \mapsto Y^{\varepsilon'} \end{cases},$$

$$\beta_{\varepsilon, \varepsilon'} : \begin{cases} X \mapsto Y^\varepsilon \\ Y \mapsto X^{\varepsilon'} \end{cases},$$

$$\gamma_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto YX^\varepsilon \end{cases}, \quad \bar{\gamma}_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto XY^\varepsilon \\ Y \mapsto Y \end{cases},$$

$$\delta_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto X^\varepsilon Y \end{cases}, \quad \bar{\delta}_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto Y^\varepsilon X \\ Y \mapsto Y \end{cases},$$

$$\varepsilon_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto X \\ Y \mapsto X^\varepsilon Y X^\varepsilon \end{cases}, \quad \bar{\varepsilon}_\varepsilon : \begin{cases} X \mapsto Y^\varepsilon X Y^\varepsilon \\ Y \mapsto Y \end{cases}.$$

Quelques vérifications élémentaires suffisent alors à établir la proposition suivante.

**Proposition.** *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{L}_2)$  est engendré par les automorphismes*

$$\lambda = \beta_{+,-} \circ \delta_+ : \begin{cases} X \mapsto XY \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases}, \quad \mu = \beta_{+,-} : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu = \beta_{+,+} : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X \end{cases}.$$

De simples considérations sur ces trois générateurs permettent alors d'obtenir un résultat utile, énoncé pour la première fois par Nielsen en 1918 ([NIE]).

**Corollaire.** *Pour tout  $\alpha \in \text{Aut}(\pi)$ , l'élément  $\alpha([X, Y])$  est conjugué à  $[X, Y]$  ou à son inverse.*

#### AUTOMORPHISMES EXTÉRIEURS DE $\mathbb{L}_2$

Notons  $\text{Out}(\mathbb{L}_2) = \text{Aut}(\mathbb{L}_2)/\text{Int}(\mathbb{L}_2)$  le groupe des automorphismes extérieurs de  $\mathbb{L}_2$ .

**Théorème.** *Le groupe  $\text{Out}(\pi)$  est isomorphe au groupe  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .*

**Démonstration.** Soient  $D(\pi)$  le groupe dérivé de  $\pi$  (c'est-à-dire le groupe engendré par les commutateurs  $[U, V] = UVU^{-1}V^{-1}$ ),  $\pi^{ab} = \pi/D(\pi)$  l'abélianisé de  $\pi$ , et  $p : \pi \rightarrow \pi^{ab}$  la projection canonique. Il est clair que le groupe  $\pi^{ab} = \langle X, Y; XY = YX \rangle$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ , et donc que  $\text{Aut}(\pi^{ab})$  est isomorphe à  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

Considérons l'application

$$h : \text{Aut}(\pi) \longrightarrow \text{Aut}(\pi^{ab})$$

$$\phi \longmapsto (p(x) \mapsto p(\phi(x))).$$

Cette application est bien définie, et est un morphisme de groupes. Le groupe des automorphismes intérieurs de  $\pi$  est clairement inclus dans le noyau de  $h$ , donc  $h$  induit un morphisme de groupes

$$h' : \text{Out}(\pi) = \text{Aut}(\pi)/\text{Int}(\pi) \rightarrow \text{Aut}(\pi)/\text{Ker}(h) \simeq \text{Aut}(\pi^{ab}) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Montrons que  $h'$  est un isomorphisme.

On sait que  $\text{Aut}(\pi)$  est engendré par les automorphismes

$$\lambda : \begin{cases} X \mapsto XY \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases}, \quad \mu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X \end{cases},$$

Or on a

$$h(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = s, \quad h(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = t, \quad h(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = u,$$



et  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  admet la présentation par générateurs et relations

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) = \langle s, t, u \mid s^3 = t^2, t^4 = 1, (su)^2 = 1, (tu)^2 = 1 \rangle,$$

(cf annexe B) ; donc le morphisme  $h'$  est surjectif.

Montrons qu'il est injectif. Soit  $\chi \in \mathrm{Aut}(\pi)$  tel que l'image  $\widehat{\chi}$  de  $\chi$  dans  $\mathrm{Out}(\pi)$  appartient au noyau de  $h'$ . On sait que  $\chi$  s'écrit sous la forme

$$\chi = \lambda^{\ell_1} \mu^{m_1} \nu^{n_1} \dots \lambda^{\ell_p} \mu^{m_p} \nu^{n_p}, \text{ avec } p \in \mathbb{N} \text{ et } \ell_i, m_i, n_i \in \mathbb{Z}, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, p\}.$$

Comme  $h'$  est un morphisme de groupes, on a

$$h'(\widehat{\chi}) = h'(\lambda)^{\ell_1} h'(\mu)^{m_1} h'(\nu)^{n_1} \dots h'(\lambda)^{\ell_p} h'(\mu)^{m_p} h'(\nu)^{n_p} = s^{\ell_1} t^{m_1} u^{n_1} \dots s^{\ell_p} t^{m_p} u^{n_p} = I_2,$$

donc il existe des relations  $R_1, \dots, R_k$  de la présentation par générateurs et relations de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  ci-dessus (c'est-à-dire des éléments de  $\{s^3 t^{-2}, t^4, (su)^2, (tu)^2\}$ ), des mots  $G_1, \dots, G_k$  en  $s, t, u$  et des entiers  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$  tels que les deux mots  $s^{\ell_1} t^{m_1} u^{n_1} \dots s^{\ell_p} t^{m_p} u^{n_p}$  et  $G_1 R_1^{\varepsilon_1} G_1^{-1} \dots G_k R_k^{\varepsilon_k} G_k^{-1}$  en  $s, t, u$  soient égaux après réduction.

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on note  $r_i$  le mot en  $\lambda, \mu, \nu$  obtenu en remplaçant  $s$  par  $\lambda, t$  par  $\mu$  et  $u$  par  $\nu$  dans  $R_i$ , alors il existe des mots  $g_1, \dots, g_k$  en  $\lambda, \mu, \nu$  tels que les deux mots  $\lambda^{\ell_1} \mu^{m_1} \nu^{n_1} \dots \lambda^{\ell_p} \mu^{m_p} \nu^{n_p}$  et  $g_1 r_1 g_1^{-1} \dots g_k r_k g_k^{-1}$  en  $\lambda, \mu, \nu$  soient égaux après réduction.

Or on vérifie facilement que le mot  $r_i$  correspond à un automorphisme intérieur de la forme  $U \mapsto V_i U V_i^{-1}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Ainsi,  $\chi$  est un produit de conjugués d'automorphismes intérieurs, donc un automorphisme intérieur. Le morphisme  $h'$  est donc un isomorphisme.  $\square$

## Annexe D : Groupe fondamental

### DÉFINITIONS

Soit  $X$  un espace topologique. On appelle *chemin* de  $X$  toute application continue  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dans  $X$ . On dit que  $\gamma(0)$  est l'*origine* du chemin,  $\gamma(1)$  son *extrémité*, ou encore que  $\gamma$  est un chemin de  $\gamma(0)$  vers  $\gamma(1)$ . Si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , on dit que  $\gamma$  est un *lacet*.

Deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont dits *homotopes* s'ils ont même origine  $x$ , même extrémité  $y$ , et s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  (appelée *homotopie*) telle que pour tous  $s, t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma(t) & \text{et} & & H(t, 1) &= \gamma'(t); \\ H(0, s) &= x & \text{et} & & H(1, s) &= y. \end{aligned}$$

La famille de chemins  $H(-, s)$  est une déformation continue entre les chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$ , qui laisse les extrémités  $x$  et  $y$  fixes.

On voit facilement que la relation «être homotope» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins.

On peut munir l'ensemble des chemins d'une loi interne appelée *concaténation*. En effet, si  $\gamma$  est un chemin de  $x_0$  vers  $x_1$  et  $\gamma'$  un chemin de  $x_1$  vers  $x_2$ , on note  $\gamma\gamma'$  le chemin de  $x_0$  vers  $x_2$  défini par

$$\begin{aligned} \gamma\gamma'(t) &= \gamma(2t) & \text{si} & & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma\gamma'(t) &= \gamma'(2t - 1) & \text{si} & & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

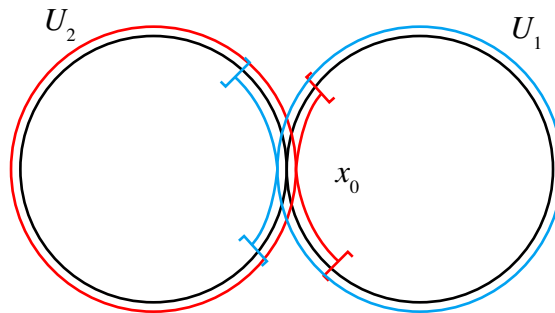
Les propriétés suivantes se démontrent facilement, on les trouvera par exemple dans [GOD].

1. Si  $\gamma''$  est un chemin de  $x_2$  vers  $x_3$ , les chemins  $(\gamma\gamma')\gamma''$  et  $\gamma(\gamma'\gamma'')$  sont homotopes.
2. Si l'on note  $e_{x_0}$  (respectivement  $e_{x_1}$ ) le lacet constant égal à  $x_0$  (respectivement  $x_1$ ), alors les chemins  $\gamma e_{x_1}$ ,  $\gamma$  et  $e_{x_0}\gamma$  sont homotopes pour tout chemin  $\gamma$  de  $x_0$  vers  $x_1$ .
3. Étant donné un chemin  $\gamma$  de  $x_0$  vers  $x_1$ , si l'on note  $\bar{\gamma}$  le chemin de  $x_1$  vers  $x_0$  défini par  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors les chemins  $\gamma\bar{\gamma}$  et  $e_{x_0}$  d'une part,  $\bar{\gamma}\gamma$  et  $e_{x_1}$  d'autre part, sont homotopes.

Par conséquent, l'ensemble des classes d'homotopie des lacets issus d'un point  $x_0$  de  $X$ , muni de la concaténation, est un groupe. On l'appelle le *groupe fondamental* de  $X$  relativement au point  $x_0$ , et on le note  $\pi_1(X, x_0)$ .

## GROUPES FONDAMENTAUX DU TORE ET DU TORE PERCÉ

Soit  $B$  un bouquet de deux cercles (c'est-à-dire la réunion de deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  dont l'intersection est réduite à un point  $x_0$ , munie de la topologie induite par la topologie de  $\mathbb{R}^2$ ).



**Proposition.** *Le groupe fondamental de  $B$  est un groupe libre à deux générateurs.*

**Démonstration.** Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts stricts de  $B$ , connexes par arcs, et tels que  $\mathcal{C}_1 \subset U_1$  et  $\mathcal{C}_2 \subset U_2$ . Alors  $U_1 \cap U_2$  est connexe par arcs.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un lacet du bouquet de deux cercles. Alors  $\gamma^{-1}(U_1)$  est un ouvert de  $[0, 1]$ , donc, par compacité de  $[0, 1]$ , c'est une réunion finie d'intervalles. Il en est de même de  $\gamma^{-1}(U_2)$ . Il existe donc des éléments  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  et  $k_0, \dots, k_{n-1}$  de  $\{1, 2\}$ , avec  $k_{i+1} \neq k_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ , tels que pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{k_i}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , soit  $c_i$  un chemin de  $\gamma(t_i)$  à  $x_0$  contenu dans l'intersection  $U_1 \cap U_2$ .

On a alors, à homotopie près,

$$\gamma = (\gamma|_{[t_0, t_1]}c_1) (c_1^{-1}\gamma|_{[t_1, t_2]}c_2) \dots (c_{n-1}^{-1}\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}),$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma|_{[t_0, t_1]}c_1 &\in \pi_1(U_{k_0}, x_0), & c_{n-1}^{-1}\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]} &\in \pi_1(U_{k_{n-1}}, x_0), \\ \text{et pour } i \in \{1, \dots, n-2\}, & & c_i^{-1}\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}c_{i+1} &\in \pi_1(U_{k_i}, x_0). \end{aligned}$$

Or on sait que le groupe fondamental  $\pi_1(U_1)$  (respectivement  $\pi_1(U_2)$ ) est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  (via l'indice d'un lacet autour d'un point intérieur  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) du cercle  $\mathcal{C}_1$  (respectivement  $\mathcal{C}_2$ )).

Considérons le morphisme de groupes  $f$  de  $\mathbb{L}_2$  dans  $\pi_1(B, x_0)$  qui à  $X$  (respectivement  $Y$ ) associe la classe d'homotopie d'un lacet faisant un tour de  $\mathcal{C}_1$  (respectivement  $\mathcal{C}_2$ ) dans le sens positif.

Ce morphisme est surjectif. En effet, si  $\gamma \in \pi_1(B, x_0)$  s'écrit

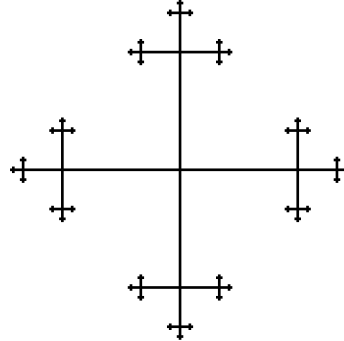
$$\gamma = (\gamma|_{[t_0, t_1]}c_1) (c_1^{-1}\gamma|_{[t_1, t_2]}c_2) \dots (c_{n-1}^{-1}\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}),$$

alors l'élément

$$Z(k_0)^{Ind_{P_{k_0}}(\gamma|_{[t_0, t_1]^{c_1}})} \dots Z(k_{n-1})^{Ind_{P_{k_{n-1}}}(c_{n-1}^{-1}\gamma|_{[t_{n-1}, t_n])}},$$

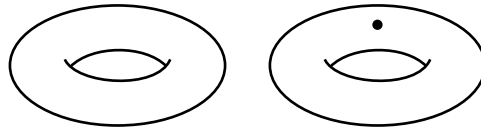
de  $\mathbb{L}_2$ , où  $Z(1) = X$  et  $Z(2) = Y$ , est un antécédent de  $\gamma$  par  $f$ .

Montrons que  $f$  est injectif. Considérons un arbre régulier  $A$  de valence 4.



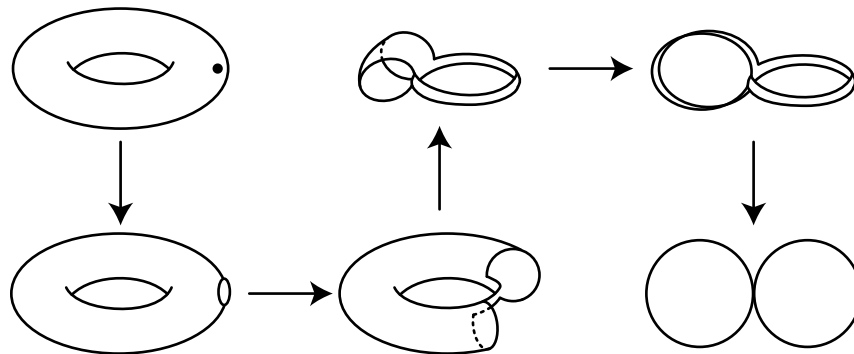
On voit facilement que  $A$  est un revêtement de  $B$  et que  $A$  est contractile, donc simplement connexe. Or si deux chemins  $\gamma, \gamma'$  dans  $B$  ont la même image par  $f$ , alors le chemin  $\gamma'^{-1} \circ \gamma$  se relève en un lacet dans  $A$  qui est homotope au lacet constant (puisque  $A$  est simplement connexe). Donc l'application  $f$  est injective.  $\square$

Soient maintenant  $\mathbb{T}$  un tore et  $\dot{\mathbb{T}}$  un tore percé.



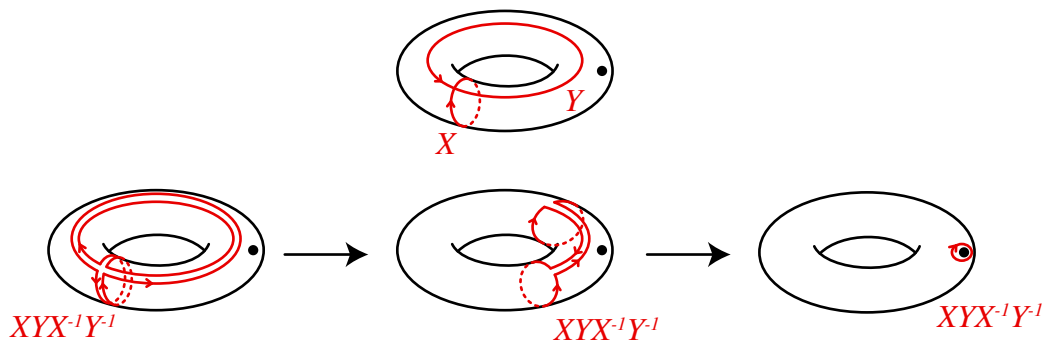
**Proposition.** *Le groupe fondamental du tore percé est un groupe libre à deux générateurs.*

**Démonstration.** Pour montrer cela, on se ramène au cas du bouquet de deux cercles par les équivalences d'homotopie suivantes (en fait des homéomorphismes, sauf la dernière), préservant le groupe fondamental.



$\square$

Notons que si  $X$  représente la classe d'homotopie d'un lacet faisant un tour interne du tore percé dans le sens positif et  $Y$  celle d'un lacet en faisant un tour externe dans le sens positif, alors le commutateur  $[X, Y]$  représente la classe d'homotopie d'un lacet faisant un tour autour du trou dans le sens positif.



Des arguments analogues montrent la proposition suivante.

**Proposition.** *Le groupe fondamental du tore est le groupe  $\mathbb{Z}^2$ .*

Le groupe fondamental du tore est donc l'abélianisé du groupe fondamental du tore percé.

## Annexe E : Quelques notions élémentaires de géométrie hyperbolique

Pour toutes les preuves, on se référera à [KAT].

### MODÈLES DU PLAN HYPERBOLIQUE

On considère simultanément deux modèles du plan hyperbolique :

le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\},$$

le disque de Poincaré

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

que l'on munit des éléments de distance hyperboliques

$$ds_{hyp}(z) = \frac{ds_{euc}}{\text{Im}z},$$

$$ds_{hyp}(z) = \frac{2ds_{euc}}{1 - |z|^2},$$

où  $ds_{euc}$  désigne un élément de distance euclidienne.

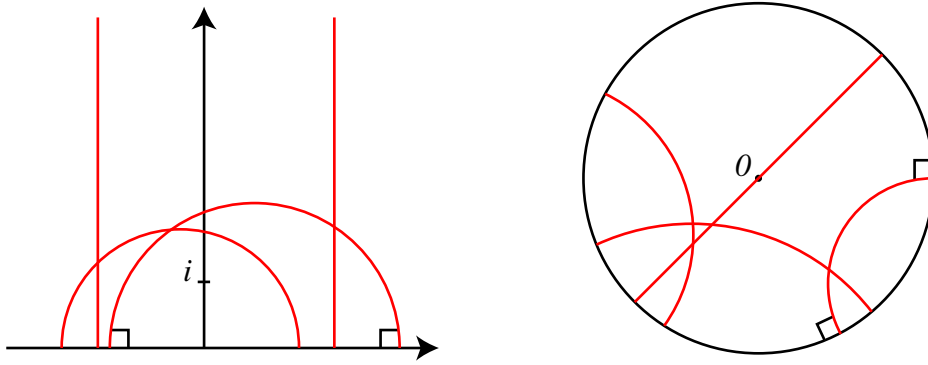
On définit la distance hyperbolique  $d_{hyp}(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  comme étant la borne inférieure, sur l'ensemble des chemins  $\gamma$  de classe  $C^1$  par morceaux reliant  $x$  à  $y$ , de l'intégrale

$$\int_0^1 ds_{hyp}(\gamma(t)) dt$$

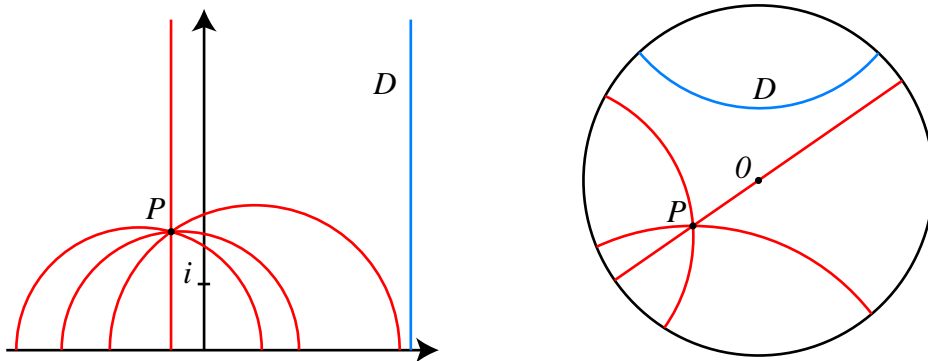
Cette borne inférieure est atteinte par un unique chemin (à reparamétrage près), appelé *géodésique* entre  $x$  et  $y$ .

Dans  $\mathbb{H}$ , les géodésiques sont les droites perpendiculaires à l'axe réel et les demi-cercles centrés sur cet axe.

Dans  $\mathbb{D}$ , les géodésiques sont les diamètres du cercle et les arcs de cercles perpendiculaires au bord.



On dit que deux géodésiques sont *parallèles* si elles ne se coupent pas. On note qu'il existe une infinité de géodésiques parallèles à une géodésique  $D$  et passant par un point  $P$  donnés. Ceci exprime le caractère non euclidien de la géométrie hyperbolique.



On relie ces deux modèles par l'homographie

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto \frac{-iz + 1}{z - i}, \end{aligned}$$

qui est une isométrie pour les distances considérés.

On sera donc libre de choisir le modèle le mieux adapté à chaque situation.

#### ACTION DES HOMOGRAPHIES, ISOMÉTRIES

Si  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre nombres réels tels que  $ad - bc = 1$ , on dit que l'application

$$\begin{aligned} \phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

est une *homographie*. On montre que c'est une isométrie du plan hyperbolique.

L'ensemble  $\text{Homog}(\mathbb{H})$  des homographies forme un groupe pour la composition. Plus précisément, on a

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \phi \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition.** *L'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Homog}(\mathbb{H}) \\ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left( z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de groupes de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathrm{Homog}(\mathbb{H})$ .*

Donnons encore un résultat classique utile à l'étude de l'action du groupe modulaire sur la cubique de Markoff.

**Théorème (Classification des éléments de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ).** *Tout élément de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  est conjugué à un et un seul élément parmi*

1. *l'identité*

$$I_2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. *les éléments hyperboliques*

$$\pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda > 1,$$

*qui correspondent aux homothéties du demi-plan supérieur*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto \lambda z, \text{ avec } \lambda > 1, \end{aligned}$$

3. *les éléments paraboliques*

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } b > 0,$$

*qui correspondent aux translations du demi-plan supérieur*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ z &\longmapsto z + b, \end{aligned}$$

4. *les éléments elliptiques*

$$\pm \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in ]0, \pi[,$$

*qui correspondent aux rotations dans le disque de Poincaré*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto e^{2i\theta} z, \end{aligned}$$

**Proposition.** *Le groupe  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$  des isométries de  $\mathbb{H}$  est engendré par les homographies et par la symétrie par rapport à l'axe des imaginaires purs.*

*Ainsi, le groupe  $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H})$  des isométries de  $\mathbb{H}$  qui préservent l'orientation est isomorphe à  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .*

## Annexe F : Surfaces de niveau du polynôme de Markoff

On considère le polynôme de Markoff défini par

$$\kappa(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2.$$

On étudie ici les propriétés topologiques des surfaces de niveau réelles de  $\kappa$ .

Soit  $t$  un réel. On cherche à décrire la surface  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ , d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 - t = 0.$$

Du fait de la symétrie de la surface par rapport aux trois variables, il nous suffit de fixer la hauteur  $z = z_0$  et d'étudier la conique  $\kappa^{-1}(t) \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z_0\})$ , d'équation

$$x^2 + y^2 + z_0^2 - xyz_0 - 2 - t = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{z_0 y}{2}\right)^2 + y^2 \left(1 - \frac{z_0^2}{4}\right) + (z_0^2 - 2 - t) = 0.$$

Trois cas se présentent :

1. Dans le cas  $|z_0| > 2$ , on pose  $X = x - \frac{z_0 y}{2}$  et  $Y = y\sqrt{\frac{z_0^2}{4} - 1}$ , et l'on obtient l'équation d'une hyperbole :

$$X^2 - Y^2 + (z_0^2 - 2 - t) = 0.$$

2. Dans le cas  $|z_0| < 2$ , on pose  $X = x - \frac{z_0 y}{2}$  et  $Y = y\sqrt{1 - \frac{z_0^2}{4}}$ , et l'on obtient l'équation

$$X^2 + Y^2 + (z_0^2 - 2 - t) = 0.$$

(a) Si  $t < z_0^2 - 2$ , cette équation n'a pas de solution,

(b) Si  $t > z_0^2 - 2$ , c'est l'équation d'une ellipse.

3. Dans le cas  $|z_0| = 2$ , on pose  $X = x - \frac{z_0 y}{2}$ , et l'on obtient l'équation

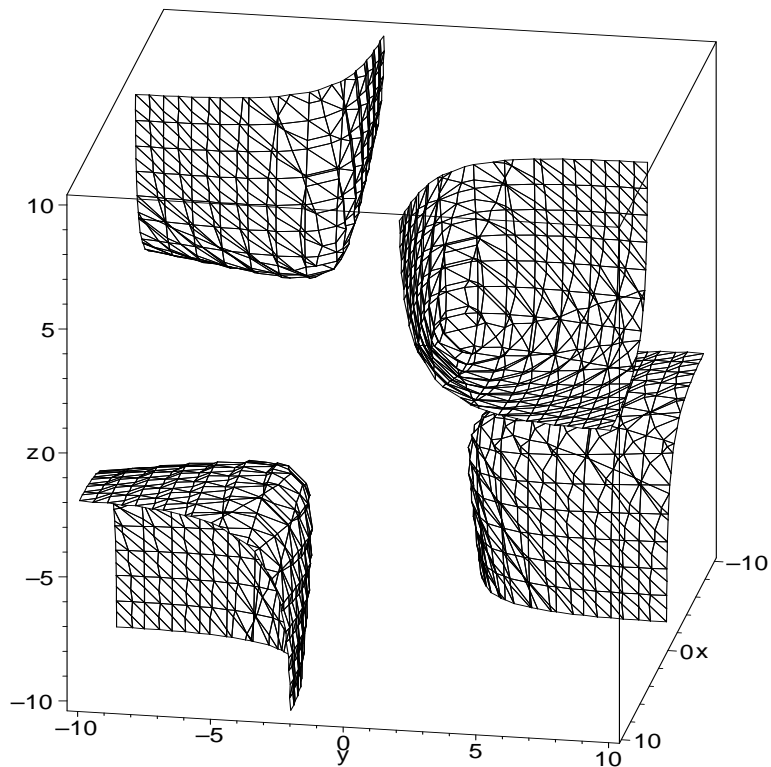
$$X^2 + (z_0^2 - 2 - t) = 0.$$

(a) Si  $t < z_0^2 - 2$ , cette équation n'a pas de solution,

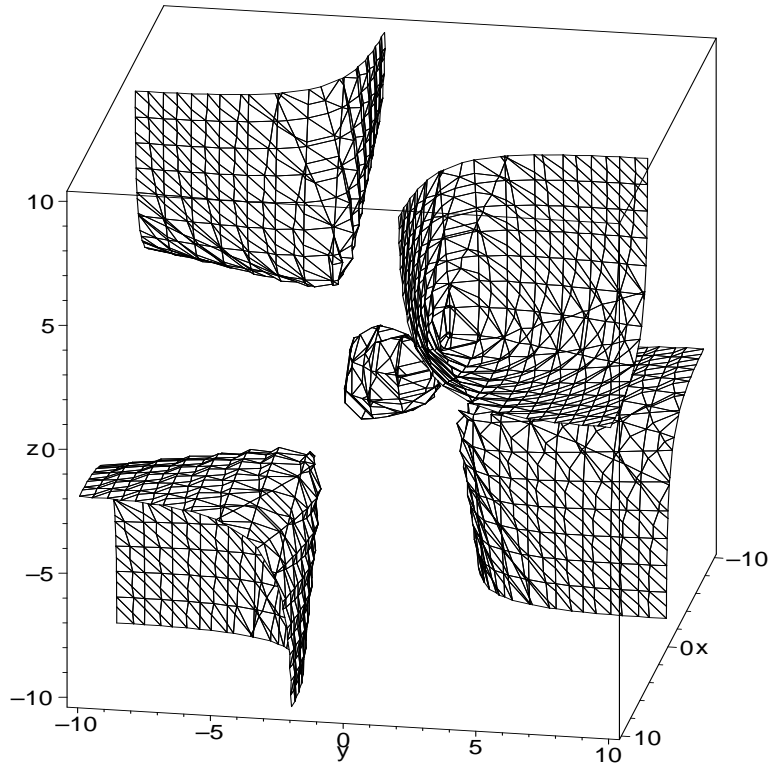
(b) Si  $t > z_0^2 - 2$ , elle définit une réunion de deux droites.

On en déduit l'allure des surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff.

1. Si  $t < -2$ , alors  $t < z_0^2 - 2$  pour tout  $z_0 \in [-2, 2]$ . La surface de niveau  $\kappa^{-1}(t)$  est donc constituée de quatre composantes connexes qui sont des hyperboloïdes.

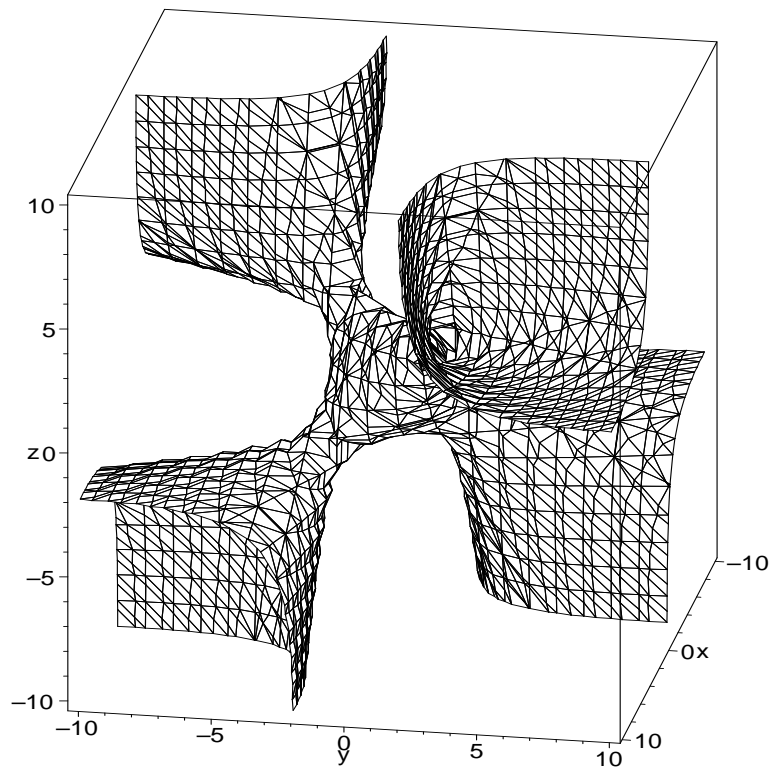


2. Si  $-2 < t < 2$ , alors  $t \leq z_0^2 - 2$  pour  $z_0 \leq \sqrt{t+2}$ . La surface de niveau  $\kappa^{-1}(t)$  est donc constituée de quatre composantes connexes qui sont des hyperboloïdes et d'une composante compacte qui est un ellipsoïde centré en l'origine.

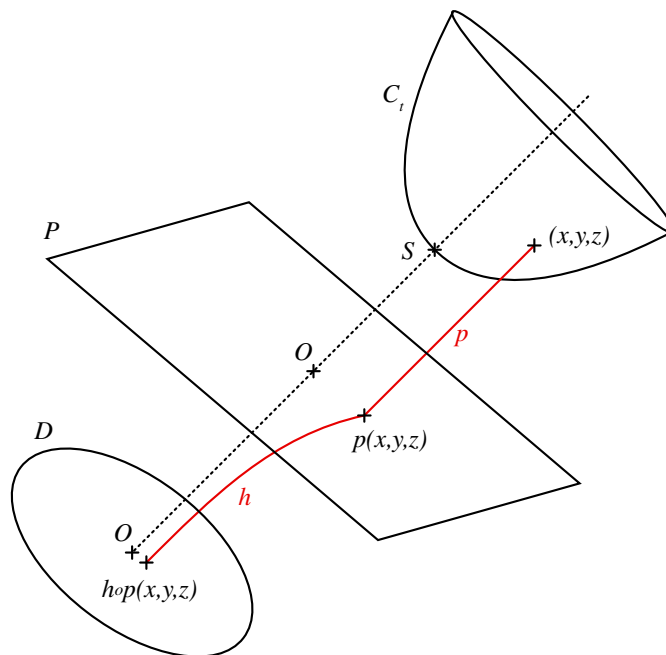


3. Si  $t > 2$ , alors  $t \leq z_0^2 - 2$  pour tout  $z_0 \in [-2, 2]$ . La surface de niveau  $\kappa^{-1}(t)$  est donc constituée d'une seule composante connexe.



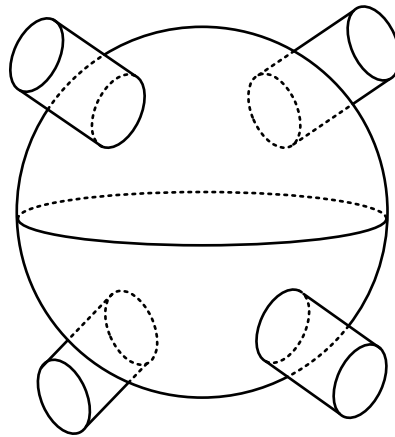


Si  $t < 2$ , les composantes connexes non compactes de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  sont toutes homéomorphes au disque  $\mathbb{D}$ . En effet, montrons-le par exemple pour la composante connexe  $D_t = \kappa^{-1}(t) \cap [2, +\infty[^3$ . Soit  $p : D_t \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection orthogonale de  $D_t$  sur le plan de vecteur normal  $(1, 1, 1)$ . Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  l'application qui à un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans  $\mathbb{R}^2$  associe le point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans  $\mathbb{D}$ , c'est-à-dire le point situé sur la droite faisant un angle  $\theta$  avec l'axe horizontal, à une distance hyperbolique  $r$  du centre. Alors l'application  $h \circ p : D_t \rightarrow \mathbb{D}$  est un homéomorphisme.



D'autre part, la composante compacte  $C_t$  est clairement homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

Si  $t > 2$ , on montre de même que la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  est homéomorphe à une sphère à quatre trous.



Pour terminer cette étude des surfaces de niveau du polynôme de Markoff, il est important de noter que si  $t \neq 2$ , la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , de dimension 2 si  $t \neq -2$ . En effet, la différentielle du polynôme de Markoff  $\kappa$  vu comme application polynomiale de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  est

$$d\kappa_{(x,y,z)} = (2x - yz)dx + (2y - zx)dy + (2z - xy)dz.$$

Elle est surjective lorsque  $(x, y, z)$  n'appartient pas à

$$\{(0, 0, 0), (2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2), (-2, -2, 2)\}.$$

Or le point  $(0, 0, 0)$  est un point de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3$  et les quatre autres points sont tous des points de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(2) \cap \mathbb{R}^3$ . Si  $t \neq \pm 2$ , la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  est donc une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  en tant qu'image réciproque d'un point par une submersion. Si  $t = -2$ , le point  $(0, 0, 0)$  est isolé dans  $\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3$  et  $\kappa$  est une submersion en tout autre point de  $\kappa^{-1}(-2) \cap \mathbb{R}^3$ . Cette surface est donc bien une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour  $t < 2$ , on a vu que les composantes connexes de la surface de niveau  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  sont homéomorphes au disque  $\mathbb{D}$  ou à la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Elles sont donc orientables, et la variété  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$  aussi.

De même, la variété  $\kappa^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^3$ , homéomorphe à la sphère à quatre trous, est orientable.

## Annexe G : Quelques notions élémentaires de systèmes dynamiques

Considérons un ensemble  $X$  et un groupe dénombrable  $G$  agissant sur  $X$ . L'étude du système dynamique  $(X, G)$  consiste à déterminer les propriétés des orbites des éléments  $x$  de  $X$  par  $G$ . On se place dans trois situations particulières pour l'étude dynamique de ces systèmes :

1. **Système dynamique topologique** :  $(X, \tau)$  est un espace topologique et l'action de  $G$  sur  $X$  est une action par homéomorphismes. On s'intéresse alors à l'étude des points récurrents, c'est-à-dire les points  $x \in X$  tels qu'il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments distincts de  $G$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \cdot x = x$ .

2. **Système dynamique mesuré** :  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace mesuré (par exemple probabilisé) et l'action de  $G$  préserve la mesure ( $\forall B \in \mathcal{B}, \forall g \in G, \mu(g \cdot B) = \mu(B)$ ). On s'intéresse alors par exemple à la probabilité de retour dans  $B \in \mathcal{B}$  de l'orbite d'un point de  $B$ .
3. **Systèmes dynamiques topologiques mesurés** :  $(X, \tau, \mathcal{B}, \mu)$  est un espace topologique mesuré muni de la tribu des boréliens, et l'action de  $G$  est une action par homéomorphismes, qui préserve la mesure. On s'intéresse alors par exemple à la probabilité pour un point  $x \in X$  d'être récurrent.

Deux systèmes dynamiques topologiques  $(X, G)$  et  $(X', G')$  (respectivement mesurés, respectivement topologiques mesurés) sont dits *conjugués* s'il existe un homéomorphisme (respectivement une bijection mesurable préservant la mesure, respectivement un homéomorphisme préservant la mesure)  $\phi : X \rightarrow X'$  tel que  $\phi \circ g = g' \circ \phi$  pour tous  $g \in G$  et  $g' \in G'$ . Deux systèmes dynamiques conjugués ont même dynamique au sens où un tel homéomorphisme (respectivement bijection mesurable préservant la mesure, respectivement homéomorphisme préservant la mesure)  $\phi$  envoie une orbite périodique (ou dense) par exemple de  $G$  sur une orbite périodique (ou dense) par exemple de  $G'$ . Notons que l'on ne s'intéresse aux systèmes dynamiques qu'à conjugaison près.

On a rencontré au cours de l'étude dynamique de l'action du groupe  $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$  sur les surfaces de niveau réelles du polynôme de Markoff une action ergodique. Intéressons-nous donc plus généralement aux systèmes dynamiques mesurés.

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu, G)$  un système dynamique mesuré. On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est *ergodique* si pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , l'égalité  $g(B) = B$  pour tout  $g \in G$  implique que la mesure de  $B$  est nulle ( $\mu(B) = 0$ ) ou totale ( $\mu(X \setminus B) = 0$ ).

L'ergodicité d'une action permet de mieux comprendre ses orbites. Étudions un exemple simple pour illustrer.

Soient  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow X$  une application mesurable préservant la mesure ( $f_*\mu = \mu$ ). Alors le groupe  $\mathbb{Z}$  agit sur  $X$  par  $n \cdot x = f^n(x)$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$  et  $x \in X$ , et cette action est mesurable.

On a alors le théorème suivant, qui est démontré dans par exemple [BP].

**Théorème (ergodique de Birkhoff).** *Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f : X \rightarrow X$  une application mesurable préservant la mesure. Soit  $\phi \in L^1(X, \mu)$  une application intégrable.*

*La suite  $(S_N\phi)_{N \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$S_N\phi(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(f^i(x))$$

*converge  $\mu$ -presque partout. Notons  $S\phi(x)$  cette limite lorsqu'elle existe.*

*Si l'action de  $G$  sur  $X$  est ergodique, alors*

$$S\phi(x) = \int_X \phi \, d\mu$$

*pour tout  $x \in X$  tel que  $S\phi$  existe.*

On dit que la moyenne spatiale de  $\phi$  est égale à la moyenne orbitale (ou temporelle) de  $\phi$   $\mu$ -presque partout.

## Références

- [BP] Y. BENOIST, F. PAULIN, *Systèmes dynamiques élémentaires*, cours de l'ENS (2002-2003), <http://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours/2002-2003/Cours.ps>, p. 18–32.
- [BUS] P. BUSER, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Progress in Mathematics 106, Birkhäuser, Boston (1992), p. 156–157.
- [CG] S. CHOI, W. M. GOLDMAN, *Convex real Projective Structure on Closed Surfaces*, Proc. AMS 118 (1993), p. 657–661.
- [CUL] M. CULLER, *Lifting Representations to Covering Groups*, Adv. in Math. 59 (1986), p. 64–70.
- [DUB] P. DUBREIL, *Théorie des groupes*, Dunod, collection Modules, Paris (1972), p. 85–91.
- [FH] W. FULTON, J. D. HARRIS, *Representation Theory : a First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1991).
- [FK] H. M. FARKAS, I. KRA, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 71, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980), p. 182.
- [FRI] R. FRICKE, *Über die Theorie der automorphen Modulgruppen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1896), p. 91–101.
- [GAR] F. P. GARDINER, *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*, Pure and Appl. Math., vol. XVIII, Interscience, John Wiley & Sons, New York et Londres (1987), p. 160.
- [GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1959), p. 134.
- [GOD] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*, collection Méthodes, Hermann, Paris (1971), p. 71–73.
- [GOL1] W. M. GOLDMAN, *The Symplectic Nature of Fundamental Groups of Surfaces*, Adv. in Math. 54 (1984), p. 200–225.
- [GOL2] W. M. GOLDMAN, *Ergodic Theory on Moduli Spaces*, Ann. Math. 146 (1997), p. 1–33.
- [GOL3] W. M. GOLDMAN, *The Modular Group Action on real  $SL(2)$ -Characters of a one-holed Torus*, Geometry & Topology, vol. 7 (2003), p. 443–486.
- [GOL4] W. M. GOLDMAN, *An Exposition of Results of Fricke*, preprint arXiv : math.GM/0402103 v1 (2004).
- [HIT] N. J. HITCHIN, *Lie Groups and Teichmüller Space*, Topology, vol. 31 n°3 (1992), p. 449–450.
- [HOR1] R. D. HOROWITZ, *Characters of free Groups Represented in the two Dimensional Special Linear Group*, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), p. 635–649.
- [HOR2] R. D. HOROWITZ, *Induced Automorphisms on Fricke Characters of free Groups*, Trans. AMS 208 (1975), p. 41–50.
- [KAT] S. KATOK, *Fuchsian Groups*, Chicago Univ. Press (1992), p. 1–21.
- [LAN] S. LANG, *Algebra*, 2e édition, Addison-Wesley, Menlo Park, Californie (1984), p. 626–628.
- [LS] R. C. LYNDON, P. E. SCHUPP, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977), p. 4–8, 25.
- [MIL] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Annals of Math. Studies, N°72, Princeton University Press, NJ (1971), p. 39, 82.

[MKS] W. MAGNUS, A. KARRASS, D. SOLITAR, *Combinatorial Group Theory : Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations*, Pure and Appl. Math., vol. XIII, Interscience, John Wiley & Sons, New York et Londres (1966), p. 120–131.

[MOI] E. E. MOISE, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

[PAU] F. PAULIN, *Topologie algébrique élémentaire*, cours de l'ENS (2001-2002), <http://www.dma.ens.fr/edition/NotesCours/2001-2002/Cours.ps>.

[RAT] J. G. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1994), p. 391.

[REI] K. REIDEMEISTER, *Einführung in die kombinatorische Topologie*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1932), p. 44–46.

[SER] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Presses Univ. de France, Paris (1970), p.127–131.