

Parcage dans un arbre aléatoire

Lebovici V. et Vacossin L.

14 Juin 2017

Résumé

Notre mémoire de première année avait pour objectif d'étudier deux articles : un article principal [1] et un article secondaire [2].

Le coeur de notre mémoire est donc l'étude du problème suivant, présenté dans l'article de Goldschmidt et Przykucki [1] : Considérons un arbre enraciné et étiqueté à n noeuds, choisi aléatoirement de façon équiprobable parmi les arbres à n noeuds enracinés et étiquetés. Imaginons qu'en chaque noeud, on ne puisse garer qu'une seule voiture et que m voitures veulent se garer sur cet arbre selon le processus suivant : chaque voiture arrive sur un noeud de façon équiprobable puis, si ce noeud est libre, elle s'y gare, sinon, elle remonte vers la racine jusqu'à trouver, éventuellement, une place libre. Si aucune place libre n'est rencontrée sur ce trajet, la voiture quitte définitivement l'arbre. On va alors s'intéresser à la probabilité que toutes les voitures se garent dans l'arbre. Si ce problème s'avère complexe à m et n fixés, il est en revanche plutôt commode de s'intéresser à cette probabilité de façon asymptotique. On prendra $m = \lfloor \alpha n \rfloor$ et on étudiera la probabilité en question quand $n \rightarrow \infty$. Toute cette étude et les résultats associés se trouvent dans la partie 3.

La stratégie employée pour résoudre ce problème porte le nom de *méthode objective*. Celle-ci est détaillée dans la section 3.1. Une autre application de cette méthode se trouve dans la partie 4 : il s'agira ici de mettre en évidence les rouages de cette méthode sans rentrer dans les détails des preuves. Cette partie résume le travail d'Aldous et Steele dans une partie de l'article [2].

La partie 1 consiste en une présentation des différents outils probabilistes (principalement concernant les graphes) utilisés dans les parties 2 et 3. Enfin, la partie 2 est la preuve du *lemme de Grimmett*, un résultat fondamental dans l'étude des graphes aléatoires.

Table des matières

1 Outils probabilistes	3
1.1 Convergence locale faible	3
1.1.1 Graphes géométriques	3
1.1.2 \mathcal{G}^* est un espace métrique	3
1.1.3 Convergence locale faible	4
1.2 Arbres de Galton-Watson	4
1.2.1 Processus de Galton-Watson	4
1.2.2 Arbres de Galton-Watson	6
1.2.3 Les arbres $PGW(\alpha)$ et $PGW_\infty(\alpha)$	7
1.3 Loi et processus de Poisson	7
1.3.1 Définitions	7
1.3.2 Distribution conditionnelle des instants d'arrivée	8
2 Un résultat fondamental : Le lemme de Grimmett	10
2.1 L'énoncé	10
2.2 La preuve	11
3 Une première utilisation de la méthode objective : Parcage dans un arbre aléatoire	16
3.1 Notes sur la méthode objective	16
3.2 Le modèle	17
3.3 Le modèle limite	17
3.4 Etude du nombre de voitures à la racine d'un arbre $PGW(1)$	17
3.4.1 Etude théorique	17
3.4.2 Simulations	22
3.5 Etude du modèle limite $PGW_\infty(1)$	25
3.5.1 Etude du nombre de voitures à la racine d'un arbre $PGW_\infty(1)$	25
3.5.2 Marche aléatoire sans saut vers le haut et à dérive positive	26
3.5.3 Le résultat pour le modèle limite	28
3.6 Preuve du théorème 3.1	29
3.6.1 Cas $\alpha < 1/2$	29
3.6.2 Cas $\alpha \geq 1/2$	31
4 Une autre utilisation de la méthode objective : l'appariement partiel de poids maximal sur les arbres aléatoires	32
4.1 Le problème	32
4.2 Méthode objective	33

1 Outils probabilistes

Dans cette section, nous introduisons plusieurs notions qui nous seront utiles dans cet exposé. Nous énoncerons des résultats importants que nous utiliserons dans la suite.

1.1 Convergence locale faible

1.1.1 Graphes géométriques

Le but de cette section est de définir la convergence locale faible d'une suite de graphes dans l'espace des graphes géométriques localement finis. Nous aurons donc besoin d'une manière de mesurer la distance entre deux sommets d'un graphe, pour ensuite définir la distance entre deux graphes. Nous énonçons d'abord les définitions qui nous seront utiles. On commence par rappeler les définitions élémentaires sur les graphes :

Définition 1.1. (i) Un *graphe non orienté* est un couple (V, E) où V est un ensemble dénombrable et E un ensemble de paires d'éléments de V .

(ii) On notera $\pi : u \rightarrow v$ un chemin reliant u à v dans G c'est-à-dire une suite $(\{u_i, v_i\})_{i \in [1, n]}$ d'arêtes de E telle que :

(i) $\forall i, v_i = u_{i+1}$

(ii) $u_1 = u$ et $v_n = v$.

Nous construisons maintenant des outils métriques sur des objets que nous appellerons des graphes géométriques qui sont propices aux mesures de distance à la racine.

Définition 1.2. (i) Une *fonction de longueur d'arête* est une fonction $\ell : E \rightarrow [0, +\infty[$. ℓ induit alors une distance sur les sommets de G par la formule $d(u, v) = \inf_{\pi: u \rightarrow v} \sum_{e \in \pi} \ell(e)$.

(ii) On dit qu'un graphe G muni d'une fonction de longueur d'arête ℓ est *localement fini* si pour tout sommet v et tout $\rho < \infty$ on a $\#\{x \in V, d(x, v) < \rho\} < \infty$.

(iii) Un *graphe géométrique* G est un graphe non orienté, muni d'une fonction de longueur d'arête qui fait de G un graphe localement fini. On notera \mathcal{G} l'ensemble des graphes géométriques.

(iv) On appelle *graphe géométrique enraciné de racine r* un graphe géométrique $G = (V, E)$ dont on a distingué un élément $r \in V$, appelé la *racine* de G . On notera \mathcal{G}^* l'ensemble des graphes géométriques enracinés.

Exemple. On peut considérer le cas important (et intéressant puisque c'est ce que nous prendrons dans le coeur de notre exposé) où la fonction de longueur est constante égale à 1.

1.1.2 \mathcal{G}^* est un espace métrique

Pour définir la convergence locale faible, nous avons besoin de définir une métrique propre sur \mathcal{G}^* et de donner un sens à la convergence d'une suite de graphes $(G_n)_n \in \mathcal{G}^*$.

Définition 1.3. 1. On dit que deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\Phi : V \rightarrow V'$ telle que $(\Phi(u), \Phi(v)) \in E'$ si, et seulement si $(u, v) \in E$. On peut aussi étendre le domaine de définition de Φ en définissant $\Phi(e) = (\Phi(u), \Phi(v))$ pour $e = (u, v) \in E$.

2. On dit que deux graphes géométriques G et G' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de graphes Φ qui préserve les longueurs, ie tel que $\ell'(\Phi(e)) = \ell(e)$ pour tout $e \in E$.

3. On dit que deux graphes géométriques enracinés sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de graphes géométriques entre eux qui envoie la racine du premier sur celle du second.

On considèrera maintenant l'espace \mathcal{G}^* quotienté par la relation d'isomorphie. On notera toujours cet espace quotient \mathcal{G}^* .

On notera $B_G(r, \rho) = \{v \in V, d(r, v) \leq \rho\}$ la boule fermée de rayon ρ autour de la racine de G et on notera $G[r, \rho]$ le sous graphe induit de G i.e. le graphe $(B_G(r, \rho), E')$ où $E' = E \cap V \times V$ dont la racine et la fonction de longueur d'arête sont celles de G . On peut alors définir une distance sur \mathcal{G}^* par :

$$d_{loc}(G, G') = 2^{-\sup\{\rho \geq 0, G[r, \rho] \cong G'[r', \rho]\}} \quad (1.1)$$

On peut alors énoncer le théorème qui nous intéresse et que nous admettrons.

Théorème 1.1. (\mathcal{G}^*, d_{loc}) est un espace métrique complet et séparable.

Tout ceci nous permet de définir la convergence étroite des mesures sur \mathcal{G}^* .

1.1.3 Convergence locale faible

On définit la convergence locale faible comme la convergence étroite des mesures sur \mathcal{G}^* qui est un espace métrique complet par la partie précédente. On rappelle la définition suivante :

Définition 1.4. On dit qu'une suite de mesures positives bornées $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers une mesure μ et on note $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ si pour toute fonction continue bornée $f : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$ on a $\int_{\mathcal{G}^*} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathcal{G}^*} f d\mu$.

La spécificité de la topologie définie sur \mathcal{G}^* est qu'elle s'intéresse essentiellement à la racine des graphes : elle est donc fondamentalement locale. Elle est dite faible car les conditions qu'elle demande ne portent que sur les voisinages de la racine. De plus, elle conserve la longueur des arêtes. On peut ainsi faire passer à la limite toutes les notions qui font intervenir la racine et ses voisinages mais nous ne pourrons pas faire passer à la limite des résultats sur des propriétés globales du graphe comme par exemple la longueur du plus long chemin.

1.2 Arbres de Galton-Watson

1.2.1 Processus de Galton-Watson

Définition 1.5. Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} et soit $(X_i^{(n)})_{i, n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) de loi μ .

On définit le *processus de Galton-Watson* associé à cette mesure de probabilité comme étant la suite de variable aléatoire $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$Z_0 := 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

Remarque. Usuellement, on peut voir ce processus comme le nombre d'individus à la n -ième génération d'une population qui possède initialement un individu et dont chaque individu donne naissance à un nombre d'enfants suivant la loi μ donnée.

Il est intéressant de savoir à quelle condition une telle population s'éteint presque sûrement. C'est l'objet de la suite de ce paragraphe.

Notons ϕ la fonction génératrice de μ et ϕ_n la fonction génératrice de Z_n (i.e. $\forall s \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \phi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i s^i, \phi_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = i) s^i$).

Lemme 1.1. Soit N une variable aléatoire de fonction génératrice \mathcal{G}_N et $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid, indépendantes de N , de fonction génératrice \mathcal{G}_Y . Notons $S = \sum_{i=1}^N Y_i$. Alors :

$$\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_Y$$

On en déduit immédiatement :

Lemme 1.2.

$$\phi_{n+1} = \phi_n \circ \phi$$

En particulier,

$$\phi_n = \overbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}^n$$

Preuve. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_S(t) &= \mathbb{E}(t^S) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^{Y_1+\dots+Y_j} \mathbf{1}_{N=j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(t^{Y_1+\dots+Y_j} \mathbf{1}_{N=j}) && \text{Par Fubini} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{E}(t^{Y_1}))^j \mathbb{P}(N=j) && \text{Par indépendance} \\ &= \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_Y(t) \end{aligned}$$

□

Lemme 1.3.

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0) = \min\{s \in [0, 1], \phi(s) = s\}$$

Preuve. Par croissance de la suite d'événements $(Z_n = 0)$, on a

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

Notons $\mathbb{P}(Z_n = 0) = \phi_n(0) = u_n$. On a $u_{n+1} = \phi(u_n)$.

Mais ϕ est croissante donc (u_n) est monotone. Or, $0 = u_0 \leq u_1$ donc (u_n) est croissante. De plus, elle est bornée (puisque dans $[0, 1]$) donc elle converge vers l point fixe de ϕ .

Enfin, si l' est un point fixe de ϕ , alors comme $u_0 \leq l'$, on obtient par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l'$ et donc $l \leq l'$. D'où le résultat annoncé. □

Théorème 1.2 (Condition de l'extinction presque sûre). Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus de Galton-Watson associé à une loi μ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Notons m l'espérance de μ . Alors :

$$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0) = 1 \iff m \leq 1$$

Preuve. ϕ est strictement croissante ($\phi' > 0$ car $\mu_0 < 1$) et l'hypothèse $\mu_0 + \mu_1 < 1$ assure alors ϕ est strictement convexe ($\phi'' > 0$).

- Si $m > 1$, au voisinage de 1, $\phi(x) - x < 0$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\phi(x) - x}{x - 1} = m - 1 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe $0 \leq s < 1$ tel que $\phi(s) = s$. Donc $\min\{s \in [0, 1], \phi(s) = s\} < 1$.
- Si $m < 1$, $\text{graph}(\phi)$ est au dessus de la tangente de ϕ en 1 d'équation $y = m(x - 1) + 1$. Donc $\forall s \in [0, 1[, \phi(s) \geq m(s - 1) + 1 > s$. Ainsi, $\min\{s \in [0, 1], \phi(s) = s\} = 1$.
- Si $m = 1$, $\text{graph}(\phi)$ est au dessus de la tangente de ϕ en 1 d'équation $y = x$. Mais en fait par stricte convexité, $\forall s \in [0, 1[, \phi(s) > s$. Ainsi, $\min\{s \in [0, 1], \phi(s) = s\} = 1$.

Le lemme 1.2 permet alors de conclure. □

1.2.2 Arbres de Galton-Watson

L'interprétation généalogique du processus de Galton-Watson montre que l'on peut naturellement associer un arbre à un tel processus.

Définition 1.6. Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} .

On définit l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ l'arbre aléatoire de loi \mathbb{Q}_μ où \mathbb{Q}_μ est l'unique loi de probabilité sur l'ensemble \mathcal{G}^* qui vérifie les propriétés suivantes :

- La loi du nombre de fils de la racine est μ i.e. si on note k_0 le nombre de fils de la racine $\mathbb{Q}_\mu(k_0 = j) = \mu(j)$
- Pour tout $j \geq 1$ tel que $\mu(j) > 0$, sous la loi conditionnelle $\mathbb{Q}_\mu(\cdot | k_0 = j)$, les j sous-arbres fils de la racine sont indépendants et cette loi conditionnelle vaut \mathbb{Q}_μ .

Remarque. Le lien avec le processus de Galton-Watson présenté plus haut est le suivant : Z_n correspond au nombre de noeuds de la n -ième génération (la racine étant l'unique noeud de la génération 0). En effet, les conditions d'indépendance demandées assurent qu'à chaque génération, les nombres de fils de chaque noeud sont des variables aléatoires iid de loi μ .

De cette remarque, on déduit le résultat suivant :

Théorème 1.3. Soit une loi μ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Notons m l'espérance de μ . Soit T sur \mathcal{G}^* une variable aléatoire suivant la loi d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ . Alors :

$$\mathbb{P}(|T| < +\infty) = 1 \iff m \leq 1$$

Proposition 1.1. On garde les notations précédentes et on suppose $\mu_0 + \mu_1 < 1, m \leq 1$. On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ la population totale. On note aussi \mathcal{G}_k la fonction génératrice de $S_k = \sum_{n=0}^k Z_n$.

- (i) $\forall s \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{G}_0(s) = s$ et $\mathcal{G}_{k+1} = s\phi(\mathcal{G}_k(s))$
- (ii) La fonction $f : s \in [0, 1] \mapsto \frac{s}{\phi(s)} \in [0, 1]$ réalise une bijection croissante de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- (iii) Sa réciproque est la fonction génératrice \mathcal{G}_S de S .

Remarque. La plupart des résultats cités précédemment le sont également dans [6], dans lequel on trouvera une étude un peu plus détaillée de ces processus.

Preuve. Pour (ii), rappelons que $\phi(s) \geq s$ par convexité et $\phi(0) \neq 0$ (sinon on aurait $m > 1$), ce qui assure la bonne définition. On a $f(0) = 0, f(1) = 1$ et on dérive : $f'(s) = \frac{1}{\phi(s)} \left(1 - s \frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right) > 0$ pour $s < 1$ car $\phi'(s) < 1$. Et donc f est bien une bijection croissante. Pour (i) : C'est évident pour $k=0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = m) s^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{1+m_1+\dots+m_k=m} \mathbb{P}(Z_k = m_k | Z_{k-1} = m_{k-1}) \mathbb{P}(Z_{k-1} = m_{k-1} | Z_{k-2} = m_{k-2}) \dots \mathbb{P}(Z_1 = m_1) s^m \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_k} \mathbb{P}(Z_k = m_k | Z_{k-1} = m_{k-1}) \dots \mathbb{P}(Z_1 = m_1) s^{1+m_1+\dots+m_k} \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{k-1}} \mathbb{P}(Z_{k-1} = m_{k-1} | Z_{k-2} = m_{k-2}) \dots \mathbb{P}(Z_1 = m_1) s^{1+m_1+\dots+m_{k-1}} (\phi(s))^{m_{k-1}} \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{k-1}} \mathbb{P}(Z_{k-1} = m_{k-1} | Z_{k-2} = m_{k-2}) \dots \mathbb{P}(Z_1 = m_1) s^{1+m_1+\dots+m_{k-2}} (s\phi(s))^{m_{k-1}} \end{aligned}$$

où

$$(\phi(s))^{m_{k-1}} = \mathbb{E} \left(t^{X_1^{(k)} + \dots + X_{m_{k-1}}^{(k)}} \right) = \sum_{m_k=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(X_1^{(k)} + \dots + X_{m_{k-1}}^{(k)} = m_k \right) s^{m_k}$$

En continuant par récurrence :

$$\mathcal{G}_k(s) = s\phi(s\phi(\dots s\phi(s)\dots))$$

Et donc on a bien : $\mathcal{G}_{k+1}(s) = s\phi(\mathcal{G}_k(s))$.

Enfin, pour (iii), on sait que $\mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) = 1$ donc (S_k) converge presque sûrement vers S (puisque s'il y a extinction, à partir d'un certain rang $S_k = S$). Et donc la fonction génératrice de S_k converge simplement vers celle de S . En faisant $k \rightarrow \infty$ dans l'égalité précédente, on obtient : $\mathcal{G}_S(s) = s\phi(\mathcal{G}_S(s))$. D'où en divisant pour $s \neq 0$ et en remarquant que ça reste vrai pour $s = 0$:

$$s = f(\mathcal{G}_S(s))$$

Ainsi,

$$\mathcal{G}_S = f^{-1}$$

□

1.2.3 Les arbres $PGW(\alpha)$ et $PGW_\infty(\alpha)$

Définition 1.7. Soit $\alpha > 0$. On appelle *distribution de Poisson Galton-Watson* la loi, notée $PGW(\alpha)$, des arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathcal{P}(\alpha)$ où l'on rappelle que $\mathcal{P}(\alpha)$ désigne la loi de Poisson de paramètre α , qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(\alpha)_n = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}$.

On va maintenant présenter une nouvelle loi sur l'ensemble des arbres enracinés qui permet d'obtenir des arbres infinis à partir d'arbres de loi $PGW(\alpha)$.

Définition 1.8. Soit $\alpha > 0$ et soit (T_n) une suite iid suivant la loi $PGW(\alpha)$. Notons v_i la racine de T_i . Considérons alors l'arbre T_∞ obtenu en prenant la collection des arbres (T_n) auxquels on rajoute les arêtes $\{(v_n, v_{n+1}), 0 \leq n < +\infty\}$. On dit alors que T_∞ suit la loi $PGW_\infty(\alpha)$. Dans le cas où $\alpha \leq 1$, $\{(v_n, v_{n+1}), 0 \leq n < +\infty\}$ est (presque sûrement) l'unique branche infinie de T_∞ appelée *colonne vertébrale*.

Remarque. On dit que la distribution T_∞ est obtenue par la *construction standard*. Les objets obtenus par construction standard possèdent, nous le verrons plus tard, une propriété d'invariance qui pourra être utile pour déterminer des potentiels objets limites.

1.3 Loi et processus de Poisson

Dans cette section, nous introduirons des résultats sur la loi de Poisson qui nous serviront plus tard. Pour cela, nous nous intéressons à son lien avec le processus de Poisson dont on pourra trouver une étude dans [3].

1.3.1 Définitions

Définition 1.9. On se donne une répartition d'instants aléatoires, appelés *instants- τ* , correspondant aux instants de réalisation d'événements, appelés *tops*. Si $t \geq 0$, on note $N(t)$ le nombre de tops se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et on suppose que $N(0) = 0$. On dit alors que $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un *processus de comptage*.

Définition 1.10. Un processus de comptage est dit :

- à *accroissements stationnaires*, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous segments $I_1, \dots, I_k \subset [0, +\infty[$ et pour tout $\tau \geq 0$, la loi du k -uplet (N_1, \dots, N_k) donnant le nombre de tops dans les intervalles (I_1, \dots, I_k) coïncide avec la loi du k -uplet (N'_1, \dots, N'_k) donnant le nombre de tops dans les intervalles $(I_1 + \tau, \dots, I_k + \tau)$.
- à *accroissements indépendants*, si pour tous segments $I_1, \dots, I_k \subset [0, +\infty[$ disjoints, les nombres de tops (N_1, \dots, N_k) se produisant dans ces segments sont indépendants.

— *localement continu en probabilité*, si pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}((N(t+h) - N(t)) \geq 1) = 0$$

Définition 1.11. Un processus de comptage $\{N(t) : t \geq 0\}$ est un *processus de Poisson d'intensité* λ s'il est à accroissements indépendants et si le nombre de tops se produisant dans un intervalle de temps de longueur $t \geq 0$ suit la loi de Poisson de paramètre λt i.e.

$$\forall t, s \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}((N(t+s) - N(t)) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$$

Proposition 1.2. Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires et est localement continu en probabilités.

Preuve. $\mathbb{P}((N(t+h) - N(t)) \geq 1) = \mathbb{P}((N(h) - N(0)) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda h} \rightarrow 0$ d'où le caractère localement continu en probabilité.

Pour un intervalle, la probabilité ne dépend que de sa longueur et le caractère localement continu en probabilité permet d'étudier les intervalles sans se soucier de savoir si leurs extrémités sont ouvertes ou fermées. On le prouve pour 2 intervalles, on généralise aisément par récurrence. Si les deux intervalles sont disjoints, on a immédiatement le résultat par indépendance. On fixe deux intervalles $]a, c]$ et $]b, d]$ avec $a < b \leq c < d$ et $k, l \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(c) - N(a) = k, N(d) - N(b) = l) \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b) - N(a) = i_1, N(c) - N(b) = i_2, N(d) - N(c) = i_3) \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} \mathbb{P}(N(b) - N(a) = i_1) \mathbb{P}(N(c) - N(b) = i_2) \mathbb{P}(N(d) - N(c) = i_3) \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_2+i_3=l}} e^{-\lambda(d-a)} \frac{(\lambda(b-a))^{i_1}}{i_1!} \frac{(\lambda(c-b))^{i_2}}{i_2!} \frac{(\lambda(d-c))^{i_3}}{i_3!} \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend que des longueurs mises en jeu, non de la position et donc le processus est bien à accroissements stationnaires. \square

1.3.2 Distribution conditionnelle des instants d'arrivée

On considère à partir de maintenant un processus de Poisson d'intensité λ $\{N(t) : t \geq 0\}$.

Théorème 1.4. Soient $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et (Y_1, \dots, Y_n) une suite de n variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[0, t]$.

Alors : pour tout intervalle I de $[0, t]$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, ayant noté X le nombre de tops qui se produisent dans I , on a :

$$\mathbb{P}(X = k \mid N(t) = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(Y_i \in I) = k\right)$$

Preuve. Notons u la longueur de I et désignons par Y le nombre de tops dans $[0, t] \setminus I$. X et Y sont

deux lois de Poisson de paramètres respectifs λu et $\lambda(t-u)$ indépendantes qui vérifient $X + Y = N(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k \mid N(t) = n) &= \mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = k \cap Y = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^k e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-k}}{k! (n-k)!} \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{u}{t}\right)^k \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

□

Corrolaire 1.1. Soient $t > 0$, I_1, \dots, I_k des intervalles disjoints de $[0, t]$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $(X_1, \dots, X_k, X_{k+1})$ le nombres de tops qui se produisent dans $(I_1, \dots, I_k, [0, t] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_k))$. Alors, si $i_1 + \dots + i_k \leq n$ et si l'on note $i_{k+1} = n - (i_1 + \dots + i_k)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k \mid N(t) = n) = \frac{n!}{i_1! \dots i_{k+1}!} \left(\frac{|I_1|}{t}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t}\right)^{i_k} \left(1 - \frac{|I_1 \cup \dots \cup I_k|}{t}\right)^{i_{k+1}}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k \mid N(t) = n) &= \mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k \mid X_1 + \dots + X_k = n) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{k+1} = i_{k+1})}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_1 = i_1) \dots \mathbb{P}(X_{k+1} = i_{k+1})}{\mathbb{P}(N(t) = n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda|I_1|}(\lambda|I_1|)^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{e^{-\lambda|I_k|}(\lambda|I_k|)^{i_k}}{i_k!} \frac{e^{-\lambda(t-|I_1 \cup \dots \cup I_k|)}(\lambda(t-|I_1 \cup \dots \cup I_k|))^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!} \frac{n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n} \\
&= \frac{n!}{i_1! \dots i_{k+1}!} \left(\frac{|I_1|}{t}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t}\right)^{i_k} \left(1 - \frac{|I_1 \cup \dots \cup I_k|}{t}\right)^{i_{k+1}}
\end{aligned}$$

□

Corrolaire 1.2. Soient $t > 0$, I_1, \dots, I_k des intervalles formant une partition de $[0, t]$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons (X_1, \dots, X_k) le nombres de tops qui se produisent dans (I_1, \dots, I_k) . Etant donné la configuration de tops, supposons que l'on enlève $\left(\sum_{i=1}^k X_i - n\right)^+$ de ces tops, choisis au hasard de façon indépendante et uniforme et notons (X'_1, \dots, X'_k) les nombres de tops restant dans (I_1, \dots, I_k) . Alors, si $i_1 + \dots + i_k = n$:

$$\mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) \geq n) = \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t}\right)^{i_k}$$

Preuve. Si $m \geq n$, calculons d'abord $\mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) = m)$. On se donne (Y_1, \dots, Y_m) iid de loi uniforme sur $[0, t]$ qui d'après le théorème 1.4 permettent de décrire les instants des m tops

dans $[0, t]$ à permutation près.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) = m) \\
&= \sum_{0 \leq m_1 < \dots < m_n \leq m} \mathbb{P}(\text{Il reste les tops } m_1, \dots, m_n) \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(Y_{m_i} \in I_j) = i_j \right) \right) \\
&= \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{0 \leq m_1 < \dots < m_n \leq m} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}(Y_{m_i} \in I_j) = i_j \right) \right) \\
&= \frac{1}{\binom{m}{n}} \sum_{0 \leq m_1 < \dots < m_n \leq m} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t} \right)^{i_k} \\
&= \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t} \right)^{i_k}
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) \geq n) &= \frac{1}{\mathbb{P}(N(t) \geq n)} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k, N(t) = m) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(N(t) \geq n)} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) = m) \mathbb{P}(N(t) = m) \\
&= \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t} \right)^{i_k} \frac{1}{\mathbb{P}(N(t) \geq n)} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m) \\
&= \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t} \right)^{i_k}
\end{aligned}$$

□

Corrolaire 1.3. Soient $t > 0$, I_1, \dots, I_k des intervalles formant une partition de $[0, t]$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons (X_1, \dots, X_k) le nombres de tops qui se produisent dans (I_1, \dots, I_k) . Etant donné la configuration de tops, supposons que l'on rajoute $(n - \sum_{i=1}^k X_i)^+$ tops, façon indépendante et uniforme dans $[0, t]$ et notons (X'_1, \dots, X'_k) les nouveaux nombres de tops dans (I_1, \dots, I_k) . Alors, si $i_1 + \dots + i_k = n$:

$$\mathbb{P}(X'_1 = i_1, \dots, X'_k = i_k \mid N(t) \leq n) = \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left(\frac{|I_1|}{t} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{|I_k|}{t} \right)^{i_k}$$

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve précédente. □

Remarque. Il est bon de garder à l'esprit ces résultats qui seront utilisés plus tard dans le cas $t = n$, $I_k =]k - 1, k]$.

2 Un résultat fondamental : Le lemme de Grimmett

2.1 L'énoncé

Ce résultat connu sous le nom de lemme de Grimmett est fondamental dans l'étude de la loi uniforme sur les arbres finis enracinés. Il montre que les arbres de Poisson Galton-Watson de paramètre 1 et leur version infinie jouent un rôle important dans cette théorie.

On se donne dans cette partie $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies toutes les variables aléatoires dont il sera question.

Théorème 2.1. Lemme de Grimmett

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés et enracinés à n noeuds, et soit T_∞ de loi $PGW_\infty(1)$. Alors :

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} T_\infty \text{ au sens de la convergence locale faible.}$$

2.2 La preuve

On garde les notations du théorème et on notera ρ_n la racine de T_n . On se donne également un processus (Z_n) de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathcal{P}(1)$ et on notera

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$$

Ce premier lemme est un cas particulier d'un résultat cité par Grimmett [4] et dû à Kolchine (1977). Nous refaisons ici la preuve dans le cas particulier qui nous intéresse.

Lemme 2.1.

$$\mathbb{P}(\rho_n \text{ est de degré } t) = \mathbb{P}(Z_1 = t \mid S = n)$$

Preuve. Exprimons d'abord le terme de gauche en dénombrant le nombre d'arbres à n sommets étiquetés et enracinés dont la racine est de degré t . Nous noterons cet ensemble $T(n, t)$ et on note aussi $T(n)$ l'ensemble des arbres enracinés et étiquetés à n noeuds et $A(n)$ l'ensemble des arbres à n noeuds. Rappelons que $|T(n)| = n^{n-1}$ et que $|A(n)| = n^{n-2}$. Notons $\{v_1, \dots, v_n\}$ les sommets de T_n . Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et J, I_1, \dots, I_t partition de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ tel que $|J| = t$, on note $A(i, J, I_1, \dots, I_t)$ l'ensemble des arbres à n noeuds ayant la structure suivante : la racine est v_i , les fils de la racine sont les $v_j, j \in J$ et les noeuds du sous-arbre enraciné en v_j sont v_j (la racine) et les $v_l, l \in I_j$. Pour choisir un tel arbre, il suffit de choisir la structure du sous-arbre enraciné en v_j . On a donc :

$$|A(i, J, I_1, \dots, I_t)| = \prod_{j \in J} |A(|I_j + 1|)|$$

On peut partitionner $T(n, t)$ de la façon suivante :

$$T(n, t) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \\ |J|=t}} \bigcup_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_t = \\ \{1, \dots, n\} \setminus J \cup \{i\}}} A(i, J, I_1, \dots, I_t)$$

D'où on en déduit :

$$|T(n, t)| = n \binom{n-1}{t} \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \binom{n-t-1}{b_1, \dots, b_t} \prod_{i=1}^t (b_i + 1)^{b_i-1}$$

Et donc, en divisant par $|T(n)|$:

$$\mathbb{P}(\rho_n \text{ est de degré } t) = \frac{1}{n^{n-2}} \binom{n-1}{t} \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \binom{n-t-1}{b_1, \dots, b_t} \prod_{i=1}^t (b_i + 1)^{b_i-1} \quad (2.2)$$

Ensuite, calculons dans un premier temps $\mathbb{P}(S = n)$. Montrons par récurrence sur n que

$$\mathbb{P}(S = n) = e^{-n} \frac{n^{n-1}}{n!}$$

$n = 1$: $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = e^{-1}$. On a le résultat voulu.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout $k < n$. En remarquant que la taille des sous-arbres enracinés aux fils de la racine sont iid de loi S et indépendant de Z_1 , on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n \cap Z_1 = t) &= \mathbb{P}(Z_1 = t) \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \prod_{i=1}^t \mathbb{P}(S = b_i + 1) \\
&= \frac{e^{-1}}{t!} \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \prod_{i=1}^t e^{-b_i-1} \frac{(b_i + 1)^{b_i}}{(b_i + 1)!} \\
&= \frac{e^{-n}}{(n-1)!} \binom{n-1}{t} \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \binom{n-t-1}{b_1, \dots, b_t} \prod_{i=1}^t (b_i + 1)^{b_i-1} \\
&= \frac{e^{-n}}{n!} |T(n, t)|
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{P}(S = n \cap Z_1 = t) \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{e^{-n}}{n!} |T(n, t)| \\
&= \frac{e^{-n}}{n!} |T(n)|
\end{aligned}$$

Dès lors, $\mathbb{P}(Z_1 = t \mid S = n) = \frac{|T(n, t)|}{|T(n)|}$. □

Ce deuxième lemme est également un cas particulier d'un théorème énoncé par Grimmett [4], dû à Kennedy (1975). C'est un résultat asymptotique sur le comportement des arbres de Galton-Watson conditionnés à leur population totale.

Lemme 2.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_1 = t \mid S = n) = t \mathbb{P}(Z_1 = t)$$

Remarque. La preuve qui va suivre est inspirée de [5] qui met en évidence le lien entre processus de Galton-Watson et marches aléatoires.

Preuve. Pour $s \in [0, 1]$, on se donne une suite $(X_k^{(s)})$ iid de variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre s . On note également $T_n^{(s)} = X_1^{(s)} + \dots + X_n^{(s)}$ qui suit une loi de Poisson de paramètre ns . (On enlèvera l'exposant quand on parle de $s = 1$). On s'autorise ici à utiliser les résultats énoncés plus tard sur les marches aléatoires de la partie 3.5.2. En effet, si l'on considère $Y_i = 1 - X_i^{(s)}$ pour $s < 1$, $\mathbb{P}(Y_i > 1) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_i) = 1 - s > 0$ et les résultats de cette partie s'appliquent. On a donc

$$\mathbb{P}\left(T_n^{(s)} < n, \forall n > 0\right) = \mathbb{P}\left(n - T_n^{(s)} > 0, \forall n > 0\right) = \mathbb{E}(Y_1) = 1 - s$$

Posons $\phi(s) = e^{s-1}$ la fonction génératrice de la loi de reproduction. Rappelons que d'après la proposition 1.1, la fonction génératrice de S (que l'on notera h) est la réciproque de $f : s \mapsto \frac{s}{\phi(s)}$. Après calculs, on obtient que pour $s < 1$,

$$h'(s) = \frac{1}{f'(h(s))} = \frac{e^{h(s)-1}}{1 - h(s)} = \frac{\phi(s)}{1 - h(s)}$$

Notons de plus que h^k est la fonction génératrice du nombre totale d'individus dans k lignées indépendantes. L'objectif dans la suite de la preuve est de calculer cette fonction.

Soit $s < 1$ et $k \in \mathbb{N}$. En utilisant des considérations sur la marche aléatoire de pas X_i , on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1^{(s)} = k\right) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_1^{(s)} = k, T_n^{(s)} = n, T_{n+i}^{(s)} < n+i, \forall i > 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_1^{(s)} = k\right) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(T_{n-1}^{(s)} = n-k\right) \mathbb{P}\left(T_n^{(s)} < n, \forall n > 0\right)\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\mathbb{P}(T_n = k) \frac{s^k}{\phi(s)^n} = e^{-n} e^{-(sn-n)} \frac{n^k s^k}{k!} = e^{-ns} \frac{s^k n^k}{k!} = \mathbb{P}\left(T_n^{(s)} = k\right)$$

On obtient donc :

$$1 = (1-s) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k) \frac{s^{n-k}}{\phi(s)^{n-1}}$$

Maintenant, si $0 \leq x < 1$ on applique cette égalité à $s = h(x) \in [0, 1[$, de sorte que $x = \frac{s}{\phi(s)}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}1 &= (1-h(x)) \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k) x^{n-2} \frac{h(x)^{-k+2}}{\phi(h(x))} \\ h(x)^{k-2} \frac{\phi(h(x))}{1-h(x)} &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k) x^{n-2} && \text{après réarrangement} \\ h(x)^{k-2} h'(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k) x^{n-2} \\ \frac{h(x)^{k-1}}{k-1} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n-1} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k) x^{n-1} && \text{après intégration} \\ h(x)^k &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{k}{n-1} \mathbb{P}(T_{n-1} = n-k-1) x^{n-1} && \text{en changeant l'indice}\end{aligned}$$

D'où :

$$h(x)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n} \mathbb{P}(T_n = n-k) x^n$$

Par continuité, cette relation est valable pour tout $x \in [0, 1]$. On a donc exprimé la fonction génératrice du nombre totale d'individus dans k lignées indépendantes. Ainsi, si $(T^{(j)})$ est une suite iid d'arbres $PGW(1)$ et $(S^{(j)})$ la population totale associée, on en déduit les probabilités suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, \mathbb{P}\left(S^{(1)} + \dots + S^{(k)} = n\right) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(T_n = n-k) = \frac{k e^{-n} n^{n-k}}{n(n-k)!}$$

Pour $k = 1$, on retrouve le résultat $\mathbb{P}(S = n) = \frac{e^{-n} n^{n-1}}{n!}$.

De plus,

$$\mathbb{P}(S = n | Z_1 = k) = \mathbb{P}\left(S^{(1)} + \dots + S^{(k)} = n-1\right) = \frac{k}{n-1} \frac{e^{-n+1} (n-1)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$$

On peut enfin conclure :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_1 = t | S = n) &= \mathbb{P}(S = n | Z_1 = t) \frac{\mathbb{P}(Z_1 = t)}{\mathbb{P}(S = n)} \\
&= \frac{t}{n-1} \frac{e^{-n+1} (n-1)^{n-1-t} e^{-1}}{(n-1-t)!} \frac{n!}{t! e^{-n} n^{n-1}} \\
&= \frac{t}{t!} \frac{n(n-1) \dots (n-t)}{(n-1)^{t+1}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
&\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t}{t!} \frac{n^{t+1}}{n^{t+1}} e^{-1} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} t \frac{e^{-1}}{t!} = t \mathbb{P}(Z_1 = t)
\end{aligned}$$

□

Ces deux lemmes permettent d'obtenir un résultat asymptotique sur une quantité que l'on retrouvera dans la suite de la preuve.

Corrolaire 2.1. Le nombre $N(n, t)$ d'arbres de taille n dont la racine et ses fils, au nombre de t , sont fixés, vérifie :

$$N(n, t) = \sum_{b_1 + \dots + b_t = n-t-1} \binom{n-t-1}{b_1, \dots, b_t} \prod_{i=1}^t (b_i + 1)^{b_i-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} t e^{-1} n^{n-t-2}$$

Preuve. L'équation 2.2 donne :

$$\mathbb{P}(\rho_n \text{ est de degré } t) = \frac{1}{n^{n-2}} \binom{n-1}{t} N(n, t)$$

Les deux lemmes mis ensemble donnent : $\mathbb{P}(\rho_n \text{ est de degré } t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{(t-1)!}$.

Comme $\frac{1}{n^{n-2}} \binom{n-1}{t} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (t! n^{n-t-2})^{-1}$, on a l'équivalence cherchée. □

Dans la suite, on va généraliser les notations utilisées précédemment : si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)$, on note $T(n, \mathbf{z})$ l'ensemble des arbres à n noeuds enracinés qui possèdent exactement z_i noeuds à la i -ième génération (étant entendu que la racine est la génération 0) pour tout $1 \leq i \leq k$ et $C(n, \mathbf{z})$ le nombre de choix possibles de noeuds dans les k premières générations. Et si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{z_k})$, on note $T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a})$ l'ensemble des arbres à n noeuds enracinés qui possèdent exactement z_i noeuds à la i -ième génération pour tout $1 \leq i \leq k$ et tels que \mathbf{a} donne à permutation près le nombre de fils de chacun des noeuds de la k -ième génération.

Soit \mathbf{z} et \mathbf{a} . Ecrivons $s = 1 + z_1 + \dots + z_k$ la taille des k premières générations d'un arbre de $T(n, \mathbf{z})$ et $u = a_1 + \dots + a_{z_k}$ la taille de la $(k+1)$ -ième génération d'un arbre de $T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a})$. En partitionnant sur la taille des sous-arbres dont la racine est un noeud de la k -ième génération, on obtient l'expression suivante :

$$|T(n, \mathbf{z})| = C(n, \mathbf{z}) \sum_{b_1 + \dots + b_{z_k} = n-s} \binom{n-s}{b_1, \dots, b_{z_k}} \prod_{i=1}^{z_k} (b_i + 1)^{b_i-1} = C(n, \mathbf{z}) N(n + z_k + 1 - s, z_k)$$

D'où : $|T(n, \mathbf{z})| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(n, \mathbf{z}) z_k e^{-1} (n + z_k + 1 - s)^{n-s-1}$.

Quant à $T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a})$, on peut calculer son cardinal de façon analogue pour écrire :

$$\begin{aligned}
|T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a})| &= C(n, \mathbf{z}) \binom{n-s}{a_1, \dots, a_{z_k}, n-s-u} \sum_{b_1+\dots+b_u=n-s-u} \binom{n-s-u}{b_1, \dots, b_u} \prod_{i=1}^u (b_i+1)^{b_i-1} \\
&= C(n, \mathbf{z}) \binom{n-s}{a_1, \dots, a_{z_k}, n-s-u} N(n-s+1, u) \\
&\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(n, \mathbf{z}) \frac{(n-s)^u}{a_1! \dots a_{z_k}!} u e^{-1} (n-s+1)^{n-s-u-1} \\
&\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C(n, \mathbf{z}) \frac{1}{a_1! \dots a_{z_k}!} u e^{-1} (n-s+1)^{n-s-1}
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n \in T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a}) \mid T_n \in T(n, \mathbf{z})) &= \frac{|T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a})|}{|T(n, \mathbf{z})|} \\
&\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{u}{z_k} \frac{1}{a_1! \dots a_{z_k}!} \left(1 + \frac{z_k}{n-s+1}\right)^{-(n-s-1)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{u}{z_k} \frac{e^{-z_k}}{a_1! \dots a_{z_k}!}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à T_∞ . Notons Y_i le nombre de noeuds dans la i -ième génération. Par construction de T_∞ , on a $Y_0 = 1$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Y_{i+1} = 1 + X_1^i + \dots + X_{Y_i}^i$ où $(X_n^i)_{i, n \in \mathbb{N}}$ sont iid de loi $\mathcal{P}(1)$. Notons également (G_1, \dots, G_{Y_i}) les nombres de fils de chacun des Y_i membres de la i -ième génération et cherchons à calculer : $\mathbb{P}((G_1, \dots, G_{z_k}) = \mathbf{a} \mid (Y_1, \dots, Y_k) = \mathbf{z})$.

Par indépendance, il s'agit en fait de calculer $\mathbb{P}((G_1, \dots, G_{z_k}) = \mathbf{a})$. Si l'on note (s_1, \dots, s_r) les r noeuds de la k -ième génération, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((G_1, \dots, G_{z_k}) = \mathbf{a}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{z_k} (s_j \text{ est dans la branche infinie}) \cap (G_1, \dots, G_{z_k}) = \mathbf{a}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{z_k} \frac{1}{z_k} \mathbb{P}(X_1^k = a_1) \dots \mathbb{P}(X_j^k = a_j - 1) \dots \mathbb{P}(X_{z_k}^k = a_{z_k}) \\
&= \sum_{j=1}^{z_k} \frac{a_j}{z_k} \frac{e^{-z_k}}{a_1! \dots a_{z_k}!} \\
&= \frac{u}{z_k} \frac{e^{-z_k}}{a_1! \dots a_{z_k}!}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a démontré le résultat suivant :

Lemme 2.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \in T(n, \mathbf{z}, \mathbf{a}) \mid T_n \in T(n, \mathbf{z})) = \mathbb{P}((G_1, \dots, G_{z_k}) = \mathbf{a} \mid (Y_1, \dots, Y_k) = \mathbf{z})$$

Autrement dit, la loi conjointe du nombre de fils d'une génération de T_n connaissant les générations précédentes a pour la limite la même quantité associée à T_∞ . Il reste alors à montrer que ce résultat permet de conclure la preuve du lemme de Grimmett.

Dans la suite, si T est un arbre, nous noterons T^k le sous-arbre de T comprenant exactement tous les noeuds des k premières générations et les arêtes qui les relie. De plus, nous noterons $A^k \subset \mathcal{G}^*$ l'ensemble des arbres qui ont au plus k générations. Remarquons les deux faits évidents suivants :

$T^k \in A^k$ et si $T \in A^k$, alors pour tout $k' \geq k$, $T^{k'} = T$.

Le lemme précédent permet de montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall T' \in A^k, \mathbb{P}(T_n^k = T') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_\infty^k = T')$$

Rappelons également le théorème suivant qui nous facilitera la tâche pour conclure la preuve du lemme de Grimmett.

Théorème 2.2. Soit (E, d) un espace métrique complet séparable (c'est le cas de (\mathcal{G}^*, d_{loc})). Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et μ des mesures de probabilité sur (E, d) . Alors s'équivalent :

- (i) (μ_n) converge vaguement vers μ
- (ii) (μ_n) converge étroitement vers μ

Terminons alors la preuve du lemme de Grimmett.

Preuve. Soit $f : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact K .

Soit $\epsilon > 0$. f est en particulier uniformément continue donc il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(T, T') < 2^{-(l+1)} \Rightarrow |f(T) - f(T')| < \epsilon/3$$

Soit $n \geq l$. De sorte que T_n et T_n^l coïncident sur les l premières générations et donc $d(T_n, T_n^l) < 2^{-(l+1)}$. La même chose vaut pour T_∞ . Dès lors,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(T_n) - f(T_\infty))| &\leq \left| \mathbb{E}(f(T_n) - f(T_n^l)) \right| + \left| \mathbb{E}(f(T_n^l) - f(T_\infty^l)) \right| + \left| \mathbb{E}(f(T_\infty^l) - f(T_\infty)) \right| \\ &\leq 2\epsilon/3 + \left| \mathbb{E}(f(T_n^l) - f(T_\infty^l)) \right| \end{aligned}$$

$$K \subset \bigcup_{T \in K} B(T, 2^{-(l+2)})$$

Donc par compacité, il existe $T_1, \dots, T_p \in K$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B(T_i, 2^{-(l+2)})$$

Or, $\#A^l \cap B(T_i, 2^{-(l+2)}) \leq 1$ puisque si $A, A' \in A^l, A \neq A' \Rightarrow d(A, A') > 2^{-l-1}$ et si $A, A' \in B(T_i, 2^{-(l+2)})$, $d(A, A') < 2^{-l-1}$. Ainsi, $K \cup A^l$ est fini : notons-le $\{A_1, \dots, A_s\}$.

Puis, comme f est nulle en dehors de K ,

$$\left| \mathbb{E}(f(T_n^l) - f(T_\infty^l)) \right| \leq \sum_{i=1}^s |f(T_i)| \left| \mathbb{P}(T_n^k = T_i) - \mathbb{P}(T_\infty^k = T_i) \right|$$

Ce terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit donc $n_0 \geq l$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|\mathbb{E}(f(T_n^l) - f(T_\infty^l))| \leq \epsilon/3$. Alors ,

$$\forall n \geq n_0, |\mathbb{E}(f(T_n) - f(T_\infty))| \leq \epsilon$$

Le théorème précédent permet finalement de conclure. □

3 Une première utilisation de la méthode objective : Parcage dans un arbre aléatoire

3.1 Notes sur la méthode objective

La méthode objective, que nous allons appliquer pour démontrer le théorème 3.1 s'articule de la manière suivante :

1. on montre qu'il y a convergence des objets vers un objet limite,
2. on étudie ensuite l'objet limite,
3. on montre que la propriété que l'on souhaite étudier passe correctement à la limite locale faible.

Nous montrons maintenant comment tout cela se fait dans le cas du parcage dans un arbre aléatoire.

3.2 Le modèle

Considérons un arbre aléatoire T_n étiqueté et enraciné choisi uniformément parmi les arbres étiquetés par $\{1, \dots, n\}$ et enracinés. Orientons les arêtes vers la racine. Supposons que m voitures arrivent successivement et veulent "se garer" à un noeud de l'arbre choisi uniformément et indépendamment parmi les n noeuds. Si la voiture arrive à un noeud qui n'est pas encore occupé, elle s'y gare. Sinon, elle remonte le long du chemin qui mène à la racine et se gare à la première place libre rencontrée. Si elle ne trouve pas de place libre, elle n'a pas d'autre choix que de quitter l'arbre. On cherche à évaluer la probabilité que toutes les voitures se garent dans l'arbre lorsque l'on prend $m = \lfloor \alpha n \rfloor$. L'objectif de l'article de GOLDSCHMIDT et PRZYKUCKI [1] est d'utiliser la méthode objective pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit T_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des arbres étiquetés par $\{1, \dots, n\}$ et enracinés et soit $(X_1, \dots, X_{\lfloor \alpha n \rfloor})$ des variables aléatoire iid de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et indépendantes de T_n , donnant les noeuds d'arrivées de chacune des voitures. Notons $A_{n,\alpha}$ l'événement : "Toutes les voitures sont garées dans T_n ". Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,\alpha}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-2\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha \end{cases}$$

3.3 Le modèle limite

Le lemme de Grimmett nous dit que, quand $n \rightarrow \infty$, la suite d'arbres aléatoires T_n suivant la loi uniforme sur l'ensemble des arbres enracinés à n noeuds converge, au sens de la convergence locale faible, vers un arbre $PGW_\infty(1)$.

Qu'en est-il du nombre de voitures qui arrivent dans l'arbre ? Notons $X_{m,n}(v)$ pour $v \in T_n$ le nombre de voitures qui veulent se garer en v lorsque m voitures veulent se garer dans T_n . $(X_{m,n}(v), v \in T_n)$ suit une loi multinomiale $(m; \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. En particulier,

$$\mathbb{P}(X_{m,n}(v) = j) = \binom{m}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-j}$$

Quand on prend $m = \lfloor \alpha n \rfloor$ et qu'on fait $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{\lfloor \alpha n \rfloor, n}(v) = j) \rightarrow \frac{\alpha^j}{j!} e^{-\alpha}$$

Ainsi, la distribution d'arrivée des voitures que l'on prend pour le modèle limite est, en chaque noeud de l'arbre limite, une loi de Poisson de paramètre α .

3.4 Etude du nombre de voitures à la racine d'un arbre $PGW(1)$

3.4.1 Etude théorique

Dans un premier temps, on cherche à étudier les propriétés du modèle limite. On se donne donc une variable aléatoire $T \sim PGW(1)$ ainsi qu'une suite de variables aléatoires iid suivant la loi de Poisson de paramètre $\alpha : (P(v))_{v \in T}$. On suppose donc que $P(v)$ voitures arrivent au noeud v de T et on réalise le processus de parking décrit plus haut. On s'intéresse alors à la variable aléatoire X donnant le nombre de voitures qui visite la racine $\rho(T)$ de T .

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la même loi que X . Soit également la variable aléatoire $N \sim \mathcal{P}(1)$ donnant le nombre de fils de la racine de T . Puisque le nombre de voitures

visitant chacun des fils de la racine suit la même loi que X et que seulement $(X - 1)^+$ vont aller visiter la racine, on obtient alors l'équation :

$$X \stackrel{d}{=} P(\rho(T)) + \sum_{i=1}^N (X_i - 1)^+ \quad (3.3)$$

A partir de cette équation, on va pouvoir déduire un grand nombre informations sur X .

Dans la suite, on notera $p = \mathbb{P}(X = 0)$.

Lemme 3.1. $\mathbb{E}((X - 1)^+) = \mathbb{E}(X) + p - 1$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - 1)^+) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}((X - 1)^+ = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n + 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) \mathbb{P}(X = n + 1) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n + 1) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n \mathbb{P}(X = n) - \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{E}(X) - 1 + p \end{aligned}$$

□

On notera \mathcal{G}_Y la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y .

Lemme 3.2. Soient N une variable aléatoire et $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid suivant la même loi qu'une variable aléatoire Y , indépendantes de N . Notons $S = \sum_{i=1}^N Y_i$.

Si N et Y sont d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y)$.

Preuve. Rappelons que $\mathcal{G}_S = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_Y$

Si N et Y sont d'espérance finie, on dérive les fonctions génératrices et on évalue en 1 : $\mathcal{G}'_S(1) = \mathcal{G}'_Y(1)\mathcal{G}'_N(\mathcal{G}_Y(1))$. □

On en déduit le premier résultat intéressant sur X en appliquant l'opérateur \mathbb{E} à l'équation 3.3.

Corrolaire 3.1.

$$\mathbb{E}(X) = \alpha + \mathbb{E}(X) + p - 1$$

De plus, si $\mathbb{E}(X) < +\infty$ alors $p = 1 - \alpha$.

Intéressons-nous maintenant de plus près à la fonction génératrice de X .

Lemme 3.3. Pour tout $0 < s \leq 1$,

$$\mathcal{G}_{(X-1)^+}(s) = p + \frac{1}{s}(\mathcal{G}_X(s) - p)$$

Cette égalité peut en fait se prolonger par continuité en $s = 0$ et est donc valable pour tout $s \in [0, 1]$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{(X-1)^+}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}((X-1) = n) \\
&= p + \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n+1) \\
&= p + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n) \\
&= p + \frac{1}{s} (\mathcal{G}_X(s) - p)
\end{aligned}$$

□

En rappelant que la fonction génératrice d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ est $\mathcal{G}(s) = e^{\alpha(s-1)}$ et que la fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes est égale au produit des fonctions génératrices, on obtient : pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\mathcal{G}_X(s) = \exp\left(\alpha(s-1) + p + \frac{1}{s}(\mathcal{G}_X(s) - p) - 1\right) \quad (3.4)$$

Etant donné qu'on voudra à terme un résultat portant sur $\mathbb{E}(X)$, il est naturel de vouloir dériver cette égalité.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}'_X(s) &= \left(\alpha + \frac{\mathcal{G}'_X(s)}{s} + \frac{p - \mathcal{G}_X(s)}{s^2}\right) \mathcal{G}_X(s) \\
\mathcal{G}'_X(s) \left(1 - \frac{\mathcal{G}_X(s)}{s}\right) &= \left(\alpha + \frac{p - \mathcal{G}_X(s)}{s^2}\right) \mathcal{G}_X(s)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{G}'_X(s) = \frac{(\alpha s^2 + p - \mathcal{G}_X(s)) \mathcal{G}_X(s)}{s(s - \mathcal{G}_X(s))} \quad (3.5)$$

Cette dernière égalité permet d'obtenir une première information importante sur p .

Proposition 3.1. $p \geq 1 - \alpha$

Preuve. Supposons par l'absurde que $p < 1 - \alpha$. On sait que quand $s \nearrow 1^-$, $\mathcal{G}'_X(s) \rightarrow \mathbb{E}(X)$, que cette quantité soit finie ou non (X étant une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}). Le théorème 1.3 assure que l'arbre de $PGW(1)$ a presque sûrement un nombre fini de noeuds et comme, presque sûrement, un nombre fini de voitures arrive à chaque noeud, X est presque sûrement fini et donc on a bien $\mathcal{G}_X(1) = 1$. Dès lors, dans la dernière égalité, le numérateur $(\alpha s^2 + p - \mathcal{G}_X(s)) \mathcal{G}_X(s) \xrightarrow{s \nearrow 1^-} \alpha + p - 1 < 0$.

Cependant, le dénominateur tend vers 0. On a alors nécessairement $\mathbb{E}(X) = +\infty$ ($-\infty$ est impossible puisque $X \geq 0$). Ceci implique alors que : $s - \mathcal{G}_X(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^-} 0^-$. Ainsi, pour $s < 1$ suffisamment proche de 1, $s - \mathcal{G}_X(s) < 0$ et donc $1 - \frac{\mathcal{G}_X(s)-1}{s-1} > 0$, et en faisant $s \rightarrow 1^-$, on a $1 - \mathbb{E}(X) \geq 0$, soit encore $\mathbb{E}(X) \leq 1$. Ce qui contredit $\mathbb{E}(X) = +\infty$. D'où le résultat annoncé. □

En réarrangeant les termes de 3.4, on a :

$$-s^{-1} \mathcal{G}_X(s) \exp(-s^{-1} \mathcal{G}_X(s)) = -s^{-1} \exp(\alpha(s-1) - 1 + p(1-s^{-1}))$$

Dès lors, introduisons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x e^x \in \mathbb{R}$ de sorte que :

$$f(-s^{-1} \mathcal{G}_X(s)) = -s^{-1} \exp(\alpha(s-1) - 1 + p(1-s^{-1})) \quad (3.6)$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

FIGURE 1 – Tableau de variation de f

Proposition 3.2. Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $p = 1 - \alpha$.

Preuve. Dans un premier temps, montrons que pour tout $s \in]0, 1[$, $-s^{-1}\mathcal{G}_X(s) < -1$. Or, quand $s \rightarrow 0^+$, $-s^{-1}\mathcal{G}_X(s) \rightarrow -\infty$. Il suffit alors de montrer que pour tout $s \in]0, 1[$, $f(-s^{-1}\mathcal{G}_X(s)) > -e^{-1}$. En effet, supposons ce fait vérifié mais qu'il existe $s_0 \in]0, 1[$ tel que $-s_0^{-1}\mathcal{G}_X(s_0) \geq -1$. La continuité de $s \mapsto -s^{-1}\mathcal{G}_X(s)$ et le théorème des valeurs intermédiaires assurent alors qu'il existe $s_1 \in]0, 1[$ tel que $-s_1^{-1}\mathcal{G}_X(s_1) = -1$. En appliquant f à cette égalité, on obtient une contradiction. Attachons-nous dès lors à montrer que pour tout $s \in]0, 1[$, $f(-s^{-1}\mathcal{G}_X(s)) > -e^{-1}$.

$$\begin{aligned}
& f(-s^{-1}\mathcal{G}_X(s)) > -e^{-1} \\
\iff & -s^{-1} \exp(\alpha(s-1) - 1 + p(1-s^{-1})) > -e^{-1} && \text{(d'après 3.6)} \\
\iff & \exp(\alpha(s-1) - 1 + p(1-s^{-1})) < s \\
\iff & g(s) = \alpha(s-1) - 1 + p(1-s^{-1}) - \log(s) < 0
\end{aligned}$$

Or, $g'(s) = \alpha + \frac{p}{s^2} - \frac{1}{s}$ et donc $g'(s) > 0 \iff \alpha s^2 - s + p > 0$. Mais en se rappelant que $p \geq 1 - \alpha$:

$$\alpha s^2 - s + p \geq \alpha s^2 - s + 1 - \alpha = \alpha(s-1) \left(s - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right)$$

Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{\alpha} - 1 > 1$ et donc on a pour tout $s \in]0, 1[$, $\alpha s^2 - s + p > 0$ puis $g'(s) > 0$. Ainsi g est strictement croissante sur $]0, 1[$ et donc pour tout $s \in]0, 1[$, $g(s) < g(1) = 0$.

Maintenant, supposons par l'absurde que $p > 1 - \alpha$ et considérons alors $s_0 = \frac{1-p}{\alpha} \in]0, 1[$ qui vérifie :

$$\begin{aligned}
\alpha s_0 - \alpha - 1 + p \left(1 - \frac{1}{s_0} \right) &= 1 - p - \alpha - 1 + \frac{1-p-\alpha}{1-p} p \\
&= \frac{1-p-\alpha-1-p+p^2+\alpha p+p+p-p^2-\alpha p}{1-p} \\
&= \frac{-\alpha}{1-p} \\
&= -\frac{1}{s_0}
\end{aligned}$$

En évaluant l'égalité 3.6 en s_0 , on obtient :

$$f(-s_0^{-1}\mathcal{G}_X(s_0)) = -s_0^{-1} \exp(-s_0^{-1})$$

Soit encore :

$$f(-s_0^{-1}\mathcal{G}_X(s_0)) = f(-s_0^{-1})$$

Or $-s_0^{-1} < -1$ et $-s_0^{-1}\mathcal{G}_X(s_0) < -1$ et f est injective sur $]-\infty, -1]$, ce qui donne $-s_0^{-1} = -s_0^{-1}\mathcal{G}_X(s_0)$. Et donc :

$$\mathcal{G}_X(s_0) = 1$$

Ceci implique que $\forall s \in [s_0, 1], \mathcal{G}_X(s) = 1$. Mais \mathcal{G}_X est convexe donc en particulier au dessus de sa tangente en $(1, 1)$ qui n'est autre que la droite d'équation $x = 1$. On aurait alors finalement $\forall s \in [0, 1], \mathcal{G}_X(s) = 1$. Entre autres, on aurait $\mathcal{G}_X(0) = p = 1$, ce qui n'est pas. \square

Proposition 3.3. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $p > 1 - \alpha$.

Preuve. Supposons par l'absurde que $\alpha > \frac{1}{2}$ et que $p = 1 - \alpha$. Introduisons les fonctions $u, v :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $u(s) = \alpha(s - 1) - 1 + p(1 - s^{-1}) = \alpha(s + s^{-1} - 2) - s^{-1}$ et $v(s) = -s^{-1} \exp(u(s))$, de sorte que $f(-s^{-1}\mathcal{G}_X(s)) = v(s)$ pour $s \in]0, 1]$.

On a :

$$v(1) = -e^{-1}$$

$$v'(s) = \exp(u(s)) \left[\alpha \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right]$$

$$v'(1) = 0$$

$$v''(s) = \exp(u(s)) \left[\left(\alpha \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} \right) \left(\alpha \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} \right) + \alpha \left(-\frac{3}{s^4} + \frac{1}{s^2} \right) + \frac{3}{s^4} - \frac{2}{s^3} \right]$$

$$v''(1) = e^{-1}(1 - 2\alpha) < 0$$

Ainsi, v étant \mathcal{C}^∞ au voisinage de 1, en appliquant la formule de Taylor en 1, on a :

$$v(s) + e^{-1} \sim \frac{v''(1)}{2}(s - 1)^2$$

En particulier, pour un certain $s < 1$ suffisamment proche de 1, $v(s) < -e^{-1}$ c'est-à-dire

$$f(-s^{-1}\mathcal{G}_X(s)) < -e^{-1}$$

C'est absurde puisque $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -e^{-1}$. □

On voit ainsi apparaître deux comportements différents en fonction de α . Cette transition en $\alpha = \frac{1}{2}$ s'observe en fait encore plus largement au niveau de $\mathbb{E}(X)$ comme le montre le théorème suivant :

Théorème 3.2.

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2\alpha} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } \frac{1}{2} < \alpha \end{cases}$$

Preuve. En se rappelant du corollaire 3.1, on obtient directement le cas $\alpha > \frac{1}{2}$. En effet, si $\alpha > \frac{1}{2}$, comme $p > 1 - \alpha$, il est impossible d'avoir $\mathbb{E}(X) < +\infty$.

Supposons maintenant $\alpha \leq \frac{1}{2}$ de sorte qu'on a $p = 1 - \alpha$. Revenons à l'équation 3.5 :

$$\mathcal{G}'_X(s) = \frac{(\alpha s^2 + 1 - \alpha - \mathcal{G}_X(s)) \mathcal{G}_X(s)}{s(s - \mathcal{G}_X(s))}$$

Et cherchons à obtenir la limite quand $s \rightarrow 1^-$ de $\mathcal{G}'_X(s)$. Le dénominateur et le numérateur tendent vers 0, on va donc appliquer la règle de l'Hôpital qui dit que : si $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ et si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. On applique ici à $f, g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ où $f(x) = \alpha x^2 + 1 - \alpha - \mathcal{G}_X(x)$ et $g(x) = x - \mathcal{G}_X(x)$.

Supposons que $\mathcal{G}'_X(1^-) = +\infty$. Alors : $\frac{f'(s)}{g'(s)} \underset{s \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\mathcal{G}'_X(s)}{-\mathcal{G}'_X(s)} \rightarrow 1$. Et donc, par la règle de l'Hôpital : $\mathcal{G}'_X(1^-) = 1$, c'est absurde. On en déduit que : $\mathcal{G}'_X(1^-) < +\infty$.

Dans ce cas, la règle de l'Hôpital nous donne :

$$\mathcal{G}'_X(1^-) = \frac{2\alpha - \mathcal{G}'_X(1^-)}{1 - \mathcal{G}'_X(1^-)}$$

Ce qui donne après réarrangement, une équation polynomiale de degré 2 vérifiée par $\mathcal{G}'_X(1^-) = \mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X) + 2\alpha = 0 \tag{3.7}$$

Le discriminant est : $\Delta = 4(1 - 2\alpha) \geq 0$, justement parce que $\alpha \leq \frac{1}{2}$. On a donc deux valeurs possibles : $\mathbb{E}(X) = 1 \pm \sqrt{1 - 2\alpha}$.

Pour conclure, nous aurons besoin de ce résultat :

Lemme 3.4. $\mathbb{E}(X)$ est une fonction croissante de α .

Preuve. Soit $T \sim PGW(1)$. Soit $\alpha < \beta$. On se donne des variables $(\mathcal{P}_\alpha(v))_{v \in T}$ iid suivants la loi $\mathcal{P}(\alpha)$ et au lieu de considérer la même chose pour β , considérons plutôt $(\mathcal{P}_{\beta-\alpha}(v))_{v \in T}$ iid suivants la loi $\mathcal{P}(\beta - \alpha)$, indépendantes des variables $(\mathcal{P}_\alpha(v))_{v \in T}$. Les variables aléatoires que nous considérons pour l'expérience de parcage dans le cas où le paramètre de la loi de Poisson donnant le nombre de voitures à chaque noeud est β sont alors $(\mathcal{P}_\alpha(v) + \mathcal{P}_{\beta-\alpha}(v))_{v \in T}$ qui suivent en effet une loi de Poisson de paramètre β . Alors, il est clair que $X_\alpha \leq X_\beta$ (X_γ correspondant au nombre de voitures visitant la racine de T dans le cas où la loi du nombre de voiture à chaque noeud est une loi de Poisson de paramètre γ) puisque $\forall v \in T, \mathcal{P}_\alpha(v) \leq \mathcal{P}_\alpha(v) + \mathcal{P}_{\beta-\alpha}(v)$. Et donc on a bien :

$$\mathbb{E}(X_\alpha) \leq \mathbb{E}(X_\beta)$$

□

On peut donc conclure en montrant que la seule option de signe pour que la croissance de $\mathbb{E}(X)$ en α soit respectée est : $\mathbb{E}(X) = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha}$. Notons $e_+(\alpha) = 1 + \sqrt{1 - 2\alpha}$ et $e_-(\alpha) = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha}$. Remarquons que $\forall \alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}[, e_+(\alpha) > e_-(\beta)$. Supposons qu'il existe $\alpha < \frac{1}{2}$ tel que $\mathbb{E}(X_\alpha) = e_+(\alpha)$. Si $\alpha < \beta < \frac{1}{2}$, alors quel que soit le choix de signe pour $\mathbb{E}(X_\beta)$, on aurait $\mathbb{E}(X_\alpha) > \mathbb{E}(X_\beta)$. Ce qui n'est pas possible d'après le lemme précédent.

On obtient donc le résultat annoncé. □

Remarque. Avec un peu plus de travail, on pourrait, comme Goldschmidt dans [1], obtenir des résultats encore plus précis sur X . On peut notamment obtenir une majoration de p dans le cas $\alpha > \frac{1}{2}$. De plus, on peut en fait donner une expression exacte de la fonction génératrice en introduisant les deux branches réelles de la fonction W de Lambert (il s'agit des réciproques de f sur les intervalles où celle-ci réalise une bijection).

3.4.2 Simulations

Dans cette partie, on fixe deux variables aléatoires N et P . On se donne un arbre aléatoire de Galton-Watson T de loi de génération la loi de N . La loi d'arrivée des voitures est la loi de P . Soit X la variable aléatoire associée au nombre de voitures qui visitent la racine de l'arbre. Nous souhaitons tracer l'espérance de X : $\mathbb{E}(X)$ en fonction du paramètre $\alpha = \mathbb{E}(P)$.

Principe et fonctionnement Le principe de la simulation est simple, elle fonctionne en plusieurs étapes :

1. Le tirage aléatoire d'un arbre de loi N . L'arrêt de cette étape est assuré par le fait que N est telle que les arbres tirés sont presque sûrement finis.
2. Le "calcul" de $\mathbb{E}(X)$ se fait par l'approximation donnée par la loi des grands nombres. Le nombre d'itérations faites pour effectuer cette approximation sera noté N_{it} .
3. Le tracé $\mathbb{E}(X) = f(\alpha)$.

Interprétation : Le premier problème a priori qui se pose à nous vient du fait que les théorèmes que nous allons tester en simulation sont des théorèmes qui nous donne une espérance infinie dans un cas. Mais en réalité, même si les résultats numériques seront finis, on observera une transition de phase tout de même puisque le fait que X ne vérifie plus la loi des grands nombres au dessus de la valeur critique va donner des oscillations aléatoires et significatives dans les valeurs de l'espérance.

Implémentation : Pour coder les arbres de façon efficace, nous avons utilisé le codage de Prüfer. En effet, ce codage ne représente les arbres que par les relations père/fils ce qui est particulièrement efficace pour nous qui souhaitons faire remonter des voitures vers la racine. Le principe est le suivant : Soit T un arbre étiqueté enraciné en 0 à n sommets numérotés de 0 à $n - 1$. Le codage de Prüfer de T est alors la liste $(p(i), i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket)$ où p est la fonction qui au sommet i associe son unique père dans l'arbre T .

Simulation du théorème 3.2

Codage des lois de Poisson : Pour faire des tirages de voitures et de fils dans l'arbre avec des lois de Poisson, nous avons utilisé le module random de Python qui permet de faire tout cela automatiquement.

Résultats : La figure 2 illustre parfaitement le théorème. On constate que la courbe expérimentale suit bien la loi théorique jusqu'à 0.5 et les écarts à la courbe théorique sont liés à l'approximation de la loi des grands nombres utilisée pour calculer l'espérance.

Dans la figure 4 on peut observer que $\mathbb{E}[X]$ fluctue énormément : l'écart type est de l'ordre de 10 à 100 pour seulement de l'ordre de 0.1 avant la valeur critique (cf figure 3). On remarque aussi que l'espérance se met à fluctuer fortement légèrement après la valeur critique, cependant plus le nombre d'itérations pour le calcul de l'espérance est élevé plus cette valeur critique "observée" tend vers la valeur critique théorique ce qui nous assure que ce phénomène n'est lié qu'à l'approximation numérique faite sur l'espérance.

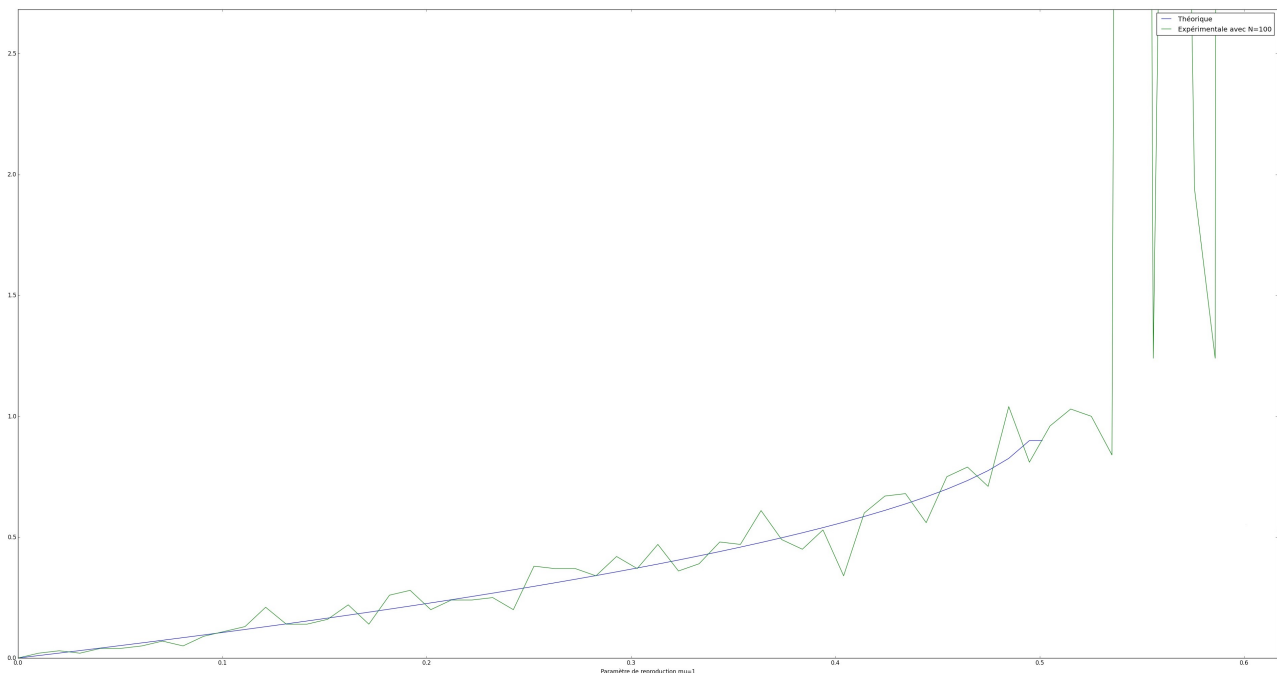


FIGURE 2 – Tracé de $\mathbb{E}(X) = f(\alpha)$ pour $N \sim \text{Poisson}(1)$ et $P \sim \text{Poisson}(1)$ pour $N_{it} = 100$.

Conjecture Dans la dernière partie de l'article de Goldschmidt, la conjecture suivante est présentée :

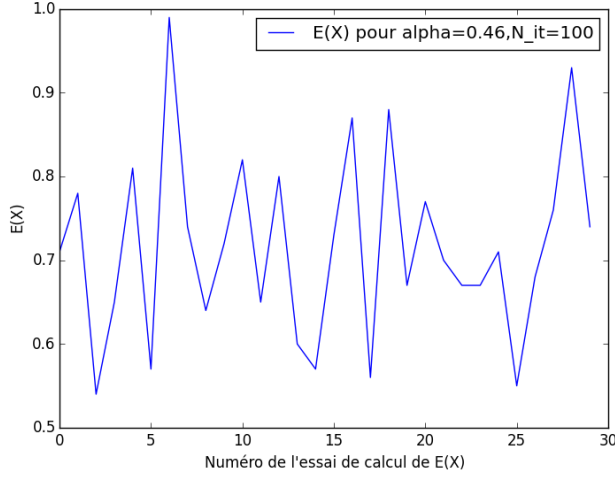


FIGURE 3 – Tracé de 30 calculs de $E[X]$ pour $\alpha = 0.46 < \alpha_c$ et $N_{it} = 100$.

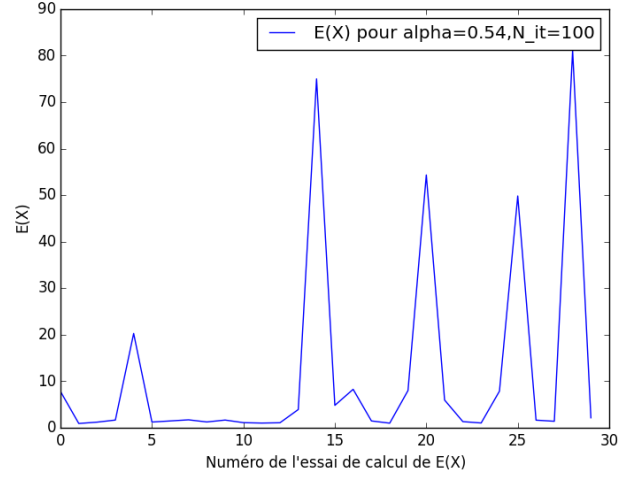


FIGURE 4 – Tracé de 30 calculs de $E[X]$ pour $\alpha = 0.54 > \alpha_c$ et $N_{it} = 100$.

Conjecture 3.1. *On suppose que $\mathbb{E}(N) = 1$, $\text{var}(N) \leq 1$, que P est stochastiquement croissante en α et que $\text{var}(P) < \infty$ pour tout $\alpha \geq 0$. On définit alors :*

$$h(\alpha) = \mathbb{E}(P^2) - \alpha,$$

$$\alpha_c = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha = 1 - \sqrt{\text{var}(N)h(\alpha)}\}.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \frac{1 - \alpha + \alpha \text{var}(N) - \sqrt{(1 - \alpha)^2 - \text{var}(N)h(\alpha)}}{\text{var}(N)} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \alpha_c \\ \infty & \text{si } \alpha_c < \alpha \end{cases}$$

Pour tester cette conjecture nous essaierons une loi de génération de Poisson de paramètre 1 et comme loi d'arrivée de voitures une loi géométrique décalée de paramètre $p \in [1/2, 1]$. C'est-à-dire :

$$\forall k \geq 0, \mathbb{P}(P = k) = pq^k \quad (3.8)$$

On appellera cette simulation la Poisson/Géométrique. On a alors les résultats simples suivants :

Proposition 3.4. Soit $p \in [1/2, 1]$,

$$\mathbb{E}(P) = \frac{q}{p} \quad (3.9)$$

$$\mathbb{E}(P^2) = \frac{p(1+p)}{q^2}. \quad (3.10)$$

Ces résultats triviaux nous permettent de calculer directement :

Proposition 3.5. Pour la simulation Poisson/Géométrique on a pour $\alpha \in [0, 1]$,

$$h(\alpha) = 2\alpha^2 \quad (3.11)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

La conjecture donne alors dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ \infty & \text{si } \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < \alpha \end{cases} \quad (3.13)$$

Résultats : En figure 7 on voit que l'écart-type est comme pour les simulations précédentes très élevé pour les valeurs au delà de la valeur critique par rapport aux valeurs avant la valeur critique (cf figure 6). On constate ici encore que la loi des grands nombres n'est plus vérifiée pour la valeur aléatoire qui n'est plus intégrable. La figure 5 montre elle le suivie de la courbe théorique avant cette valeur critique. L'écart-type relatif à la courbe théorique pour ces valeurs est de l'ordre de 10 à 100 ici encore.

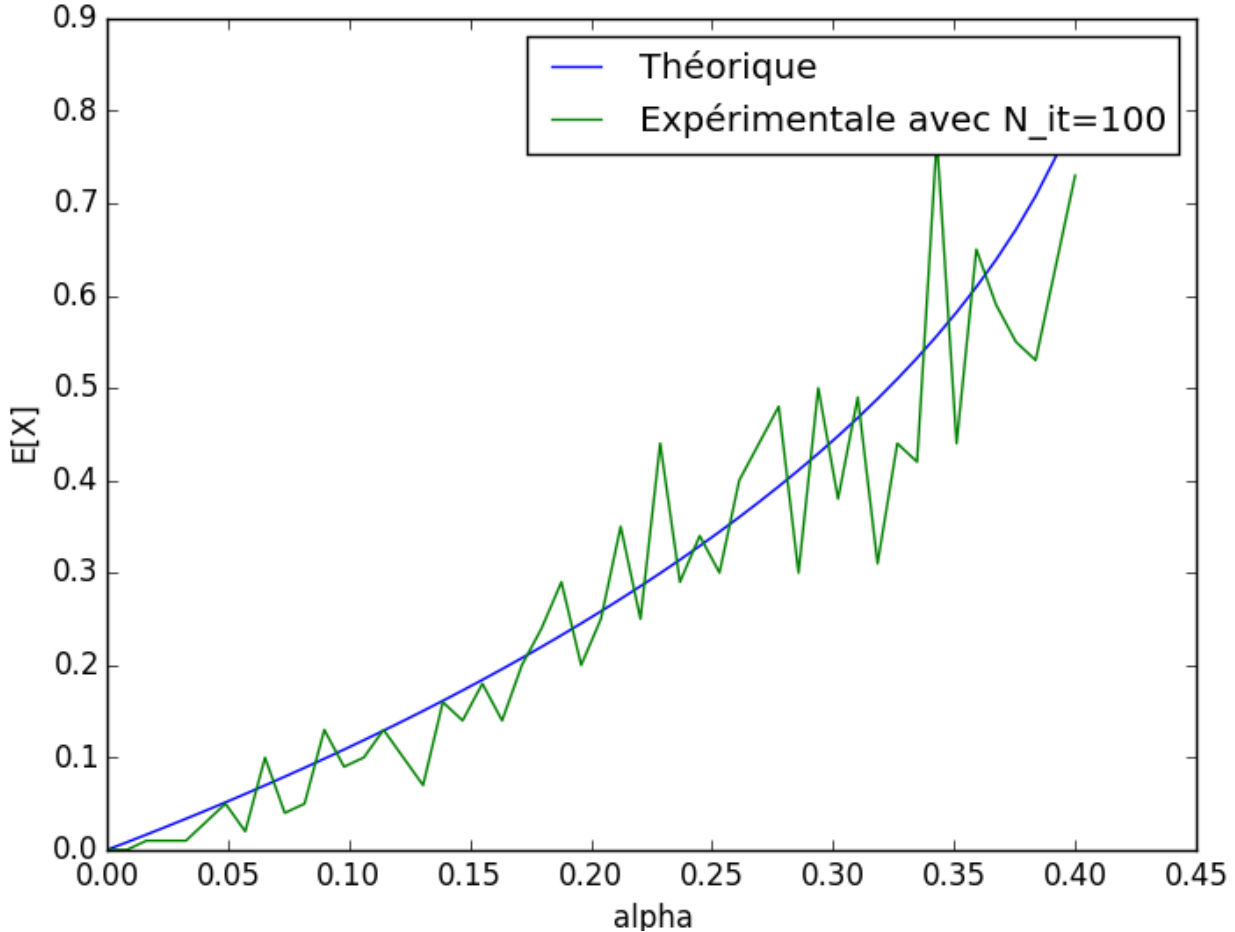


FIGURE 5 – Tracé de $\mathbb{E}(X) = f(\alpha)$ pour $N \sim \mathcal{P}(1)$ et $P \sim \text{Geom}(1)$ pour $N_{it} = 100$ avant la valeur critique.

3.5 Etude du modèle limite $PGW_{\infty}(1)$

3.5.1 Etude du nombre de voitures à la racine d'un arbre $PGW_{\infty}(1)$

Maintenant que nous connaissons suffisamment de choses sur le nombre de voitures qui arrivent à la racine d'un arbre de Poisson-Galton-Watson de paramètre 1, on peut s'intéresser à la probabilité que toutes les voitures se garent dans l'arbre infini $PGW_{\infty}(1)$. En se rappelant sa construction dans la partie 1.2.3, on peut considérer son unique chemin infini $C_{\infty} = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$. A chaque sommet de ce chemin est enraciné un arbre $PGW(1)$.

Pour chaque sommet v_i , on considère alors $X_i \sim X$ le nombre de voitures qui arrivent à la racine v_i de l'arbre enraciné et posons :

$$S_n = n - \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (1 - X_i)$$

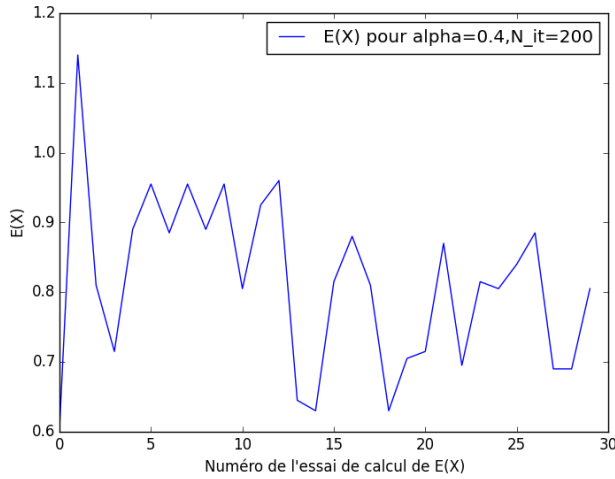


FIGURE 6 – Tracé de 30 calculs de $E[X]$ pour $\alpha = 0.4 < \alpha_c$ et $N_{it} = 200$.

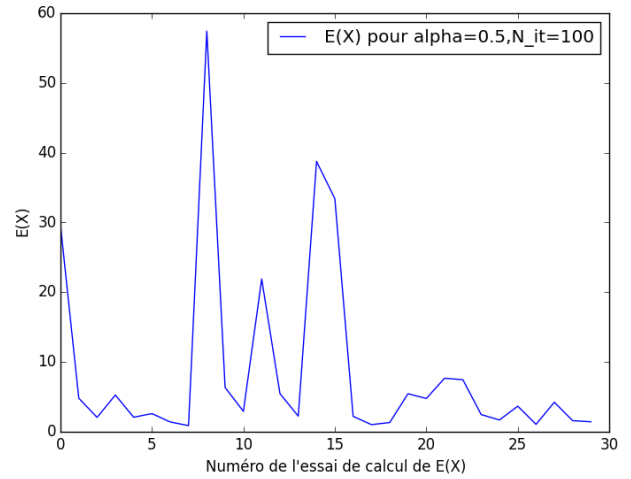


FIGURE 7 – Tracé de 30 calculs de $E[X]$ pour $\alpha = 0.5 > \alpha_c$ et $N_{it} = 100$.

On se trouve finalement ici dans une situation où l'on a un arbre C_∞ donné avec un nombre de voitures qui arrivent à chaque noeud suivant la loi de X .

Lemme 3.5. Toutes les voitures peuvent se garer dans $PGW_\infty(1) \iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n \geq 0$.

Preuve. Supposons qu'il existe $n > 0$ tel que $S_n < 0$. On va donc avoir $\sum_{i=1}^n X_i$ voitures voulant se garer dans les places $\{v_1, \dots, v_n\}$. Mais puisque $S_n < 0$, il y a plus de voitures que de places et donc toutes les voitures ne pourront pas se garer.

Réciproquement, supposons que toutes les voitures ne puissent pas se garer dans l'arbre. Il existe donc un entier $n > 0$ tel que $X_n > 0$ et tel qu'au moins une voiture arrivant en v_n ne puisse pas se garer dans l'arbre C_∞ . Il y a alors plus de voitures que de places disponibles entre v_1 et v_n . Ainsi $S_n < 0$. \square

On veut donc calculer la probabilité :

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$$

S_n est en fait une marche aléatoire de position initiale $S_0 = 0$ et de pas $1 - X_i$. Donnons dès à présent un résultat sur des marches aléatoires particulières qui nous sera utile.

3.5.2 Marche aléatoire sans saut vers le haut et à dérive positive

Considérons Y une variable aléatoire à valeurs entières telle que $\mathbb{P}(Y > 1) = 0$ et telle que $\mathbb{E}(Y) > 0$. Considérons la marche aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ où les Y_i sont des variables iid suivant la loi de Y . On se propose alors de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.6.

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{P}(Y = 1)}$$

Notons $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = 1\}$.

De façon générale, notons $T_j = \inf\{n \in \mathbb{N}, S_n = j\}$ et remarquons que $T_{j+1} - T_j$ suit la même loi que T puisque $T_{j+1} - T_j$ donne le temps pour qu'une certaine marche aléatoire de pas X croisse de 1. On en déduit notamment que $\mathbb{E}(T_j) = j\mathbb{E}(T)$.

Lemme 3.6.

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$$

Preuve. Commençons par calculer $\mathbb{E}(T|Y_1 = -k)$ pour $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. On a $\mathbb{E}(T|Y_1 = 1) = 1$ et si $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T|Y_1 = -k) &= \sum_{t=0}^{\infty} t\mathbb{P}(T = t|Y_1 = -k) \\
&= \sum_{t=k+2}^{\infty} t\mathbb{P}(T = t|Y_1 = -k) \\
&= \sum_{t=k+2}^{\infty} \sum_{\tau=2}^{t-k} t\mathbb{P}[(\inf\{i, S_i = -(k-1)\} = \tau) \cap (T = t)|Y_1 = -k] \\
&= \sum_{t=k+2}^{\infty} \sum_{\tau=2}^{t-k} t\mathbb{P}(T = \tau - 1)\mathbb{P}((T = t - \tau + 1|Y_1 = -(k-1))
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité s'obtient en séparant la marche qui arrive pour la première fois en $-k + 1$ au temps τ sachant qu'elle est en $-k$ au temps 1 en deux marches aléatoires indépendantes : une qui va de $-k$ à $-k + 1$ en $\tau - 1$ pas (vu alors comme une marche qui va de 0 à 1 en $\tau - 1$ pas) et une marche qui est en $-(k - 1)$ au temps τ (vu comme une marche qui est en $-(k - 1)$ au temps 1). Dès lors achevons ce calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T|Y_1 = -k) &= \sum_{\tau=2}^{\infty} \sum_{t=\tau+k}^{\infty} t\mathbb{P}(T = \tau - 1)\mathbb{P}((T = t - \tau + 1|Y_1 = -(k-1)) \\
&= \sum_{\tau=2}^{\infty} \sum_{t=k+1}^{\infty} (t + \tau - 1)\mathbb{P}(T = \tau - 1)\mathbb{P}((T = t|Y_1 = -(k-1)) \\
&= \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{t=k+1}^{\infty} (t + \tau)\mathbb{P}(T = \tau)\mathbb{P}((T = t|Y_1 = -(k-1)) \\
&= \sum_{t=k+1}^{\infty} t\mathbb{P}((T = t|Y_1 = -(k-1)) + \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau\mathbb{P}(T = \tau) \\
&= \mathbb{E}(T|Y_1 = -(k-1)) + \mathbb{E}(T)
\end{aligned}$$

D'où on en déduit :

$$\mathbb{E}(T|Y_1 = -k) = 1 + (k + 1)\mathbb{E}(T)$$

Calculons maintenant l'espérance de la variable aléatoire $1 + (1 - Y_1)\mathbb{E}(T)$ grâce à la formule précédente. D'une part, on voit qu'il s'agit de $1 + \mathbb{E}(T)(1 - \mathbb{E}(Y))$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(1 + (1 - Y_1)\mathbb{E}(T)) &= \sum_{k=-1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_1 = -k)\mathbb{E}(T|Y_1 = -k) \\
&= \sum_{k=-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} t\mathbb{P}(T = t \cap Y_1 = -k) \\
&= \mathbb{E}(T)
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\mathbb{E}(T) = 1 + \mathbb{E}(T)(1 - \mathbb{E}(Y))$$

D'où le résultat annoncé :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$$

□

Nous admettrons le résultat suivant en lien avec un théorème de renouvellement :

Lemme 3.7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n \in \{T_j, j \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{\mathbb{E}(T)}$

Et nous l'utilisons pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.8.

$$\mathbb{P}(S_n \neq 0, \forall n > 0) = \frac{1}{\mathbb{E}(T)}$$

Preuve. Commençons par remarquer que $\mathbb{P}(S_n \neq 0, \forall n > 0) = \mathbb{P}(S_n > 0, \forall n > 0)$. En effet, la loi des grands nombres assure que S_n est presque sûrement positive à partir d'un certain rang. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > 0, \forall n > 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > 0, \dots, S_1 > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n + \dots + Y_1 > 0, \dots, Y_1 > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n + \dots + Y_1 > 0, \dots, Y_{n-1} + Y_n > 0, Y_n > 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n > S_j, \forall j \in \{0, \dots, n-1\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n \in \{T_j, j \in \mathbb{N}\}) \end{aligned}$$

□

Preuve. On a finalement les cartes en main pour prouver la proposition.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > 0, \forall n > 0) &= \mathbb{P}(Y_1 = 1) \mathbb{P}(S_n > 0, \forall n > 0) | Y_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1) \mathbb{P}(S_n \geq 1, \forall n \geq 1) | Y_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1) \mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \geq 0) \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{\mathbb{E}(T)} = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(Y = 1) \mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \geq 0)$$

□

3.5.3 Le résultat pour le modèle limite

Théorème 3.3. Soit $T \sim PGW_\infty(1)$ un arbre aléatoire enraciné en ρ dont toutes les arêtes sont orientées vers la racine. Soit $\alpha > 0$ et soit $(X_v)_{v \in T}$ une suite de variables aléatoires iid, suivant une loi de Poisson de paramètre α et indépendantes de T . Supposons qu'en chaque noeud $v \in T$, X_v voitures veulent se garer et suivent le processus de parage décrit au préalable. Notons A_α l'évènement : "Toutes les voitures peuvent se garer". Alors :

$$\mathbb{P}(A_\alpha) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-2\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Preuve. En reprenant les notations de la partie 3.5.1, on cherche à calculer $\mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N})$.

— Cas $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

(S_n) est alors une marche aléatoire dont le pas est $1 - X$ qui vérifie $\mathbb{P}(1 - X > 1) = 0$ et $\mathbb{E}(1 - X) = 1 - \mathbb{E}(X) = \sqrt{1 - 2\alpha} > 0$ d'après le théorème 3.2. On est donc dans le cas de la partie précédente. Or, on sait que $\mathbb{P}(1 - X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \alpha$ d'après la proposition 3.2. Finalement,

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}) = \frac{\mathbb{E}(1 - X)}{\mathbb{P}(1 - X = 1)} = \frac{\sqrt{1 - 2\alpha}}{1 - \alpha}$$

— Cas $\alpha \geq \frac{1}{2}$

Par le même argument de couplage utilisé dans la preuve du théorème 3.2 (si $\alpha < \beta$, on peut construire les variables telles que le nombre de voitures à la racine N_α soit inférieur N_β), on obtient que $\mathbb{P}(A_\alpha)$ est une fonction décroissante en α . Ainsi, si $\alpha > \frac{1}{2}$, on a :

$$\mathbb{P}(A_\alpha) \leq \inf_{\beta < \frac{1}{2}} \mathbb{P}(A_\beta) = 0$$

□

3.6 Preuve du théorème 3.1

On montre maintenant que le théorème 3.1 s'obtient à partir des résultats précédents et de l'utilisation de la convergence locale faible. Nous avons étudié précédemment l'objet limite, l'arbre squelette T , et nous allons maintenant nous préoccuper de savoir si les propriétés que nous étudions se transmettent bien à la limite locale faible. Nous allons montrer que c'est effectivement le cas.

Nous introduisons certaines notations pour que la preuve soit plus claire. Pour un arbre enraciné et étiqueté (τ, ρ) et pour un nombre d'arrivées $\pi = (\pi(v), v \in V(\tau))$ à chaque sommet on note $\chi(\tau, \pi)$ le nombre de voitures qui arrivent à la racine de l'arbre. On a alors la proposition naïve suivante :

Proposition 3.7. On note π' une autre donnée des arrivées dans (τ', ρ') un autre arbre enraciné étiqueté.

1. Si $\forall v \in V(\tau), \pi(v) \leq \pi'(v)$, alors $\chi(\tau, \pi) \leq \chi(\tau, \pi')$.
2. Si τ est un sous-arbre de τ' tel que $\rho = \rho'$, alors $\chi(\tau, \pi'_{|V(\tau)}) \leq \chi(\tau', \pi')$.

On peut alors démontrer le théorème. Luczak et Winkler ont montré dans [7] que l'on peut construire un couplage de la suite (T_n) croissant. On supposera donc que la suite (T_n) est croissante. T est alors la limite croissante des T_n . Par croissance, chaque T_n est un sous-arbre de T . Ceci permet notamment d'obtenir une numérotation des noeuds de T en disant que le $n + 1$ -ème noeud est l'unique noeud de $T_{n+1} \setminus T_n$. On choisit donc de numéroter ainsi les noeuds de T .

3.6.1 Cas $\alpha < 1/2$

On démontre le résultat en deux temps, en minorant la limite inférieure et en majorant la limite supérieure par la même quantité.

Limite inférieure : Soit β tel que $\alpha < \beta < 1/2$. On pose l'évènement suivant qui simplifie notre travail ensuite et dont la probabilité a le bon goût de tendre vers 1 :

$$E'_n = \left\{ \sum_{i=1}^n P^{(\beta)}(i) \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right\}$$

On place initialement sur chaque sommet $i \in \mathbb{N}$ de l'arbre un nombre $P^{(\beta)}(i)$ de voitures. On enlève ensuite $(\sum_{i=1}^n P^{(\beta)}(i) - \lfloor \alpha n \rfloor)^+$ voitures choisies aléatoirement et uniformément parmi le total de voitures distribuées sur les sommets $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note alors $P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i)$ le nombre de voitures qu'il reste sur le sommet $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors :

- Lemme 3.9.**
1. $\mathbb{P}(E'_n) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.
 2. $P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i) \leq P^\beta(i), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
 3. Sur E'_n , on a $(P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \stackrel{d}{=} (P_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$.

Remarque. Ce lemme nous explique pourquoi il est plus simple de se placer sur E'_n , en effet les nombres de voitures restantes sur les sommets suivent une multinômiale.

Preuve. 1. La loi faible des grands nombres nous assure que $\mathbb{P}(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P^{(\beta)}(i) < \alpha) \rightarrow 0$, d'où le résultat.

2. Clair.

3. Ce résultat découle directement du corollaire 1.2. □

Par la proposition 3.7 et le point 2 du lemme 3.9 on déduit que sur l'évènement E'_n on a $\chi(T_n, P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}) \leq \chi(T, P^{(\beta)})$. D'où pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi(T, P^{(\beta)}) \in \{0, 1\} \cap E'_n) &\leq \mathbb{P}(\chi(T_n, P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}) \in \{0, 1\} \cap E'_n) \\ &\leq \mathbb{P}(\chi(T_n, P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}) \in \{0, 1\}) \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{P}(\chi(T, P^{(\beta)}) \in \{0, 1\} \cap E'_n) \rightarrow \frac{\sqrt{1-2\beta}}{1-\beta}$. En effet, on a par le théorème 3.3 que $\mathbb{P}(A_\beta) = \frac{\sqrt{1-2\beta}}{1-\beta}$ car $\beta < 1/2$. Ce qui nous assure que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi(T, P^{(\beta)}) \in \{0, 1\} \cap E'_n) &= \mathbb{P}(A_\beta) - \mathbb{P}(\chi(T, P^{(\beta)}) \in \{0, 1\} \cap \overline{E'_n}) \\ &\rightarrow \frac{\sqrt{1-2\beta}}{1-\beta}. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\chi(T_n, P'_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}) \in \{0, 1\}) \geq \frac{\sqrt{1-2\beta}}{1-\beta}.$$

Limite supérieure : Soit γ tel que $0 < \gamma < \alpha < 1/2$. On va procéder encore par couplage des arrivées, mais cette fois puisque l'espérance en γ est plus faible nous allons devoir ajouter des voitures pour retrouver une multinômiale. On considère alors l'évènement :

$$E''_n = \left\{ \sum_{i=1}^n P^{(\gamma)}(i) \leq \lfloor \alpha n \rfloor \right\}$$

qui possède les mêmes propriétés que l'évènement E'_n . On effectue un raisonnement similaire. On attribue à chaque sommet $i \in \mathbb{N}$ un nombre de voiture $P^{(\gamma)}(i)$. On ajoute ensuite $(\lfloor \alpha n \rfloor - \sum_{i=1}^n P^{(\gamma)}(i))^+$ voitures distribuées aléatoirement et uniformément sur les sommets $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note alors $P''_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i)$ le nombre de voitures qu'il reste sur le sommet $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On énonce le lemme analogue au lemme 3.9 :

Lemme 3.10. 1. $\mathbb{P}(E''_n) \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

2. $P''_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i) \geq P^{(\gamma)}(i), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

3. Sur E''_n , on a $(P''_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \stackrel{d}{=} (P_{n, \lfloor \alpha n \rfloor}(i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket)$.

On a $\chi(T, P_{|B_T(\rho, r)}^{(\gamma)}) \rightarrow \chi(T, P^{(\gamma)})$ en croissant quand $r \rightarrow \infty$. En se rappelant de la représentation en terme de marche aléatoire du nombre de voitures à la racine, puisque $\gamma < \frac{1}{2}$, la marche aléatoire est à dérive positive et donc $\chi(T, P^{(\gamma)}) < \infty$ presque sûrement. Ceci permet d'affirmer maintenant par conséquent que pour $\epsilon > 0$ il existe r_ϵ tel que pour tout $r \geq r_\epsilon$, on a :

$$\mathbb{P}(\chi(T, P_{|B_T(\rho, r)}^{(\gamma)}) \neq \chi(T, P^{(\gamma)}) < \epsilon/3).$$

On utilise alors notre résultat fondamental qui est que la suite (T_n) converge pour la convergence locale faible vers T , ce qui nous donne l'existence de n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$,

$$\mathbb{P}(B_T(\rho, r_\epsilon) \neq B_{T_n}(\rho_n, r_\epsilon)) < \epsilon/3.$$

De plus, quitte à prendre n_ϵ plus grand, on peut supposer que pour tout $n \geq n_\epsilon$, $\mathbb{P}(E_n'') < \epsilon/3$.

Un problème se pose cependant, en toute généralité on ne peut pas comparer si facilement les nombres de voitures qui passent par la racine entre T et T_n . C'est pourquoi on se place sur l'évènement bien plus simple où les boules de centre ρ et de rayon r sont égales pour les deux arbres et où de plus c'est cette simple boule qui détermine le nombre de voitures qui arrivent à la racine. La convergence locale faible va nous permettre ensuite de passer de cet évènement au cas général.

On alors l'inégalité sur l'évènement $A_n = \{\chi(T, P_{|B_T(\rho, r)}^{(\gamma)}) = \chi(T, P^{(\gamma)})\} \cap \{B_T(\rho, r) = B_{T_n}(\rho_n, r)\} \cap E_n''$:

$$\chi(T, P^{(\gamma)}) = \chi(T, P_{|B_T(\rho, r)}^{(\gamma)}) \leq \chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'' |_{B_{T_n}(\rho_n, r)}) \leq \chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'').$$

Ce qui nous donne finalement pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n \geq n_\epsilon$, les inégalités suivantes sur les probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'') \in \{0, 1\}) &= \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'') \in \{0, 1\} \cap A_n) + \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'') \in \{0, 1\} \cap \overline{A_n}) \\ &\leq \mathbb{P}(\chi(T, P^{(\gamma)}) \in \{0, 1\} \cap A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \\ &\leq \mathbb{P}(\chi(T, P^{(\gamma)}) \in \{0, 1\}) + \mathbb{P}(\overline{E_n''}) + \mathbb{P}(\chi(T, P_{|B_T(\rho, r)}^{(\gamma)}) \neq \chi(T, P^{(\gamma)})) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_T(\rho, r) \neq B_{T_n}(\rho_n, r)) \\ &< \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{1-\gamma} + \epsilon. \end{aligned}$$

On peut alors directement déduire :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [\alpha n]}'') \in \{0, 1\}) \leq \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{1-\gamma}.$$

Conclusion : Par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{1-2x}}{1-x}$ sur $[0, 1/2[$ on a pour $\beta \rightarrow \alpha$ et $\gamma \rightarrow \alpha$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n, \alpha}) \leq \frac{\sqrt{1-2\alpha}}{1-\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n, \alpha}).$$

ce qui donne le résultat souhaité pour $\alpha < 1/2$.

3.6.2 Cas $\alpha \geq 1/2$

Ce cas se traite bien plus rapidement à l'aide du précédent. Soit $\gamma < 1/2$. On a alors en faisant le même raisonnement que dans le dernier cas pour $\alpha < 1/2$, sur E_n'' :

$$\chi(T_n, P_{n, [n\gamma]}) \leq \chi(T_n, P_{n, [n\alpha]})$$

Ce qui donne :

$$\mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [n\alpha]}) \in \{0, 1\}) \leq \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [n\gamma]}) \in \{0, 1\})$$

D'où en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ et en utilisant le cas précédent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\chi(T_n, P_{n, [n\alpha]}) \in \{0, 1\}) \leq \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{1-\gamma}.$$

Et ce pour tout $\gamma < 1/2$ ce qui donne puisque $\inf_{\gamma < 1/2} \frac{\sqrt{1-2\gamma}}{1-\gamma} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n, \alpha}) = 0.$$

4 Une autre utilisation de la méthode objective : l'appariement partiel de poids maximal sur les arbres aléatoires

Afin d'illustrer au mieux la méthode objective, nous présentons ici le travail d'Aldous et Steele sur les appariements partiels de poids maximal dans les arbres aléatoires. Ce problème illustre particulièrement bien ce en quoi la méthode objective est efficace dans l'évaluation asymptotique de quantités probabilistes.

Dans cette partie, nous n'apporterons pas d'éléments de preuve des résultats énoncés. Il s'agit plutôt de présenter la méthode.

4.1 Le problème

Nous allons maintenant énoncer un certain nombre de définitions pour poser clairement le problème.

Définition 4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dite de *poids*.

On dit que S est un *appariement partiel* de G si c'est un sous-ensemble de E tel que deux arêtes de S ne partagent aucun sommet en commun. On appelle *poids de l'appariement partiel* S et on note $w(S)$ la quantité :

$$w(S) = \sum_{e \in S} w(e).$$

On dira que S^* est un *appariement partiel de poids maximal* si on a :

$$w(S^*) = \sup_{S \text{ appariement}} w(S)$$

Définition 4.2. Soit T un arbre fini enraciné d'ensemble d'arêtes E . Soit $(\xi_e)_{e \in E}$ une famille de variables aléatoires iid suivant la loi de F . On appelle $e \mapsto \xi_e$ une fonction de poids sur T et on dit que T est alors un arbre enraciné de poids F . On note $M(T)$ le poids maximal sur tout les appariements partiels et on définit $B(T)$ la quantité telle que $M(T) - B(T)$ soit le poids maximal d'un appariement tel que la racine de l'arbre ne fait pas partie d'une arête de l'appariement.

Remarque. 1. On notera T_n un arbre enraciné de poids F choisi uniformément parmi les arbres enracinés à n sommets.

2. $B(T)$ est vu comme le bénéfice que l'on obtient en s'autorisant à prendre la racine dans l'appariement partiel.
3. Pour s'assurer de l'existence d'une solution au problème d'appariement partiel de poids maximal, on fera l'hypothèse que la distribution F de poids est continue et que $\mathbb{P}(\xi_e \geq 0) = 1$. L'hypothèse de continuité n'est peut-être pas nécessaire mais rend la résolution du problème bien plus simple et donne une caractérisation concrète de la constante qui apparaît dans la conjecture que l'on énonce plus bas.

On s'intéresse alors à la variable $M_n = \mathbb{E}(T_n)$ et plus particulièrement à une estimation asymptotique de cette quantité. C'est ce problème que l'on va résoudre à l'aide de la méthode objective. A ce stade, on peut conjecturer le fait que : $\mathbb{E}(M_n) \sim \gamma n$ quand $n \rightarrow \infty$. En effet, $\mathbb{E}(M_n)$ doit croître intuitivement avec n et on intuite également qu'asymptotiquement cette croissante est proportionnelle à n . Pour fixer les idées, on peut étudier par exemple le cas où les arêtes sont valuées d'un poids constant égal à une valeur γ fixée. Dans ce cas, choisir un appariement de poids maximal consiste simplement à choisir un appariement de cardinal maximal. On a alors $\mathbb{E}[M_n] \sim c\gamma n$ où $c \leq 1/2$ est une constante. En effet on ne peut choisir plus de la moitié des arêtes et on ne pourra que rarement le faire exactement. On peut espérer que ce fait se généralise pour une valeur de γ ne dépendant que de la distribution F .

4.2 Méthode objective

On énonce ici le plan de la preuve pour montrer comment se déroule l'application de la méthode objective.

1. On lie $\mathbb{E}(M_n)$ aux $\mathbb{E}(M_i)$ pour $1 \leq i < n$. Pour se faire, on découpe l'arbre en deux parties T_n^{small} et T_n^{big} .
2. On montre que ces deux parties convergent localement faiblement toutes les deux vers des arbres limites.
3. On étudie les propriétés de ces arbres limites et on montre en particulier que la propriété qui nous intéresse passe à la limite locale faible.
4. On peut alors énoncer le théorème qui conclut.

Etape 1. On se donne T_n un arbre tiré uniformément parmi les arbres enracinés à n sommets et on note r sa racine. Afin de lier $\mathbb{E}(M_n)$ aux $\mathbb{E}(M_i)$ pour $1 \leq i < n$ on va découper l'arbre en deux parties T_n^{small} et T_n^{big} . Pour se faire on enlève une arête e de l'arbre puis on définit ce fils comme la racine de l'arbre fils de l'arête et l'arbre restant à toujours pour racine r . On appelle alors les deux parties $T_n^{small}(e)$ et $T_n^{big}(e)$ selon la cardinalité de chaque arbre et on règle le problème d'égalité en choisissant l'un des deux uniformément au hasard si le cas se présente.

On distingue alors les cas selon que l'arête choisie e est dans l'appariement partiel de poids maximal ou non pour obtenir les équations suivantes fondamentales pour la suite : L'appariement partiel de poids maximal qui est obligé d'utiliser l'arête e est de poids :

$$\xi_e + (M(T_n^{small}(e)) - B(T_n^{small}(e))) + (M(T_n^{big}(e)) + B(T_n^{big}(e))) \quad (4.14)$$

Si on interdit le fait d'utiliser e dans l'appariement partiel on obtient un poids simplement de :

$$M(T_n^{small}(e)) + M(T_n^{big}(e)) \quad (4.15)$$

Donc e est dans l'appariement partiel de poids maximal non contraint si, et seulement si

$$\xi_e > B(T_n^{small}(e)) + B(T_n^{big}(e)). \quad (4.16)$$

On en déduit alors clairement :

$$M_n = \sum_{e \in T_n} \xi_e \mathbf{1}(\xi_e > B(T_n^{small}(e)) + B(T_n^{big}(e))) \quad (4.17)$$

Et donc également :

$$\mathbb{E}[M_n] = (n-1)\mathbb{E}[\xi \cdot \mathbf{1}(\xi > B(T_n^{small}(e)) + B(T_n^{big}(e)))] \quad (4.18)$$

Remarque. Cette relation de récurrence est loin d'être facile à résoudre. C'est pourquoi la méthode objective que nous allons mettre en place va grandement simplifier le problème.

Etape 2. En étudiant les propriétés de l'arbre squelette $PGW_\infty(1)$, on déduit du lemme de Grimmet (théorème 2.1) les deux convergences :

$$T_n^{small} \xrightarrow{d} T \stackrel{d}{=} PGW(1) \quad (4.19)$$

$$T_n^{big} \xrightarrow{d} T_\infty^{big} \stackrel{d}{=} PGW^\infty(1) \quad (4.20)$$

Ce qui justifie que l'on puisse s'intéresser aux deux objets limites dans l'étape suivante.

Etape 3.

Cas T_n^{small} : On peut d'ores et déjà noter que $B(T_n^{small}) \xrightarrow{d} B(T)$ en utilisant simplement la définition de la convergence locale faible. On utilise la construction de T par récurrence pour obtenir une relation vérifiée par $B(T)$ de sorte qu'en formalisant cette idée, on peut exprimer $B(T)$ comme l'unique solution d'une équation :

Proposition 4.1. Si T est un arbre $PGW(1)$ enraciné de poids F alors la distribution

$$G(x) = \mathbb{P}(B(T) \leq x)$$

est l'unique solution de l'équation :

$$D_F(G) = G \tag{4.21}$$

où si G est une distribution on définit $D_F(G)$ comme étant la loi de la variable aléatoire

$$\max\{0, \xi_i - Y_i : 1 \leq i \leq N\}$$

où $\{N, \xi_i, Y_i, i = 1, 2, \dots\}$ est une famille indépendante de variables aléatoires telles que $N \sim \text{Poisson}(1)$, $\xi_i \sim F$ et $Y_i \sim G$.

Cas T_n^{big} : Ce cas est plus compliqué car il n'y a aucune raison a priori que $M(T_\infty)$ et $M(T_\infty) - B(T_\infty)$ soient finies puisque T_∞ lui-même est presque-sûrement infini. $B(T_\infty)$ étant définie comme la différence entre deux quantités infinies, elle n'est pas correctement définie. On ne peut donc pas écrire simplement $B(T_n^{big}) \xrightarrow{d} B(T_\infty)$. Mais on peut en fait montrer que :

Proposition 4.2. Soient F est une loi à support dans $[0, +\infty[$ et G la loi de $B(T)$. Soient maintenant H une loi quelconque et des variables aléatoires indépendantes $Z \sim H$, $Y \sim G$ et $\xi \sim F$ on note $\tilde{D}_F(H)$ la loi de $\max Y, \xi - Z$. Alors l'équation point fixe :

$$\tilde{D}_F(H) = H \tag{4.22}$$

admet une unique solution H . De plus cette solution vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B(T_n^{big}) \leq x) = H(x). \tag{4.23}$$

Etape 4. On peut alors énoncer le théorème final énonçant le résultat sur l'appariement de poids maximal sur les arbres aléatoires :

Théorème 4.1. Avec les notations précédentes et les hypothèses précédentes et si F est de plus d'espérance finie on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[\xi \mathbf{1}(\xi > Y + Z)] \tag{4.24}$$

où les variables aléatoires ξ , Y et Z sont indépendantes,

$$\xi \sim F, Y \sim G, Z \sim H,$$

et les lois G et H sont solutions des équations de point fixe :

$$D_F(G) = G \text{ et } \tilde{D}_F(H) = H.$$

Ce qu'il est important de comprendre sur ce théorème c'est que la façon d'exprimer les lois de probabilités comme solutions d'équations de point fixe apporte une méthode de détermination de ces lois et des approximations numériques sont possibles pour faire des calculs pratiques sous des hypothèses supplémentaires sur F .

Remerciements

Nous voulions remercier tout particulièrement M. MERLE qui nous a grandement aidés à produire ce travail.

Références

- [1] Goldschmidt C., Przykucki M., 2016. *Parking on a random tree*. arXiv :1610.08786v1 [math.PR]
- [2] Aldous D., Steele J., *The objective method : Probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence*. In Kesten H., editor, *Probability on Discret Structures*, volume 110 of *Encyclopaedia of Mathematical Science*, pages 1-72. Springer, 2004.
- [3] Foata D., Fuchs A., 2002. Processus de Poisson. Ch. 3. *Processus stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Paris, Dunod, pages 26-46.
- [4] Grimmett, G.R., 1980. *Random labelled trees and their branching networks*. J. Austral. Math. Soc. (Ser. A), 30, 229–237.
- [5] Dwass, M.,1969. *The Total Progeny in a Branching Process and a Related Random Walk*. Journal of Applied Probability, 6(3), 682-686.
- [6] Good, I.,1949. *The number of individuals in a cascade process*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 45(3), 360-363.
- [7] M. Luczak and P. Winkler, 2004. *Building uniformly random subtrees*. Random Structures Algorithms, 24(4) :420– 443.