Applications du calcul différentiel extérieur à l'économie

Cyril Letrouit et Arthur Blanc-Renaudie
sous la direction de Claude Viterbo.
Ecole Normale Supérieure

Juin 2016

Résumé

En microéconomie, l'étude de la forme des fonctions de demande est au fondement de la théorie de l'équilibre général. De façon surprenante, le calcul différentiel extérieur et la théorie de Cartan-Kähler permettent de déterminer localement la forme de ces fonctions sous hypothèse d'analyticité. Ce document a pour but de présenter ce lien entre géométrie différentielle et économie, en restant autant que possible "autosuffisant".

Table des matières

1 Introduction et motivations économiques

Dans cette introduction, nous donnons les définitions de microéconomie qui seront nécessaires pour les sections suivantes.

1.1 L'équilibre général

Une économie est formée d'une multitude d'agents (consommateurs, ménages, entreprises) qui échangent entre eux pour satisfaire leurs objectifs. Dans la théorie de l'équilibre général, on s'intéresse au cas où ces échanges sont marchands, c'est-à-dire qu'il existe un système de prix auquel s'échangent les marchandises.

Le mot "équilibre" signifie que l'on s'intéresse essentiellement au cas où les agents n'ont plus envie d'échanger, et se satisfont donc de la situation existante. Le terme "général", lui, s'oppose au "partiel" : dans un équilibre partiel, on ne traite le cas que d'un seul bien, en ne tenant pas compte de ses interactions avec les autres biens ; dans un équilibre général, c'est l'ensemble des échanges de l'économie qui importe, et tous les biens sont donc pris en compte simultanément.

La théorie de l'équilibre général dans sa forme la plus aboutie a été formulée par Arrow et Debreu : ils montrent que, sous des hypothèses très précises, il existe au moins un système (ou vecteur) de prix pour lequel l'offre globale et la demande globale sont égales.

1.2 Fonctions de demande et loi de Walras

Implicitement, au paragraphe précédent, nous avons fait appel à la notion d'utilité et à celle de fonction de demande, que nous allons définir précisément. Supposons donné un ensemble de n biens.

Définition 1. L'utilité U est une mesure de la satisfaction obtenue par la consommation. Plus précisément,

$$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

associe à un panier de biens un réel positif.

On aura $U(x) > U(y)$ si et seulement si le panier x est préféré au panier y. La plupart du temps, on se restreint à des fonctions U de classe $\mathcal{C}^\infty$, ce qui suppose que les biens sont indéfiniment divisibles. Chaque agent économique a sa propre fonction d'utilité. On peut alors définir la fonction de demande marshallienne (ou walrasienne) qui lui est associée :

Définition 2. La demande marshallienne $x(p, w)$ décrit ce que le consommateur désire acheter étant donnés les prix $p \in \mathbb{R}^n$ des biens sur le marché et son revenu w :

$$x(p, w) = \operatorname{argmax} \{U(x) \mid p \cdot x \leq w, \quad x_i \geq 0\}$$

Remarque. L'ensemble $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p \cdot x \leq w, \quad x_i \geq 0\}$ est compact donc l'argmax est bien défini en tant qu'ensemble. De plus, si la fonction U est strictement concave, comme nous le supposerons par la suite, cet argmax définit un unique élément $x(p,w)$. En effet, si $M = \max\{U(x) \mid p \cdot x \leq w, \quad x_i \geq 0\}$, et $x, y \in K$ vérifient $U(x) = U(y) = M$ et $x \neq y$ alors, par stricte concavité de U, on a

$$U\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{U(x)+U(y)}{2} = M$$

ce qui contredit la maximalité de M puisque $(x+y)/2 \in K$.

Remarque. L'hypothèse de (stricte) concavité de la fonction U est classique en économie : elle reflète la préférence des consommateurs pour les mélanges.

Exemple. Si l'on prend une fonction d'utilité de la forme $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$, et l'on note y la part du revenu consacrée à l'achat du premier bien (donc $w - y$ celle consacrée à l'achat du second), on voit que l'on cherche à maximiser

$$(\frac{y}{p_1})^a(\frac{w-y}{p_2})^b$$

Le maximum est atteint pour $y = \frac{a}{a+b}w$ et l'on a donc dans ce cas :

$$x(p_1, p_2, w) = (\frac{aw}{(a+b)p_1}, \frac{bw}{(a+b)p_2})$$

Loi de Walras. La loi de Walras est le point central de la théorie de l'équilibre général. Elle stipule que sur l'ensemble des marchés, la somme des demandes nettes pondérées par les prix est égale à zéro. Autrement dit,

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot D_j - \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot S_j = 0$$

où p_j est le prix du bien j et D_j et S_j sont la demande et l'offre respectives du bien j.

Exemple. Supposons que les seuls biens de l'économie considérée soient des pommes et des cerises, et qu'il n'existe pas d'autre marché. Il n'y a donc pas d'argent, et les cerises et les pommes sont troquées par les agents. Si la demande nette pour les cerises est nulle (c'est-à-dire que l'offre et la demande de cerises s'équilibrent exactement) alors, par la loi de Walras, c'est aussi le cas pour les pommes. S'il y a un excès de demande de cerises, il y aura automatiquement un excès d'offre de pommes égal en valeur absolue à l'excès de demande de cerises.

Homogénéité. Une hypothèse très souvent faite en théorie de l'équilibre général est celle de l'homogénéité de degré 0 des fonctions de demande. Cela revient à dire que si l'on multiplie les prix et les revenus par un même facteur, les choix des consommateurs ne s'en trouvent pas affectés.

1.3 Problèmes typiques

A partir de ces quelques hypothèses, on peut essayer de chercher la structure des fonctions de demande.

Typiquement, on pourra se demander quelles sont les fonctions $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont des fonctions de demande, c'est-à-dire telles que l'on peut trouver U une fonction d'utilité de fonction de demande associée x. C'est le problème du consommateur simple, que nous résoudrons à la section 3. Nous aurons pour cela besoin de quelques outils de base en calcul différentiel extérieur, comme le théorème de Frobenius, que nous démontrerons dans la section 2.

Si nous ne nous intéressons plus à un consommateur unique, mais à un couple de consommateurs, qui partagent une partie de leurs biens (les biens publics, par exemple la télévision) et disposent aussi de biens propres (les biens privés, par exemple les vêtements), on peut se demander quelle va être la forme de la somme de leurs fonctions de demande. C'est l'objet du problème du foyer, que nous traiterons dans la partie 5, après avoir montré dans la partie 4 un théorème de calcul différentiel extérieur nécessaire pour la résolution de ce problème.

Un problème nettement plus difficile est celui de déterminer de façon générale la structure de la fonction de demande agrégée (i.e. la somme des fonctions de demande de plusieurs consommateurs). C'est le problème de la demande de marché agrégée, que nous résolvons (presque entièrement) dans la section 8, après avoir démontré dans les sections 6 et 7 les théorèmes de Cauchy-Kowalevskaya et Cartan-Kähler, que l'on utilise dans la résolution de ce problème. Ces théorèmes ont, par ailleurs, des applications bien plus larges que le simple champ économique, par exemple, en physique ([11]).

1.4 Historique

La structure des fonctions de demande est étudiée depuis les années 1970. Le théorème le plus célèbre portant sur cette structure a été démontré par Sonnenschein, Mantel et Debreu dans ([6]) et ([13]). Il affirme que toute fonction continue, homogène de degré 0, satisfaisant la loi de Walras et une condition au bord (la demande est grande lorsque les prix tendent vers 0) est une fonction de demande agrégée. Dans les années 1990, Browning et Chiappori ([9]) ont proposé un modèle pour l'étude de la fonction de demande d'un couple dont les choix sont optimaux au sens de Pareto, et ont vérifié expérimentalement la pertinence de leur modèle. Dans ([12]), Ekeland et Chiappori ont ensuite été les premiers à appliquer le théorème de Cartan-Kähler pour étudier les fonctions de demande agrégée. Ce théorème est emblématique du calcul différentiel extérieur, branche de la géométrie différentielle développée par Elie Cartan ([4]) dans les années 1940. Les livres de Bryant, Chern, Griffiths, Gardner et Goldschmidt ([3]) et de Ivey et Landsberg ([1]) constituent des références dans ce domaine. Le livre de Ekeland ([5]) fait, quant à lui, le lien entre calcul différentiel extérieur et économie.

2 Calcul différentiel extérieur

2.1 Algèbre extérieure

Rappelons tout d'abord quelques définitions de base, en se plaçant dans $\mathbb{R}^n$:

Définition 3. Une k-forme extérieure $\omega : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ est une fonction de k vecteurs qui est k-linéaire et antisymétrique :

$$\omega(\lambda_1\xi_1' + \lambda_2\xi_1'', \xi_2, ..., \xi_k) = \lambda_1\omega(\xi_1', \xi_2, ...\xi_k) + \lambda_2\omega(\xi_1'', \xi_2, ..., \xi_k)$$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, ...\xi_{\sigma(k)}) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\omega(\xi_1, ..., \xi_k)$$

L'ensemble des k-formes de $\mathbb{R}^n$ forme un espace vectoriel si l'on introduit les opérations d'addition

$$(\omega_1 + \omega_2)(\xi) = \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi)$$

et de multiplicaiton par un scalaire

$$(\lambda\omega)(\xi) = \lambda\omega(\xi)$$

Cet espace vectoriel est de dimension $\binom{n}{k}$.

Exemple. Le volume orienté d'un parallélépipède d'arêtes $\xi_1, ..., \xi_n$ dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^n$ est une n-forme.

$$V(\xi_1, ..., \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

où $\xi_i = \xi_{i1}e_1 + ... + \xi_{in}e_n$ et $e_1, ..., e_n$ est une base de $\mathbb{R}^n$

Supposons maintenant données k 1-formes $\omega_1, ..., \omega_k$. On définit leur produit extérieur $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k$.

Définition 4. On pose

$$(\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k)(\xi_1, ..., \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \cdots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \cdots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix}$$

Autrement dit, la valeur du produit extérieur de ces 1-formes sur le parallélépipède $\xi_1, ..., \xi_k$ est égal au volume orienté de l'image de ce parallélépipède dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^k$ par l'application $\xi \to (\omega_1(\xi), ..., \omega_k(\xi))$. On vérifie immédiatement que $\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k$ est une k-forme.

Si l'on considère un système de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ donné par les 1-formes "élémentaires" $x_1, ..., x_n$, le produit extérieur de k de ces formes

$$x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_k}$$

est le volume orienté de l'image d'un k-parallélépipède sur le plan de dimension k $(x_{i_1}, ..., x_{i_k})$ sous la projection parallèle aux coordonnées restantes.

Chaque k-forme de $\mathbb{R}^n$ peut être représentée de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de k-formes élémentaires :

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \omega^k(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) \;\; x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_k}$$

Considérons maintenant le produit d'une k-forme ω^k et d'une l-forme ω^l. Tout d'abord, on suppose que ce sont deux monômes :

$$\omega^k = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k \quad \text{et} \quad \omega^l = \omega_{k+1} \wedge ... \wedge \omega_{k+l}$$

où $\omega_1, ...\omega_l$ sont des 1-formes. On définit leur produit $\omega^k \wedge \omega^l$ comme le monôme

$$\omega^k \wedge \omega^l = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k \wedge \omega_{k+1} \wedge ... \wedge \omega_{k+l}$$

On remarque que $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\omega^l \wedge \omega^k$.

On peut alors en déduire la définition du produit extérieur de formes :

Définition 5. Soient ω^k une k-forme et ω^l une l-forme, alors $\omega^k \wedge \omega^l$ est une $(k+l)$ -forme telle que

$$\omega^k \wedge \omega^l(\xi_1, ..., \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{k!l!}(-1)^{\epsilon(\sigma)}\omega^k(\xi_{\sigma(1)}, ..., \xi_{\sigma(k)})\omega^l(\xi_{\sigma(k+1)}, ..., \xi_{\sigma(k+l)})$$

Remarque. Si ω est de degré impair, alors $\omega \wedge \omega = 0$ car

$$\omega \wedge \omega = (-1)^{deg(\omega)^2}\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$$

En revanche, si ω est une forme de degré pair, a priori, $\omega \wedge \omega \neq 0$.

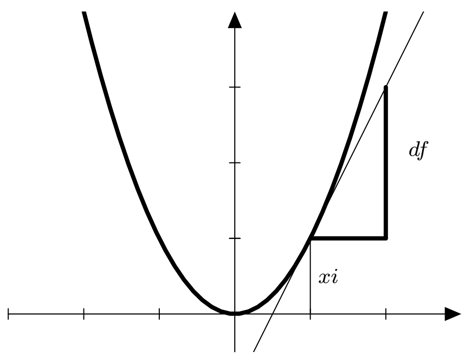
Exemple. Si $k = l = 1$, alors on obtient :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2)$$

Il est alors possible de passer à l'étude des formes différentielles, ce que l'on fait dans la section suivante.

2.2 Formes différentielles

L'exemple le plus simple de forme différentielle est la différentielle d'une fonction. Par exemple, pour la fonction $y = f(x) = x^2$, sa différenteille $df = 2xdx$ dépend du point x et de "l'incrémentation de l'argument". Ainsi, si $x = 1$ et la coordonnée du vecteur ξ est égale à 1, alors $df = 2$, et si la coordonnée de ξ vaut 10, alors $df = 20$. On dit que $df = 2xdx$ est une 1-forme différentielle.



De façon générale, on peut définir :

Définition 6. Une forme différentielle de degré 1 (ou 1-forme) sur une variété M est une application lisse (c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty$)

$$\omega : TM \to \mathbb{R}$$

du fibré tangent sur la droite, qui est linéaire sur chaque espace tangent T_xM.

On peut voir une 1-forme différentielle sur M comme une 1-forme extérieure sur T_xM qui est "différentiable par rapport à x".

Remarque. Toute 1-forme différentielle sur la droite est la différentielle d'une fonction. En revanche, il existe des 1-formes différentielles sur le cercle qui ne sont pas des différentielles, par exemple :

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

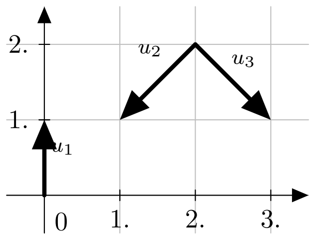
On a le théorème de décomposition suivant :

Théorème 1. Etant donné un système de coordonnées $x_1, ..., x_n$, toute 1-forme différentielle sur l'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose de façon unique sous la forme

$$\omega = a_1(x)dx_1 + ... + a_n(x)dx_n,$$

où les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions lisses (c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty$).

Exemple. On peut calculer la valeur des formes $\omega_1 = dx_1$, $\omega_2 = x_1dx_2$ et $\omega_3 = dr^2(r^2 = x_1^2 + x_2^2)$ sur les vecteurs u_1, u_2 et u_3 de la figure ci-dessous :



On trouve

	u_1	u_2	u_3
ω_1	0	-1	1
ω_2	0	-2	-2
ω_3	0	-8	0

On peut maintenant définir de la même manière les k-formes différentielles. On les définit d'abord point par point :

Définition 7. Une k-forme différentielle $\omega^k|_x$ évaluée en x sur une variété M est une k-forme extérieure sur l'espace tangent T_xM à M en x, c'est-à-dire une fonction k-linéaire antisymétrique de k vecteurs $\xi_1, ..., \xi_k$ tangents à M en x. Si une telle forme $\omega^k|_x$ est donnée en chaque point x de la variété M et si cette donnée est différentiable, on dit que w^k est une k-forme sur la variété M.

L'espace des formes différentielles de degré k sur U sera noté $\Omega^k(U)$. On pose

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(U) = \sum_{k=0}^{dim(U)} \Omega^k(U)$$

Remarque. Les formes différentielles peuvent être multipliées par des fonctions aussi bien que par des nombres. Par conséquent, l'ensemble des k-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ a une structure naturelle de module sur l'anneau des fonctions réelles $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

De même que pour les k-formes extérieures, étant donné un système de coordonnées $x_1, ..., x_n$, toute k-forme différentielle sur l'espace $\mathbb{R}^n$ peut être écrite de façon unique sous la forme

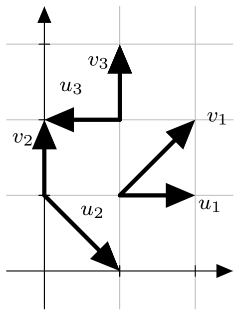
$$\omega^k = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} a_{i_1,...i_k}(x) \quad dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

où les $a_{i_1,...i_k}(x)$ sont des fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Les k-formes différentielles sur une variété de dimension n forment donc un espace vectoriel réel de dimension $\binom{n}{k}$. On peut ainsi définir la notion de base des formes différentielles de degré k de la même façon que pour tout espace vectoriel.

Définition 8. Des k-formes différentielles sur une variété seront dites linéairement indépendantes si elles forment une base de l'espace vectoriel qu'elles engendrent.

Exemple. On peut calculer la valeur des formes $\omega_1 = dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 = x_1 dx_1 \wedge dx_2 - x_2 dx_2 \wedge dx_1$ et $\omega_3 = r dr \wedge d\phi$ (où $x_1 = r\cos(\phi)$ et $x_2 = r\sin(\phi)$) sur les paires de vecteurs (u_1, v_1),(u_2, v_2) et (u_3, v_3) de la figure ci-dessous :



On trouve

	(u_1, v_1)	(u_2, v_2)	(u_3, v_3)
ω_1	1	1	-1
ω_2	2	1	-3
ω_3	1	1	-1

Nous allons maintenant définir l'image réciproque d'une forme différentielle par une application.

Définition 9. Soient M et N des variétés lisses, $f : M \to N$ une application lisse, et p un entier. L'image réciproque par f de $\alpha \in \Omega^p(N)$, notée $f^*\alpha$, est la forme différentielle sur M définie par

$$(f^*\alpha)_x(v_1, ..., v_p) = \alpha_{f(x)}(df(x) \cdot v_1, ..., df(x) \cdot v_p),$$

où df_x est la différentielle de f en x.

Remarque. On étend immédiatement par linéarité cette définition au cas d'une forme $\alpha \in \Omega(N)$ non homogène.

Exemple. Si M est une sous-variété d'une variété N, et si $i : M \to N$ est l'injection canonique, pour $\alpha \in \Omega(N)$ la forme $i^*\alpha$ s'appelle la restriction de α à M.

Exemple. Donnons un autre exemple : si $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}_+^*$ et $f(t) = \exp(t)$, alors $f^*(dx/x) = dt$.

2.3 Dérivée extérieure et idéaux différentiels

Nous pouvons maintenant passer à la définition de la dérivée extérieure d'une forme différentielle. Elle est d'abord définie sur les 0-formes (c'est-à-dire les fonctions lisses) et la définition s'étend après aux k-formes.

Définition 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors df est la 1-forme définie par

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Plus généralement, si

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \omega_{i_1,...,i_k}\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

est une k-forme, alors $d\omega$ est une $(k+1)$-forme définie par

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} d\omega_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Exemple. Considérons la 1-forme $\omega = p_1 dq_1 + ... + p_n dq_n = pdq$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec les coordonnées $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$. Alors $d\omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n$.

Proposition 1. La dérivée extérieure satisfait les propriétés suivantes :

1. $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ est linéaire.
2. $\deg(d\omega) = p + 1$ si $\deg(\omega) = p$.
3. Sur $\Omega^0(U)$, d est la différentielle des fonctions.
4. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ pour un certain k (α est homogène), $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$
5. $d \circ d = 0$

La dérivée extérieure est d'ailleurs le seul opérateur à satisfaire ces cinq propriétés.

Remarque. La cinquième proposition découle des quatre autres, en remarquant que pour $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, on a

$$d(d(f)) = d(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0$$

puisque pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Remarque. Il existe une façon équivalente de définir la dérivée extérieure, purement géométrique. C'est celle adoptée par Arnold dans ([14]). De ce point de vue, passer d'une forme à sa dérivée extérieure est analogue à passer d'une fonction à sa différentielle ou d'un champ de vecteurs à sa divergence : la dérivée extérieure $d\omega^k$ d'une k-forme sur une variété n-dimensionnelle M est définie comme la partie multilinéaire principale de l'intégrale de ω^k sur le bord de parallélépipèdes $(k+1)$-dimensionnels. Cette formulation a pour avantage d'avoir pour corollaire direct la formuler de Stokes. Pour plus de détails, on se réfèrera au livre de Arnold ([14]).

Une propriété remarquable de la dérivée extérieure est qu'elle commute avec l'image réciproque :

Proposition 2. La différentielle et l'image réciproque commutent. Autrement dit, si M et N sont deux sous-variétés lisses et si $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M,N)$, on a

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha) \quad \forall \alpha \in \Omega(V)$$

On est alors conduit à introduire la notion d'idéal, puis celle d'idéal différentiel grâce à la dérivée extérieure.

Définition 11. Un ensemble $\mathcal{I}$ de formes différentielles est appelé idéal si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Si $\alpha \in \mathcal{I}$ et f une fonction lisse, alors $f\alpha \in \mathcal{I}$.
2. Si $\alpha \in \mathcal{I}$ et β est une autre forme différentielle, alors $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{I}$.

Définition 12. Soit $\mathcal{I}$ un idéal. On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal différentiel si $\omega \in \mathcal{I} \Rightarrow d\omega \in \mathcal{I}$.

Notation. Si $\mathcal{I}$ est un idéal, on note $\mathcal{I}^n$ l'ensemble des $\phi \in \mathcal{I}$ de degré n.

Remarque. Si $\mathcal{J}$ est un ensemble de formes différentielles, il existe deux idéaux "naturels" que l'on peut considérer comme engendrés par $\mathcal{J}$:

1. l'idéal engendré algébriquement par $\mathcal{J}$ est le plus petit idéal contenant $\mathcal{J}$ (qui est aussi l'intersection de tous les idéaux contenant $\mathcal{J}$).
2. l'idéal engendré différentiellement par $\mathcal{J}$ est le plus petit idéal différentiel contenant $\mathcal{J}$ (qui est aussi l'intersection de tous les idéaux différentiels contenant $\mathcal{J}$).

Clairement, l'idéal engendré différentiellement par $\mathcal{J}$ contient l'idéal engendré algébriquement par $\mathcal{J}$.

Notation. On notera par la suite $\{\omega_1, ..., \omega_k\}_{alg}$ l'idéal engendré algébriquement par $\omega_1, ..., \omega_k$ et $\{\omega_1, ..., \omega_k\}_{diff}$ l'idéal engendré différentiellement par $\omega_1, ..., \omega_k$.

Exemple. Souvent, nous considérerons l'idéal différentiel engendré par des formes différentielles données. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si $\omega = xdy$, on a $\mathcal{I} = \{xdy\}_{alg} \subset \{xdy\}_{diff} = \{xdy, dx \wedge dy\}_{alg}$.

Munis des notions que nous venons de définir, nous allons maintenant expliquer comment prouver l'existence de solutions à des équations aux dérivées partielles grâce au calcul différentiel extérieur.

2.4 Champ d'espaces vectoriels

Les premières questions que l'on se pose lorsque l'on est confronté à un système d'équations différentielles est de savoir s'il existe des solutions, et éventuellement de prouver l'unicité de la solution s'il en existe.

Le théorème que l'on utilise pour les cas des équations différentielles ordinaires est bien connu : il s'agit du théorème de Picard (ou de Cauchy-Lipschitz).

Théorème 2. Soit $f(x,u) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction avec f continue et continument dérivable en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction $u(x)$ définie sur I, vérifiant $u(x_0) = u_0$ et l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = f(x,u). \tag{1}$$

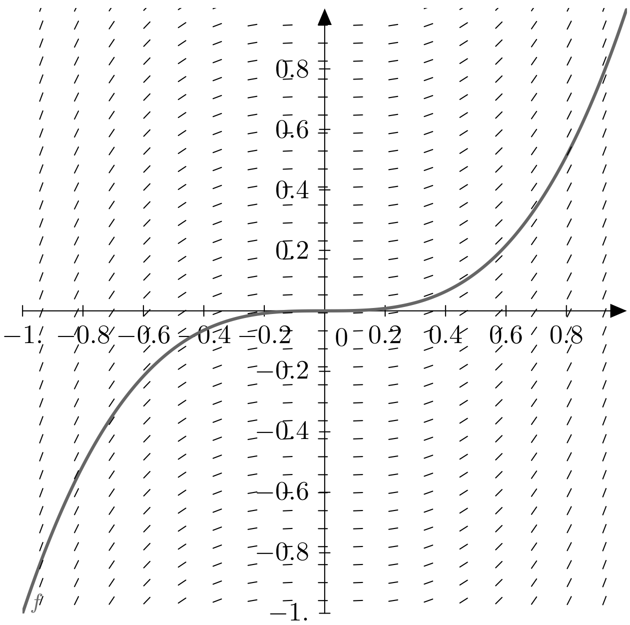
De plus, toute autre solution de ce problème avec condition initiale doit coïncider avec u sur I.

Le graphe dans $\mathbb{R}^2$ de toute solution de (1) est tangent en tout point au champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + f(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$.

Exemple. Considérons l'équation

$$\frac{du}{dx} = 3x^2, \tag{2}$$

avec condition $u(0) = 0$. Elle admet $u(x) = x^3$ pour solution, qui est tangente en tout point au champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial u}$, ce que l'on voit sur la figure suivante :



Cela indique comment nous allons passer du langage des équations aux dérivées partielles à celui des variétés différentiables. Si M est une variété et X un champ de vecteurs sur M, on peut résoudre le système défini par X : ce sera une courbe $c : I \to M$, dite courbe intégrale de X, telle que $c'(t) = X_{c(t)}$ pour tout $t \in I$. En dehors des points singuliers, on est assuré de l'existence de solutions locales à de tels systèmes. On peut même faire mieux, en demandant que les courbes solutions définissent en fait des coordonnées : il s'agit du théorème de "redressement des champs de vecteurs", que nous énonçons maintenant, après une définition.

Définition 13. Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m et $p \in M$. On dit que les fonctions lisses à valeurs réelles $x^1, ..., x^m$ forment un système de coordonnées locales au voisinage de p si l'application $x : p \mapsto (x^1(p), ..., x^m(p))$ est un difféomorphisme local, c'est-à-dire qu'elle est continue bijective vers un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et de réciproque continue.

Remarque. Par le théorème des fonctions implicites, si $x^1, ..., x^m$ sont des fonctions lisses définies au voisinage de p et ayant des différentielles indépendantes en p, elles forment un système de coordonnées locales dans un voisinage de p.

Théorème 3. Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m et $p \in M$. Soit X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ non nul en p. Alors il existe un système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^m)$ défini dans un voisinage U de p et tel que $\frac{\partial}{\partial x^1} = X$.

Preuve. On peut, sans perte de généralité, se restreindre au cas où $M = \mathbb{R}^m$ et $p = 0$. On écrit dans un premier temps

$$X = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

où $(x^1, ..., x^m)$ est un système de coordonnées locales en 0. Posons $f = (f_1, ..., f_m)$. A nouveau, sans perte de généralité, nous pouvons supposer $f(0) = (1, 0, ..., 0)$. Soit $\Phi(t, z)$ le flot de X, c'est-à-dire la solution du problème $\dot{x} = f(x), x(0) = z$ et soit $\psi(x^1, ..., x^n) = \Phi(x^1, (0, x^2, ..., x^m))$. Comme les solutions des équations différentielles ordinaires dépendent de façon lisse des conditions initiales, Φ, et donc ψ, sont lisses. On a ainsi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x) = f(\psi(x))$$

et, comme $\psi(0, x^2, ..., x^m) = \Phi(0, (0, x^2, ..., x^m)) = (0, x^2, ..., x^m)$, la différentielle $d\psi$ en 0 est l'identité. Donc $y = \psi^{-1}(x)$ est un système de coordonnées en 0. Comme $x = \psi(y)$, on a

$$\frac{\partial x^j}{\partial y_1} = \frac{\partial \left(\Phi(y_1, (0, y_2, ..., y_m))\right)_j}{\partial y_1} = f_j(\psi(y)) = f_j(x)$$

et donc $\frac{\partial}{\partial y_1} = X$ comme demandé.

Essayons maintenant de transposer cette étude du cas des équations différentielles ordinaires au cas des équations aux dérivées partielles. Nous commençons par un exemple.

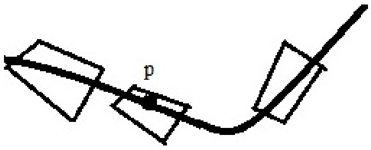
Exemple. Considérons le système pour $u(x, y)$ donné par

$$u_x = A(x, y, u) \quad (3)$$

$$u_y = B(x, y, u) \quad (4)$$

où A et B sont deux fonctions lisses données. Le système (3), (4) impose les dérivées partielles de u, et donc, en tout point $p = (x, y, u) \in \mathbb{R}^3$, le plan tangent en p au graphe de la solution est déterminé de façon unique.

Ainsi, le système (3), (4) définit un champ lisse de plans de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, exactement de la même façon qu'une équation différentielle ordinaire définit un champ de vecteurs lisse (qui n'est autre qu'un champ de droites) sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Picard (1) énonce que ces champs peuvent se "raccorder" pour former une courbe solution de l'équation en tout point. Pour le système (3), (4), de façon analogue, il n'existe des solutions que si le champ de plans de dimension 2 se raccorde bien pour former une variété lisse de dimension 2. Dans la figure ci-dessous, on a tracé un champ de plans et une courbe tangente à ce champ. Ce que nous cherchons n'est pas seulement une courbe, mais une surface tout entière qui soit tangente à tous ces plans.



En fait, la question de savoir si une telle surface existe revient à celle de savoir si les équations (3) et (4) sont compatibles. Par exemple, les dérivées partielles doivent commuter : $(u_x)_y = (u_y)_x$. Dans notre cas, cela donne

$$(u_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} A(x,y,u) = A_y(x,y,u) + A_u(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = A_y + BA_u,$$
$$(u_y)_x = B_x + AB_u,$$

donc il y avait une équation cachée dans ce système, à savoir

$$A_y + BA_u = B_x + AB_u$$

Remarque. Pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles plus compliqués, il n'est pas toujours simple de déterminer si toutes les dérivées partielles commutent. Dans le théorème de Cartan-Kähler, nous donnerons un algorithme pour vérifier justement les conditions de compatibilité.

Nous allons dans la section qui suit montrer le théorème de Frobenius, qui sera le théorème utilisé pour résoudre le problème du consommateur simple.

2.5 Le théorème de Frobenius

On se place dans une variété Σ de dimension n (le plus souvent, $\Sigma = \mathbb{R}^n$) telle qu'à chaque point $x \in \Sigma$ est attaché un espace vectoriel $E_x \subset T_x\Sigma$ de dimension r variant de façon lisse avec x. Nous cherchons donc à trouver une sous-variété $X \subset \Sigma$ telle que $T_xX = E_x$ pour tout $x \in X$.

Soit ω_x^a une base de l'ensemble $E_x^\perp$ des formes linéaires s'annulant sur E_x (on a bien sûr $1 \leq a \leq n-r$). On peut s'arranger pour que les formes ω_x^a varient de façon lisse avec x de telle sorte que l'on obtient des 1-formes différentielles ω_x^a. Notons $\mathcal{I} = \{\omega^1, \ldots, \omega^{n-r}\}_{diff}$ l'idéal différentiel qu'elles engendrent. On peut alors définir les variétés intégrales de $\mathcal{I}$:

Définition 14. Une variété intégrale de $\mathcal{I}$ est une sous-variété $\iota : N \hookrightarrow \Sigma$ telle que $\iota^*(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{I}$, où ι est l'inclusion de N dans Σ.

Pour trouver des variétés intégrales, on sait déjà que s'il y en a une, son espace tangent en tout point $x \in \Sigma$ doit être E_x. La question est alors de savoir, comme dans le cas des petites dimensions déjà traité, si ces espaces peuvent se raccorder pour obtenir une sous-variété de dimension r. Cette information est naturellement contenue dans les dérivées extérieures des ω^a, qui indiquent comment les espaces vectoriels bougent infinitésimalement.

Si l'on a $i^*(\omega^a) = 0$, on doit aussi avoir $d(i^*\omega^a) = i^*(d\omega^a) = 0$. S'il existe un plan $E_x \subset T_x\Sigma$ de dimension r sur lequel $\forall \alpha \in \mathcal{I},\ \alpha\big|_{E_x} = 0$, alors les équations $i^*(d\theta^a)$ ne doivent pas imposer de condition supplémentaire puisque l'on a déjà au plus un unique espace de dimension r en chaque $x \in \Sigma$: c'est donc que $d\omega^a\big|_{E_x} = 0$. Autrement dit, pour chaque a, on doit avoir $d\omega^a \in \mathcal{I}$ puisque les ω_x^a engendrent $E^\perp$.

Le théorème de Frobenius dit précisément que cette condition nécessaire est aussi suffisante :

Théorème 4 (Frobenius)**.** Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel généré algébriquement par les 1-formes lisses $\omega_{r+1}, ..., \omega_n$ linéairement indépendantes sur une certaine variété n-dimensionnelle Σ. Alors pour tout $p \in \Sigma$, il existe une variété intégrale de dimension $n-r$ de $\mathcal{I}$ passant par p. En fait dans un voisinage suffisamment petit de p, il existe un système de coordonnées $(y_1, ..., y_n)$ tel que $\mathcal{I}$ est engendré par $dy_{r+1}, ..., dy_n$.

Preuve. On procède par récurrence sur r.

Dans le cas $r = 1$, pour $x \in \Sigma$ fixé, l'intersection des $(\omega_i)_x$ est réduite à une droite. Il existe donc un champ de vecteurs X annulant toutes les ω_i. Par le théorème de redressement (théorème 3), il existe un système de coordonnées locales $y_1, ..., y_n$ tel que $X = \frac{\partial}{\partial y_1}$. Alors $dy_2, ..., dy_n$ engendrent le même espace que $\omega_2, ..., \omega_n$, ce qui permet de conclure dans ce cas. Remarquons que nous n'avons pas utilisé que $\mathcal{I}$ est un idéal différentiel. C'est en fait automatiquement vérifié dans le cas $r = 1$ d'après ce que nous venons de prouver.

Supposons maintenant $r > 1$ et que le théorème soit vrai au rang $r-1$, c'est-à-dire pour $(n-r+1)$ un-formes. On fixe un système de coordonnées locales $x_1, ..., x_n$ tel que $dx_1, ..., dx_r$ sont indépendantes de $\omega_{r+1}, ..., \omega_n$ et $J = \{dx_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n\}_{alg}$. Par hypothèse de récurrence, il existe un système de coordonnées $(y_1, ..., y_n)$ tel que $J = \{dy_r, ..., dy_n\}_{alg}$. Puisque $dx_r \in J$, on a $dx_r = \sum_{k=r}^{n} \beta_k dy_k$. Au moins l'un des β_i est $\neq 0$. On suppose que c'est β_r. Il s'ensuit que $dx_r, dy_{r+1}, ..., dy_n$ sont linéairement indépendantes et donc

$$\{dx_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n\}_{alg} = J = \{dy_r, ..., dy_n\}_{alg} = \{dx_r, dy_{r+1}, ..., dy_n\}_{alg}$$

donc pour $k \geq r+1$, il existe $p_k(y_1, ..., y_n)$ et $v_k \in \mathcal{I}$ tels que

$$dy_k = p_k dx_r + v_k$$

Montrons que $\{v_{r+1}, ..., v_n\}_{alg} = \mathcal{I}$. Comme, pour $k \geq r+1$, on a $v_k \in \mathcal{I}$, par définition, on a l'inclusion $\subset$. Pour l'autre sens, il suffit de montrer que $v_{r+1}, ..., v_n$ sont indépendantes. Par l'absurde, si $\sum_{k \geq r+1} q_k v_k = 0$, alors $\sum_{k \geq r+1} q_k dy_k - (\sum_{k \geq r+1} q_k p_k) dx_r = 0$. Mais $dx_r, dy_{r+1}, ..., dy_n$ sont indépendantes donc $q_k = 0$ pour tout $k \geq r+1$. Donc $\{v_{r+1}, ..., v_n\}_{alg} = \mathcal{I}$.

On a toujours $dy_k = p_k dx_r + v_k$ donc $dp_k \wedge dx_r = -dv_k \in \mathcal{I}$ puisque $v_k \in \mathcal{I}$ qui est différentiel. Cela se réécrit

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial y_i} dy_i \wedge dx_r \in \mathcal{I}$$

Montrons maintenant que certains des termes de cette somme sont aussi dans $\mathcal{I}$: pour $i \geq r+1$, on a $dy_i \wedge dx_r = v_i \wedge dx_r + p_i dx_r \wedge dx_r = v_i \wedge dx_r \in \mathcal{I}$ car $v_i \in \mathcal{I}$. Pour $i = r$, on a aussi $dy_r \in \{dx_r, dy_{r+1}, ..., dy_n\}_{alg} = \{dx_r, \omega_{r+1}, ..., \omega_n\}_{alg}$ donc à nouveau, $dy_r \wedge dx_r \in \mathcal{I}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial p_k}{\partial y_i} dy_i \wedge dx_r \in \mathcal{I} \tag{5}$$

Prouvons maintenant grâce à (5) que $\frac{\partial p_k}{\partial y_i} = 0$ pour $i \leq r-1$. D'après (5), on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\partial p_k}{\partial y_i} dy_i \wedge dx_r = \sum_{s=r+1}^{n} f_s \omega_s \wedge \alpha_s$$

pour certains f_s et α_s. Prenons le produit extérieur avec $\omega_{r+1} \wedge ... \wedge \omega_n$ dans cette dernière égalité. Le membre de droite s'annule alors et, à gauche, grâce à notre choix de dx_r et des dy_i pour $i \leq (r-1)$, nous avons une somme de formes indépendantes du type $dy_i \wedge dx_r \wedge \omega_{r+1} \wedge ... \wedge \omega_n$. On en conclut que $\frac{\partial p_k}{\partial y_i} = 0$ pour $i \leq r-1$.

Donc $p_k = p_k(y_r, ..., y_n)$. En revenant à l'équation $dy_k = p_k dx_r + v_k$, on voit que v_k ne dépend finalement que de $y_r, ..., y_n$ donc on a $(n-r)$ formes (v_k) linéairement indépendantes qui engendrent $\mathcal{I}$ et ne dépendent que de $n-r+1$ coordonnées locales $y_r, ..., y_n$. On est donc ramené au cas traité au début (initialisation) où l'on a une dimension de plus que le nombre de formes différentielles (en se plaçant non sur Σ mais sur la variété $y_1 =$ constante$, ..., y_{r-1} =$ constante). Ainsi, on peut écrire $\{v_{r+1}, ..., v_n\}_{alg} = \{dz_{r+1}, ..., dz_n\}_{alg}$, c'est-à-dire $\mathcal{I} = \{dz_{r+1}, ..., dz_n\}_{alg}$ Cela termine la preuve.

Corollaire. Soit ω une 1-forme différentielle satisfaisant $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge d\omega = 0$ au voisinage de p. Alors il existe deux fonctions λ et V telles que $\omega = \lambda dV$ dans un voisinage de p.

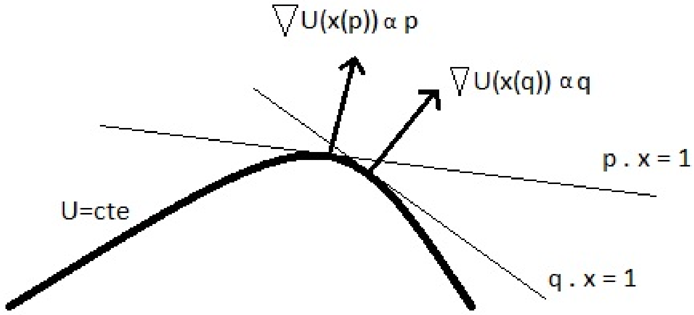
Preuve. Il suffit de prendre $r = n-1$ dans le théorème de Frobenius.

C'est ce corollaire du théorème de Frobenius que nous allons utiliser pour résoudre le problème du consommateur simple, que nous présentons dans la section suivante.

3 Le problème du consommateur simple

Dans ce qui suit, on s'intéresse au problème du consommateur simple : il s'agit de caractériser les fonctions de demande, c'est-à-dire trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée s'exprime comme fonction de demande associée à une fonction d'utilité (à déterminer).

Plus précisément, donnons-nous un consommateur dont la richesse est normalisée à 1. Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa fonction d'utilité (qui à un ensemble de quantité de n biens associe une utilité). On suppose $U \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et U strictement concave : cela correspond à une hypothèse classique en économie, selon laquelle par exemple on a moins de plaisir à manger du caviar lorsque l'on en mange tous les jours que si l'on en mange pour la première fois. Les prix des n biens sont représentés par $p \in \mathbb{R}^n$. Comme dans la première section, on note $x(p) \in \mathbb{R}^n$ le point de $\mathbb{R}^n$ maximisant $U(x)$ sous contrainte $p \cdot x = 1$ et $x_i \geq 0$. D'après le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange (se reporter à l'annexe A), ce $x(p)$ est unique (par stricte concavité de U) et vérifie $\nabla U(x(p)) = \lambda(p)p$ pour un certain $\lambda(p) \in \mathbb{R}^{+*}$, et $p \cdot x = 1$. La fonction $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie est la fonction de demande.



Le théorème suivant montre que la fonction de demande hérite de la régularité de U.

Théorème 5. Soit $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction d'utilité et $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la fonction de demande associée. Alors $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Preuve. Par stricte concavité de U, la condition de colinéarité de $\nabla U(x(p))$ et p entraîne, par le théorème des fonctions implicites, que $x(p)$ est $\mathcal{C}^\infty$ puisque U l'est.

Remarque. Au passage, nous obtenons que $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. En effet, les prix étant non nuls, on a

$$\lambda(p) = \frac{||\nabla U(x(p))||}{||p||}$$

qui est lisse puisque le numérateur et le dénominateur le sont.

Il s'agit alors de caractériser les $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ qui sont des fonctions de demande (i.e. on peut trouver un U dont la fonction de demande associée soit x).

Notation. Dans la suite, si $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on note $x'(p)$ la matrice $n \times n$ définie par

$$(x'(p))_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial p_i}\right)_j$$

Lemme 1. Soit $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors x est une fonction de demande si et seulement s'il existe $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R})$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que

$$x(p) = -\frac{1}{\lambda(p)} \nabla V(p)$$

Preuve. Si x est une fonction de demande, soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sa fonction d'utilité associée. Définissons la fonction de valeur associée $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$V(p) = \max \{U(x) \mid x \geq 0 \; ; \; p \cdot x \leq 1\}.$$

Alors $V(p) = U(x(p)) = U(x(p)) + \lambda(p)(1 - p \cdot x(p))$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ en tant que composée de fonctions lisses, et de plus

$$\nabla V(p) = x'(p) \cdot \nabla(x(p)) - \lambda(p) x'(p) \cdot p + \nabla \lambda(p)(1 - p \cdot x(p)) - \lambda(p) x(p) = -\lambda(p) x(p)$$

car $\nabla U(x(p)) = \lambda(p) p$, d'où finalement :

$$x(p) = -\frac{1}{\lambda(p)} \nabla V(p)$$

Réciproquement, si l'on a $x(p) = -\frac{1}{\lambda(p)}\nabla V(p)$, alors posons

$$U(x) = \min\{V(p) \mid p \cdot x \leq 1\}$$

et montrons que $x(p)$ est la fonction de demande associée à U. Ecrivons $U(x) = V(p(x))$ avec, par le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange $\nabla V(p(x))$ proportionnel à x. Or, $x(p(x)) = -\nabla V(p(x))\ /\lambda(p(x))$. Donc $x(p(x))$ est proportionnel à x, et comme $x(p(x)) \cdot p(x) = 1 = x \cdot p(x)$, on a finalement $x(p(x)) = x$. De la même façon, on prouve que $p(x(p)) = p$.

Par ailleurs, de $U(x) = V(p(x))$, on tire

$$\nabla U(x) = \nabla p(x)\nabla V(p(x)) = -\lambda(p(x))\nabla p(x)x(p(x)) = -\lambda(p(x))\nabla p(x)x,$$

et donc $\nabla U(x(p)) = -\lambda(p(x(p)))\nabla p(x(p))x(p) = -\lambda(p)\nabla p(x(p))x(p)$. Par le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange, il nous reste à montrer que cette dernière expression est proportionnelle à p. Or, puisque $p(x) \cdot x = 1$, on a $\nabla p(x)x + p(x) = 0$ donc, en évaluant cela en $x(p)$ et en utilisant que $p(x(p)) = p$, on obtient l'égalité $\nabla p(x(p))x(p) = -p$. Donc finalement $\nabla U(x(p))$ est bien proportionnel à p et U atteint bien en $x(p)$, par stricte concavité, un maximum local sur l'ensemble des x vérifiant $p \cdot x \leq 1$, ce qui achève la preuve du lemme.

La condition que nous avons trouvée sur x par ce lemme n'est pas très explicite : on ne sait pas, à vue d'oeil, déterminer si x va admettre une décomposition sous la forme demandée. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante beaucoup plus facile à tester pour que x soit une fonction de demande.

Théorème 6. Soit $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall p, \quad p \cdot x(p) = 1$. Alors $x(p)$ est localement une fonction de demande autour de p si et seulement si $\Sigma = (\sigma_{ij})$ définie par

$$\sigma_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \sum p_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} x_j$$

est symétrique dans un voisinage de p.

Preuve. Soit ω la 1-forme différentielle $\omega(p) = \sum x_i(p)dp_i$ et P le champ de vecteurs radial $P = \sum p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$. Alors $p \cdot x(p) = 1 \Leftrightarrow \omega(P) = 1$. D'après le lemme que nous venons de prouver, $x(p)$ est une fonction de demande si et seulement si ω s'écrit $f\mathrm{d}g$, c'est-à-dire si et seulement si $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$ d'après le corollaire du théorème de Frobenius (théorème 4).

Cette dernière condition est équivalente à l'existence d'une 1-forme différentielle α telle que $d\omega = \alpha \wedge \omega$. En effet, si une telle 1-forme α existe, alors $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = \omega \wedge \alpha \wedge \omega = 0$. Réciproquement, si $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$ alors on peut compléter ω en une base de 1-formes différentielles $\omega_1 = \omega, \omega_2, ..., \omega_n$. On peut écrire

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i>j\geq 1} a_{ij}\ \omega_i \wedge \omega_j = \omega \wedge \beta + \sum_{i>j\geq 2} a_{ij}\ \omega_i \wedge \omega_j$$

en regroupant les termes de la forme $\omega \wedge \omega_j$ dans β. Alors

$$0 = \omega \wedge \mathrm{d}\omega = \sum_{i>j\geq 2} a_{ij}\ \omega \wedge \omega_i \wedge \omega_j$$

donc pour $i > j \geq 2$, on obtient $a_{ij} = 0$, d'où $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \beta$, ce qui est la décomposition recherchée.

Au vu de l'expression $\omega(p) = \sum x_i(p)dp_i$, nous allons pouvoir tirer de la condition $d\omega = \alpha \wedge \omega$ une condition sur la fonction de demande x : ce sera précisément la symétrie de la matrice dont l'expression est donnée dans l'énoncé du théorème.

Supposons dans un premier temps $d\omega = \alpha \wedge \omega$ et déduisons-en une condition sur x. Pour tout champ de vecteurs ξ, on a :

$$d\omega(P,\xi) = \alpha(P)\omega(\xi) - \alpha(\xi)\omega(P) = \alpha(P)\omega(\xi) - \alpha(\xi)$$

d'où

$$\alpha(\xi) = \alpha(P)\omega(\xi) - d\omega(P,\xi)$$

Cette expression explicite de α en fonction de ω et dω peut être réinjectée dans $d\omega = \alpha \wedge \omega$: pour tous champs de vecteurs ξ, η, on a

$$\begin{aligned} d\omega(\xi,\eta) = (\alpha \wedge \omega)(\xi,\eta) &= \alpha(\xi)\omega(\eta) - \alpha(\eta)\omega(\xi) \\ &= (-d\omega(P,\xi) + \alpha(P)\omega(\xi))\omega(\eta) + (d\omega(P,\eta) - \alpha(P)\omega(\eta))\omega(\xi) \end{aligned}$$

donc, en simplifiant :

$$d\omega(\xi,\eta) = -d\omega(P,\xi)\omega(\eta) + d\omega(P,\eta)\omega(\xi) \tag{6}$$

Or, $d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i$ donc

$$d\omega(P,\xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i(P,\xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p_j\xi_i - \xi_j p_i)$$

On peut alors donner une autre expression pour le membre de droite de l'équation (6) :

$$\begin{aligned} &-d\omega(P,\xi)\omega(\eta) + d\omega(P,\eta)\omega(\xi) \\ &\qquad = (\sum_j x_j\eta_j)(\sum_{i,k} \frac{\partial x_i}{\partial p_k}(\xi_k p_i - \xi_i p_k)) + (\sum_j x_j\xi_j)(\sum_{i,k} \frac{\partial x_i}{\partial p_k}(\eta_i p_k - \eta_k p_i)) \\ &\qquad = \sum_{i,j,k} x_j\eta_j\xi_k p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} - x_j\xi_i p_k\eta_j \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + x_j\xi_j\eta_i p_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} - x_j\xi_j\eta_k p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \\ &\qquad = \sum_{i,j,k} (\frac{\partial x_k}{\partial p_j} p_k x_i - \frac{\partial x_j}{\partial p_k} p_k x_i + \frac{\partial x_i}{\partial p_k} p_k x_j - \frac{\partial x_k}{\partial p_i} p_k x_j)\xi_j\eta_i \end{aligned}$$

Comme $x(p) \cdot p = 1$, on a :

$$\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial p_j} p_k = \sum_k \frac{\partial}{\partial p_j}(p_k x_k) - \sum_k x_k \frac{\partial x_k}{\partial p_j} = -\sum_k x_k \delta_{j,k} = -x_j$$

On arrive pour le membre de droite de l'équation (6) à :

$$-d\omega(P,\xi)\omega(\eta) + d\omega(P,\eta)\omega(\xi) = \sum_{i,j,k} (\frac{\partial x_i}{\partial p_k} p_k x_j - \frac{\partial x_j}{\partial p_k} p_k x_i)\xi_j\eta_i$$

Pour le membre de gauche, on a :

$$d\omega(\xi,\eta) = \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i(\xi,\eta) = \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial p_j}(\xi_j\eta_i - \xi_i\eta_j)$$
$$= \sum_{i,j} (\frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i})\xi_j\eta_i$$

L'équation (6) est donc vérifiée si et seulement si

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} - \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial p_k} p_k x_j - \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial p_k} p_k x_i$$

c'est-à-dire si et seulement si (σ_{ij}) est symétrique. C'est la condition nécessaire sur x que l'on souhaitait.

Réciproquement, si (σ_{ij}) est symétrique, on a l'équation (6) donc en posant $\alpha_\xi = \omega(\xi) - d\omega(P,\xi)$, on obtient $d\omega(\xi,\eta) = (\alpha \wedge \omega)(\xi,\eta)$, c'est-à-dire $d\omega = \alpha \wedge \omega$, d'où x est une fonction de demande.

Remarque. La matrice (σ_{ij}) qui intervient ici est une matrice que l'on rencontre fréquemment en économie. C'est la matrice de Slutsky de la fonctionde demande x.

Nous avons donc résolu complètement le problème du consommateur simple en explicitant une condition sur la fonction x pour qu'elle soit une fonction de demande. Nous pouvons maintenant nous intéresser à des variations de ce problème. L'une d'elles, étudiée récemment par Browning et Chiappori dans ([9]), traite le cas où il ya désormais deux consommateurs : il s'agit du "problème du foyer". Les deux auteurs partent du constat qu'en général, dans la littérature, on considère que les foyers à plusieurs personnes peuvent être traités comme si tous avaient les mêmes objectifs, les mêmes besoins. Ce modèle est très pratique mais ne reflète en rien la réalité : de nombreux tests empiriques l'ont déjà mis en défaut. Il faut donc bâtir un nouveau modèle et le tester à nouveau sur des données empiriques. C'est ce que ces deux auteurs ont fait, et nous allons donc maintenant présenter leur travail. Pour cela, nous aurons besoin d'un nouvel outil en calcul différentiel extérieur : le théorème de Pfaff. Nous le démontrons dans la section suivante.

4 Le théorème de Pfaff

Le théorème de Pfaff caractérise les 1-formes différentielles vérifiant

$$\omega \wedge \overbrace{d\omega \wedge \ldots \wedge d\omega}^{kfois} = 0$$

pour un certain k : ce sont exactement les formes qui se décomposent comme somme d'au plus k gradients.

Nous prouvons ici ce théorème dans le cas $k = 2$. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes. Dans toute la suite, on suppose donnée une 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = 0$.
2. Il existe une 2-forme β et une 1-forme γ telles que $d\omega = \beta + \gamma \wedge \omega$ et $\beta \wedge \beta = 0$.
3. Il existe α une 3-forme telle que $d\omega \wedge d\omega = \alpha \wedge \omega$.

Preuve. On prend une base de 1-formes $\omega_1, ..., \omega_n$ où $\omega = \omega_1$. On pose $d\omega = \sum_{i,j} a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j = \omega \wedge \gamma + \beta$ où β ne contient pas de $\omega_1 \wedge \omega_j$.
(1) $\Rightarrow$ (2) Avec l'écriture ci-dessus : $0 = \omega \wedge d\omega \wedge d\omega = \omega \wedge (\omega \wedge \gamma + \beta) \wedge (\omega \wedge \gamma + \beta) = \omega \wedge \beta \wedge \beta$ donc $\beta \wedge \beta = 0$ car β ne contient pas de $\omega_1 \wedge \omega_j$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Toujours avec la décomposition décrite ci-dessus :

$$d\omega \wedge d\omega = (\beta + \gamma \wedge \omega) \wedge (\beta + \gamma \wedge \omega) = \gamma \wedge \omega \wedge \beta + \beta \wedge \gamma \wedge \omega = (\gamma \wedge \beta + \beta \wedge \gamma) \wedge \omega$$

d'où le résultat en posant $\alpha = \gamma \wedge \beta + \beta \wedge \gamma$
(3) $\Rightarrow$ (1) $\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = \omega \wedge \alpha \wedge \omega = -\omega \wedge \omega \wedge \alpha = 0$

Lemme 3. Soit σ une 2-forme, $\sigma \neq 0$ telle que $\sigma \wedge \sigma = 0$. Alors il existe γ, γ' des 1-formes telles que $\sigma = \gamma \wedge \gamma'$.
Preuve. A nouveau, on prend une base de 1-formes $\omega_1, ..., \omega_n$, et on décompose σ sur cette base : $\sigma = \sum a_{ij}\omega_i \wedge \omega_j$.
Introduisons la 1-forme différentielle $u(\xi)(\eta) = \sigma(\xi, \eta)$. Comme $\sigma \neq 0$, il existe ξ telle que $u(\xi) \neq 0$.
Pour η_1, η_2, η_3 des vecteurs quelconques, on a

$$\begin{aligned}
(u(\xi) \wedge \sigma)(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \sum a_{ij} u(\xi) \wedge \omega_i \wedge \omega_j(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \\
&= \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_1)\omega_i(\eta_2)\omega_j(\eta_3) - \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_1)\omega_j(\eta_2)\omega_i(\eta_3) \\
&\quad - \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_2)\omega_i(\eta_1)\omega_j(\eta_3) + \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_2)\omega_i(\eta_3)\omega_j(\eta_1) \\
&\quad - \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_3)\omega_i(\eta_2)\omega_j(\eta_1) + \sum a_{ij} u(\xi)(\eta_3)\omega_i(\eta_1)\omega_j(\eta_2) \\
&= 2(\sigma(\xi, \eta_1)\sigma(\eta_2, \eta_3) + \sigma(\xi, \eta_2)\sigma(\eta_3, \eta_1) + \sigma(\xi, \eta_3)\sigma(\eta_1, \eta_2)) \\
&= (\sigma \wedge \sigma)(\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $u(\xi) \wedge \sigma = 0$.
On pose $\alpha_1 = u(\xi)$, on complète en une base $\alpha_1, ..., \alpha_n$, et l'on décompose à nouveau σ dans cette nouvelle base : $\sigma = \sum \sigma_{ij}\alpha_i \wedge \alpha_j$. Alors :

$$0 = \alpha_1 \wedge \sigma = \sum \sigma_{ij}\alpha_1 \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j$$

Donc si $i, j > 1$, $\sigma_{ij} = 0$. D'où finalement $\sigma = \alpha_1 \wedge \gamma'$.

Théorème 7 (Pfaff)**.** Soit ω une 1-forme différentielle et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que $\omega \wedge d\omega \neq 0$ sur U et $\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = 0$ sur U. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ et $\phi, f, \psi, g \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ tels que $\omega = \phi\ df + \psi\ dg$.
Preuve. Soit ω une telle 1-forme différentielle.
D'après le lemme 1, on peut écrire $d\omega = \omega \wedge \omega' + \sigma$ avec $\sigma \wedge \sigma = 0$. D'après le lemme 2, on peut donc décomposer $d\omega$ en $d\omega = \omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'$. Remarquons que ω, γ et γ' sont linéairement indépendantes puisque $0 \neq \omega \wedge d\omega = \omega \wedge \gamma \wedge \gamma'$.
Procédons alors en plusieurs étapes.

(1) Posons $J = \{\alpha : \alpha \wedge \omega \wedge d\omega = 0\}$. Montrons que J est un idéal différentiel. Si $\alpha \in J$, alors $0 = d(\alpha \wedge \omega \wedge d\omega) = d\alpha \wedge \omega \wedge d\omega + (-1)^{deg(\alpha)} \alpha \wedge d\omega \wedge d\omega$.
Or, $d\omega \wedge d\omega = 2\omega \wedge \omega' \wedge \gamma \wedge \gamma' = -2\omega' \wedge \omega \wedge \gamma \wedge \gamma' = -2\omega' \wedge \omega \wedge d\omega$.
Donc $\alpha \wedge d\omega \wedge d\omega = -2\alpha \wedge \omega' \wedge \omega \wedge d\omega = 2\omega' \wedge (\alpha \wedge \omega \wedge d\omega) = 0$.
D'où, en reprenant le début du calcul, $0 = d\alpha \wedge \omega \wedge d\omega + (-1)^{deg(\alpha)} \alpha \wedge d\omega \wedge d\omega = d\alpha \wedge \omega \wedge d\omega$ donc J est un idéal différentiel.

(2) Montrons que $\{\omega, \gamma, \gamma'\}_{alg} = J$.
On a $\omega \in J$ car $\omega \wedge \omega \wedge d\omega = 0$. De même, $\gamma \in J$ car $\gamma \wedge \omega \wedge d\omega = \gamma \wedge \omega \wedge (\omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma') = 0$. Enfin, $\gamma' \in J$ pour la même raison. Donc $\{\omega, \gamma, \gamma'\}_{alg} \subset J$.
Réciproquement, soit $\alpha \in J$ une forme différentielle (de n'importe quel degré). On prend une base $\alpha_1, ..., \alpha_n$ où $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = \gamma$, $\alpha_3 = \gamma'$. On écrit :

$$\alpha = \sum \sigma_{i_1,...,i_k} \alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_k}$$

Comme $0 = \alpha \wedge \omega \wedge d\omega = \alpha \wedge \omega \wedge \gamma \wedge \gamma'$, on obtient que $\sigma_{i_1,...,i_k} = 0$ dès que $\{i_1, ..., i_k\} \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$ donc $\alpha \in \{\omega, \gamma, \gamma'\}_{alg}$. D'où finalement $\{\omega, \gamma, \gamma'\}_{alg} = J$.

(3) Par le théorème de Frobenius, puisque ω, γ et γ' sont linéairement indépendantes, on peut alors trouver des coordonnées locales y_1, y_2, y_3 telles que $\{\omega, \gamma, \gamma'\}_{alg} = \{dy_1, dy_2, dy_3\}_{alg}$.

(4) On a donc $\omega = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \lambda_3 dy_3$. Supposons $\lambda_1 \neq 0$ sans perte de généralité. Comme précédemment, on a $\{\omega, dy_1\}_{alg} = \{\alpha : \alpha \wedge \omega \wedge dy_1 = 0\}$. A nouveau, il faut montrer que cet idéal J' est différentiel et pour ce faire, montrer que $d\omega \in J'$. Or, $d\omega = \omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'$ donc il suffit de montrer que $\gamma \wedge \gamma' \in J'$.
Posons $\gamma = \mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + \mu_3 dy_3$ et $\gamma' = \nu_1 dy_1 + \nu_2 dy_2 + \nu_3 dy_3$. Alors

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \gamma' \wedge \omega \wedge dy_1 = \quad & (\mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + \mu_3 dy_3) \wedge (\nu_1 dy_1 + \nu_2 dy_2 + \nu_3 dy_3) \\ & \wedge (\lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \lambda_3 dy_3) \wedge dy_1 \\ = 0 & \end{aligned}$$

donc, par définition de J', on a $\gamma \wedge \gamma' \in J'$. D'où J' est différentiel.
Par le théorème de Frobenius, on a donc l'existence de f, g telles que $J' = \{df, dg\}$. D'où, puisque $\omega \in J'$ est de degré 1 :

$$\omega = \phi \; df + \psi \; dg$$

Remarque. Le théorème de Pfaff est en réalité plus général : il énonce que si ω est une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ telle que

$$\omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge ... \wedge d\omega}_{(k-1) \text{ fois}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega \wedge \underbrace{d\omega \wedge ... \wedge d\omega}_{k \text{ fois}} = 0,$$

alors, pour tout point $x \in U$, il existe des fonctions λ_i et V_i définies sur un voisinage de x telles que

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dV_i.$$

5 Le problème du foyer

Revenons maintenant au problème soulevé par Browning et Chiappori : il s'agit de caractériser la fonction de demande d'un couple, sous les seules hypothèses que chacune des deux personnes dans le foyer a ses propres préférences et que les décisions collectives sont Pareto optimales, c'est-à-dire que l'on ne peut pas améliorer le bien-être d'un individu sans détériorer celui de l'autre. On suppose aussi que chaque personne connaît les préférences de l'autre. On ne fait aucune hypothèse sur les préférences individuelles, sauf qu'elles peuvent être représentées par des fonctions d'utilité. On autorise donc des facteurs extérieurs, de l'altruisme, etc. L'analogue de la condition de symétrie de la matrice obtenue dans le cas du consommateur simple sera que la matrice devra être cette fois la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice de rang 1.

5.1 Cadre du problème et résultats préliminaires

Dans ce nouveau problème, les biens se scindent en deux catégories : d'un côté, ceux que chaque consommateur utilise individuellement (on dit que ce sont des biens privés), et de l'autre ceux qui sont mis en commun (on dit que ce sont des bien publics). Par exemple, la nourriture et les vêtements sont des biens privés alors que le logement est un bien public car les deux partenaires peuvent en profiter simultanément.

Chaque consommateur est caractérisé par une fonction d'utilité qui dépend à la fois de sa consommation et de celle de son partenaire. Cela permet d'inclure des effets d'altruisme : si l'un des conjoints décide de fumer, cela peut incommoder l'autre, mais s'il décide de faire de la musique, cela peut satisfaire aussi l'autre conjoint. La fonction de demande est alors la fonction qui à un prix p associe le maximum des fonctions d'utilité de chaque consommateur (comme il y a deux fonctions d'utilité, la notion d'optimalité adéquate est ici l'optimalité de Pareto). Cette fonction de demande sera naturellement homogène de degré 0 : cela signifie que si l'on exprime les prix en centimes au lieu de les mettre en euros, cela ne change rien au comportement des consommateurs.

Supposons qu'il y ait $n + N$ biens et deux consommateurs. Les n premiers biens sont privés et les N suivants sont publics. Les prix des biens privés sont contenus dans le vecteur $p \in \mathbb{R}^n$ et ceux des biens publics dans $P \in \mathbb{R}^N$. Chaque consommateur est caractérisé par sa fonction d'utilité, supposée concave (comme dans le problème du consommateur simple) :

$$U_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad , \quad i = 1, 2$$

Notons $x_1 \in \mathbb{R}^n$ la consommation privée du premier consommateur, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ la consommation privée du deuxième consommateur, et $X \in \mathbb{R}^N$ la consommation commune de biens publics.
Remarquons que, comme nous l'avions mentionné dans l'introduction, la fonction de consommation d'un consommateur ne dépend pas seulement de sa consommation, mais aussi de celle de l'autre consommateur.

Remarque. Ce modèle contient le cas où certains biens privés sont plutôt réservés à l'un ou l'autre des partenaires : les vêtements pour homme, par exemple, sont, a priori, de peu d'utilité pour une femme. Mais cela importe peu : nous les comptons parmi les biens privés, quitte à leur attribuer une utilité quasiment nulle pour la femme.

On doit maintenant optimiser deux fonctions simultanément. La notion d'optimisation adéquate est celle de Pareto.

Définition 15. On dit qu'un ensemble de consommations $(x_1, x_2, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ est possible si :

$$p \cdot (x_1 + x_2) + P \cdot X \leq 1$$

On dit que cet ensemble est Pareto optimal s'il est possible et si

$$\begin{aligned} & (p \cdot (y_1 + y_2) + P \cdot Y \leq 1 \quad \text{et} \quad (y_1, y_2, Y) \neq (x_1, x_2, X)) \\ \Rightarrow \quad & (U_1(y_1, y_2, Y) < U_1(x_1, x_2, X) \quad \text{ou} \quad U_2(y_1, y_2, Y) < U_2(x_1, x_2, X)) \end{aligned}$$

Remarque. L'optimalité de Pareto revient à dire que l'on ne peut pas améliorer le bien-être d'un individu sans détériorer celui de l'autre. Ce sera la condition d'optimalité utilisée dans la suite : à prix fixés, nous cherchons les ensembles de consommation (x_1, x_2, X) Pareto-optimaux.

Notation. Dans le lemme qui suit, nous aurons besoin de la notation suivante : si m est un entier et $x \in \mathbb{R}^m$, on notera $x \geq 0$ si toutes les composantes de x sont positives.

Lemme 4. Fixons des prix $p \in \mathbb{R}^n$ et $P \in \mathbb{R}^N$. Soit $x = (x_1, x_2, X)$ un ensemble de consommation possible. Alors x est Pareto-optimal si et seulement s'il existe $0 \leq \mu \leq 1$ tel que x maximise $\mu U_1 + (1-\mu) U_2$ sur l'ensemble des possibles.

Preuve. Supposons x Pareto optimal. Posons

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad y = (y_1, y_2, Y), \quad p \cdot y_1 + p \cdot y_2 + P \cdot Y \leq 1, \quad y \geq 0 \right\}$$

et soit B son enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$. Si $\begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} \in \mathring{B}$ (l'intérieur de B), alors il existe $\mu_1, ..., \mu_k$ des réels ≥ 0 de somme 1 et $y^1, ..., y^k \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ s'écrivant $y^i = (y_1^i, y_2^i, Y^i)$ avec $\forall i = 1, ..., k, \ \ p \cdot y_1^i + p \cdot y_2^i + P \cdot Y^i \leq 1$ tels que :

$$U_1(x) = \sum_{i=1}^k \mu_i U_1(y^i) \quad \text{et} \quad U_2(x) = \sum_{i=1}^k \mu_i U_2(y^i)$$

et $x \neq \sum_{i=1}^k \mu_i y^i$. (En fait, le théorème de Carathéodory permet de prendre $k = 3$, mais nous ne l'utiliserons pas ici). Par concavité de U_1 et U_2, on a alors

$$U_1(x) \leq U_1(\sum_{i=1}^k \mu_i y^i) \quad \text{et} \quad U_2(x) \leq U_2(\sum_{i=1}^k \mu_i y^i)$$

avec pourtant $\sum_{i=1}^k \mu_i y^i \geq 0$ et $p \cdot (\sum_{i=1}^k \mu_i y_1^i) + p \cdot (\sum_{i=1}^k \mu_i y_2^i) + P \cdot (\sum_{i=1}^k \mu_i Y^i) \leq 1$. Ceci contredit la Pareto-optimalité de x. Donc $\begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} \notin \mathring{B}$.

Il existe donc, par séparation des convexes, μ, ν des réels tels que pour tout y vérifiant $p \cdot y_1 + p \cdot y_2 + P \cdot Y \leq 1$ et $y \geq 0$, on ait :

$$\begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} U_1(y) \\ U_2(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

On vérifie directement que μ et ν sont ≥ 0 et donc, en renormalisant $\mu + \nu$ à 1, on obtient :

$$\mu U_1(x) + (1-\mu) U_2(x) \geq \mu U_1(y) + (1-\mu) U_2(y)$$

Réciproquement, s'il existe $0 \leq \mu \leq 1$ tel que x maximise $\mu U_1 + (1-\mu) U_2$, alors x est clairement Pareto-optimal (conséquence directe de la définition de la Pareto-optimalité).

Remarque. On peut donc réécrire le problème d'optimisation à résoudre :

$$\max \left\{ \mu(p,P) U_1(x_1, x_2, X) + (1 - \mu(p,P)) U_2(x_1, x_2, X) \right\}, \tag{7}$$

le max étant pris sous contrainte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n_+, X \in \mathbb{R}^N_+$ et $p \cdot (x_1 + x_2) + P \cdot X \leq 1$.

Remarque. La fonction $\mu(p,P)$ synthétise le processus de décision, l'importance relative des conjoints. Si $\mu = 1$, le foyer se comporte comme si c'est toujours le premier consommateur qui décide, alors que si $\mu = 0$, c'est le deuxième qui endosse le rôle de dictateur. C'est dans ce paramètre que sont contenues par exemple les différences de revenus entre les deux partenaires : celui qui gagne le plus aura probablement plus de poids que l'autre, et un μ adéquat traduira cette plus grande d'importance.

5.2 La condition de Browning-Chiappori

Comme dans le cas du consommateur simple, nous souhaitons caractériser les fonctions de demande issues du problème d'optimisation (7). Mais cette fois-ci, nous supposons que nous ne pouvons pas observer les consommations individuelles de biens privés $x_1(p,P)$ et $x_2(p,P)$ (ce qui est souvent le cas pour des données réelles), mais seulement la fonction de demande agrégée $x(p,P) = x_1(p,P) + x_2(p,P)$ et la fonction de demande de biens publics $X(p,P)$. Browning et Chiappori, dans [9], ont trouvé la condition nécessaire et suffisante suivante sur (x, X) pour que ce soit une fonction de demande d'un foyer.

Théorème 8. Soient $x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Alors (x, X) est une fonction de demande d'un foyer (c'est-à-dire est solution du problème d'optimisation (7) pour un certain couple de fonctions d'utilité (U_1, U_2) et une certaine fonction $\mu(p,P)$) si et seulement si la matrice de Slutsky σ associée à $\xi = (x, X)$ définie par

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \pi_j} - \sum_{k=1}^{n+N} \pi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial \pi_k} \xi_j, \qquad \text{où } \pi = (p, P) \in \mathbb{R}^{n+N}$$

est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice de rang 1. Cette condition est appelée condition de Browning-Chiappori.

Preuve. Se reporter à ([5]). La preuve utilise le théorème de Pfaff démontré dans la section 4.

Remarque. La preuve du théorème (8) montre que si la condition de Browning-Chiappori est satisfaite, alors le problème d'optimisation (7) a une solution avec seulement des biens publics. Si l'on sait à l'avance qu'en réalité, il doit y avoir des biens privés, alors la condition de Browning-Chiappori n'est plus suffisante, et l'on doit trouver de nouvelles conditions.

Remarque. Dans l'article [9], la proposition 5 permet d'étendre cette étude au cas d'un foyer avec plus de deux personnes. La matrice de Slutsky doit alors être somme d'une matrice symétrique et d'une matrice de rang k, si l'on considère qu'il y a $k+1 < n$ personnes dans le foyer.

5.3 Comment tester expérimentalement les résultats ?

Nous venons de voir, dans la section précédente, qu'une fonction donnée est une fonction de demande si et seulement si la matrice de Slutsky σ qui lui est associée est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice de rang 1. Dans ce cas, nous dirons que σ est SR1. Maintenant, nous allons expliquer comment vérifier expérimentalement ce résultat. Pour cela, nous avons besoin d'un critère pour dire si une matrice est SR1. Le lemme suivant établit ce critère.

Lemme 5.
1. Soit S une matrice vérifiant la propriété SR1, $S = \Sigma + u^t v$. On suppose de plus que S n'est pas symétrique. Alors les vecteurs u et v sont linéairement indépendants, la matrice $M = S - {}^tS$ est de rang 2 et $Im(M)$ (le sous-espace engendré par les colonnes de M) est engendré par u et v.
2. Réciproquement, soit M une matrice antisymétrique de rang 2 et soient $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ deux vecteurs indépendants dans $Im(M)$. Alors il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $M = u^t v - v^t u$ où $u = \lambda\tilde{u}$ et $v = \tilde{v}$. En particulier, pour toute matrice symétrique Σ, la matrice $S = \Sigma + u^t v$ vérifie $M = S - {}^tS$.

Preuve.
1. Si les vecteurs u et v étaient linéairement dépendants, $u^t v$ serait symétrique donc S aussi, ce qui est en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. u et v sont donc linéairement indépendants.
   Montrons que M est de rang 2. On a $M = S - {}^tS = u^t v - v^t u$. Supposons par l'absurde qu'il existe λ tel que $u^t v = \lambda v^t u$. On a alors $\forall i, j$ l'égalité $u_i v_j = \lambda v_i u_j$. En prenant le cas $i = j$, on obtient que pour chaque j, soit u_j et v_j sont simultanément nuls, soit ils sont simultanément non nuls. Comme on a supposé u et v non nuls, on obtient l'existence de k tel que $u_k \neq 0$ donc $\lambda u_k v_k = u_k v_k$ donne $\lambda = 1$. Mais comme $\forall i, j$, on a $u_i v_j = \lambda u_j v_i = u_j v_i$, on trouve finalement que u et v sont colinéaires, ce qui est absurde. Finalement, on obtient que $M = u^t v - v^t u$ avec $u^t v$ et $v^t u$ non proportionnels, donc M est de rang 2.
   Enfin, soit $y \in Im(M)$, c'est-à-dire $y = Mz$. On a alors $y = Mz = (u^t v - v^t u)z = u({}^t vz) - v({}^t uz) = ({}^t vz)u - ({}^t uz)v$, qui est donc dans le sous-espace engendré par u et v.
2. Pour ce deuxième point, nous pouvons par exemple utiliser le théorème de réduction des matrices antisymétriques : il existe une base orthogonale dans laquelle M s'écrit sous la forme de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de 0. Comme M est de rang 2, seul un de ces blocs diagonaux est non nul. Sans perte de généralité, supposons qu'il s'agit du bloc en haut à gauche. On peut écrire $\tilde{u} = ae_1 + be_2$ et $\tilde{v} = ce_1 + de_2$ avec $ad - bc \neq 0$. On vérifie alors directement que $M = (\tilde{u}^t\tilde{v} - \tilde{v}^t\tilde{u})/(ad - bc)$, ce qui donne le résultat souhaité.

Ainsi, tester les données empiriques revient à calculer le rang de la matrice $M = S - {}^tS$. Le modèle collectif prédit un rang au plus 2, alors que le modèle "unitaire" calqué sur celui du consommateur simple prédit un rang 0.

On peut faire une dernière remarque sur l'antisymétrie, qui a des implications sur le rang de M. Elles sont faites dans les deux lemmes qui suivent.

Lemme 6. Toutes les valeurs propres différentes de 0 d'une matrice réelle antisymétrique sont imaginaires. En particulier, une matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

Preuve. Soit λ une valeur propre de M et x un vecteur propre associé : $Mx = \lambda x$. Alors ${}^tx{}^tM = \lambda{}^tx$ en transposant, puis, en conjuguant et en utilisant l'antisymétrie de M, on obtient $-{}^t\overline{x}M = \bar{\lambda}{}^t\overline{x}$. Enfin, on multiplie par x et on utilise $Mx = \lambda x$ pour aboutir à $-\lambda{}^t\overline{x}x = \bar{\lambda}{}^t\overline{x}x$. Comme ${}^t\overline{x}x \neq 0$, on obtient bien $\bar{\lambda} = -\lambda$, c'est-à-dire que λ est un imaginaire pur.
Comme, dans le polynôme caractéristique, les racines imaginaires apparaissent par paires conjuguées, le nombre de valeurs propres différentes de 0 doit être pair.

Lemme 7. Soit $M = (m_{ik})$ une matrice réelle antisymétrique non nulle telle que, sans perte de généralité, $m_{12} \neq 0$. Alors M est de rang 2 si et seulement si, pour tout (i, k) tels que $k > i > 2$,

$$m_{ik} = \frac{m_{1i}m_{2k} - m_{1k}m_{2i}}{m_{12}}$$

Remarque. Cela signifie que les éléments des lignes 3 à n de M sont fonctions des éléments des deux premières lignes (et la même chose est vraie pour les colonnes). Cette condition est très facile à tester : il suffit, pour une matrice $n \times n$, de réaliser $(n-2)(n-3)/2$ vérifications.

Preuve. Si M est de rang 2, on peut écrire $M = u{}^tv - v{}^tu$ d'après le lemme (5). Alors pour $k > i > 2$, on a

$$\begin{aligned} m_{1i}m_{2k} - m_{1k}m_{2i} &= (u_1v_i - v_1u_i)(u_2v_k - v_2u_k) - (u_1v_k - v_1u_k)(u_2v_i - v_2u_i) \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)(u_iv_k - v_iu_k) \\ &= m_{12}m_{ik} \end{aligned}$$

Réciproquement, si la relation de l'énoncé du lemme a lieu, on peut écrire la i-ème ligne m^i pour $i > 2$ comme $(m_{1i}m^2 - m_{2i}m^1)/m_{12}$ et donc M est de rang 2.

On peut finalement tout résumer dans la proposition suvante :

Proposition 3. Soit S la matrice de Slutsky, et soit $M = S - {}^tS$. Alors dans le modèle collectif étudié :

1. M est de rang 0 ou 2.
2. Si M est de rang 0, le modèle "unitaire" (calqué sur le consommateur unitaire) ne peut pas être exclu.

Remarque. Cette proposition 3 combinée avec le lemme 7 permet de tester le modèle sur des résultats expérimentaux. C'est ce qu'ont fait Browning et Chiappori dans ([9]). Ils ont utilisé les données du Canadian Family Expenditure Survey (FAMEX) qui rassemble les achats annuels de foyers canadiens. Les variations de prix nécessaires pour calculer approximativement la matrice de Slutsky proviennent à la fois de l'évolution des prix dans le temps (les auteurs ont pris en compte les données de 1974, 1978, 1982, 1984, 1986, 1990 et 1992) et de leur variabilité au sein même du Canada (dues à des taxes et des coûts de transport très différents selon les régions du pays). Cela leur a permis à la fois de montrer que la symétrie de la matrice est vérifiée pour des consommateurs simples (comme prévu) mais pas pour des couples (ce qui montre que le modèle trop simplifié n'est pas le bon), et que la condition "somme d'une matrice symétrique et d'une matrice de rang 1" est vérifiée dans le cas des couples (ce qui était prévu par le modèle de Browning et Chiappori). Nous ne rentrerons pas ici dans les détails de cette vérification et renvoyons le lecteur à l'article ([9]).

Nous allons maintenant progressivement nous attaquer à un dernier problème : il s'agit de déterminer en toute généralité la structure de la fonction de demande agrégée (i.e. la somme des fonctions de demande de plusieurs consommateurs). Il sera résolu (presque entièrement) dans la section 8. Mais avant cela, nous allons démontrer dans les sections 6 et 7 les théorèmes de Cauchy-Kowalevskaya et Cartan-Kähler, que l'on utilise dans la résolution de ce problème.

6 Le théorème de Cauchy-Kowalevskaya

6.1 Introduction

Le théorème de Cauchy-Kowalevskaya est un théorème permettant de trouver des solutions à des équations aux dérivées partielles avec conditions initiales, sous des conditions d'analyticité des fonctions considérées. La présentation qui suit de ce théorème est inspirée de celle de Evans dans ([8]).

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles considérés sont du type

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_N, ..., \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, ...\right)$$

avec $i, j = 1, ..., N$ et $k_0 + ... + k_n = k \leq n_i$ et $k_0 < n_i$ et $u_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Les F_i sont des fonctions analytiques, et l'on impose de plus des conditions aux bords analytiques :

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \phi_{i,k}(x_1, ..., x_n) \quad (k = 0, ..., n_i - 1;\ t = t^0)$$

où les $\phi_{i,k}$ sont supposées analytiques.

Exemple. Ce théorème s'applique à l'équation des ondes

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

qui décrit la propagation d'une onde à la vitesse c dans un milieu de dimension 1. Intuitivement, on s'attend à ce que la solution soit déterminée par la donnée de la position initiale $u(x, 0) = h(x)$ et de la vitesse initiale $u_t(x, 0) = v(x)$.

Exemple. Ce théorème, en revanche, ne s'applique pas à l'équation de la chaleur

$$u_t = u_{xx}$$

qui modélise le flux de chaleur dans un milieu de dimension 1, avec $u(x,t)$ la température en x à l'instant t. On s'attend à ce que la distribution de température à l'instant $t = 0$ détermine la température dans l'ensemble du domaine à tout instant ultérieur. On impose donc une condition initiale du type $u(x, 0) = f(x)$. Malheureusement, la dérivation en temps est d'ordre 1 et celle en espace d'ordre 2. Nous ne sommes donc pas dans le cadre d'application du théorème de Cauchy-Kowalevskaya. On peut remarquer qu'en revanche, si l'on impose une condition initiale du type $u(x_0, t) = f(t)$ (c'est-à-dire que l'on impose la température en un point donné à tout instant), alors le théorème peut s'appliquer dans ce cas. Nous reviendrons plus tard à cet exemple.

Notation. Nous allons ici introduire quelques notations.

$$\begin{aligned}
\alpha &= (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \\
\partial^\alpha &= \partial^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_n} \\
x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} \\
\alpha! &= \alpha_1! ... \alpha_n! \\
|\alpha| &= \alpha_1 + ... + \alpha_n
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant faire quelques remarques sur les fonctions analytiques réelles, qui nous seront utiles par la suite.

6.2 Fonctions analytiques réelles

Définition 16. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite analytique réelle au voisinage de x_0 s'il existe $r > 0$ et des constantes $f_\alpha \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sum_\alpha f_\alpha (x - x_0)^\alpha \qquad (|x - x_0| < r)$$

où la somme est prise sur tous les multi-indices α.

Remarque. Si f est analytique réelle, alors f est égale à son développement en série de Taylor :

$$f(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha \qquad (|x - x_0| < r)$$

L'exemple suivant sera important pour la suite.

Exemple. Si $r > 0$, posons

$$f(x) = \frac{r}{r - (x_1 + ... + x_n)} \qquad \text{pour } |x| < r/\sqrt{n}$$

Alors

$$f(x) = \frac{1}{1 - \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{r}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 + ... + x_n}{r}\right)^k = \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{r^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha$$

Cette série est absolument convergente pour $|x| < r/\sqrt{n}$ puisque, par Cauchy-Schwarz, $|x_1| + ... + |x_n| \leq |x|\sqrt{n} < r$.

Pour prouver le théorème de Cauchy-Kowalevskaya, nous utiliserons une méthode, dite des "séries majorantes". Ci-dessous, nous donnons une définition et prouvons un lemme dont nous nous servirons à ce moment-là.

Définition 17. Soient

$$f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha, \qquad g = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha$$

deux développements en séries entières. On dit que g majore f, et l'on écrit $g >> f$, si pour tout multiindice α, on a $g_\alpha \geq |f_\alpha|$.

Lemme 8. (i) Si $g >> f$ et g converge pour $|x| < r$, alors f converge aussi pour $|x| < r$.

(ii) Si $f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha$ converge pour $|x| < r$ et $0 < t < r$, alors f a un majorant pour $|x| < t$.

Preuve. 1 Pour vérifier l'assertion (i), il suffit de vérifier que

$$\sum_\alpha |f_\alpha x^\alpha| \leq \sum_\alpha g_\alpha |x_1|^{\alpha_1} ... |x_n|^{\alpha_n} < \infty \quad \text{si } |x| < r$$

2 Posons $s = t/\sqrt{n}$ et $y = s(1, ..., 1)$. Alors $|y| = s\sqrt{n} = t < r$ donc $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ converge. Il existe donc une constante C telle que

$$|f_\alpha y^\alpha| \leq C \qquad \text{pour tout multiindice } \alpha$$

En particulier,

$$|f_\alpha| \leq \frac{C}{y_1^{\alpha_1} ... y_n^{\alpha_n}} = \frac{C}{|s|^\alpha} \leq C \frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|} \alpha!}$$

Mais alors

$$g(x) = \frac{Cs}{s - (x_1 + ... + x_n)} = C \sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{s^{|\alpha|} \alpha!} x^\alpha$$

majore f pour $|x| < t$.

Notation. Nous aurons plus tard besoin d'étendre nos notations aux fonctions à valeurs vectorielles. Etant données des développements en séries entières $\left\{f^k\right\}_{k=1}^m$, $\left\{g^k\right\}_{k=1}^m$, on pose $f = (f^1, ..., f^m)$ et $g = (g^1, ..., g^m)$ et l'on écrit $g >> f$ si pour tout $k = 1, ..., m$, on a $g^k >> f^k$.

6.3 Enoncé du théorème de Cauchy-Kowalevskaya et remarques

Notation. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x' = (x^1, ..., x^{n-1})$ ses $(n-1)$ premières coordonnées. Pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on note $u = (u^1, ..., u^m)$ et $u_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}$. Enfin, on note $M_m(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de taille $m \times m$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Théorème 9. Supposons que B_j, pour $j = 1, ..., n-1$ et c sont des fonctions analytiques, $B_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to M_m(\mathbb{R})$ et $c : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$. Alors il existe $r > 0$ et une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ analytique réelle solution du système

$$\begin{cases} u_{x_n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} B_j(u, x') u_{x_j} + c(u, x') \text{ pour } |x| < r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ pour } |x'| < r, \ x_n = 0 \end{cases}$$

De plus, cette fonction analytique réelle est unique.

Faisons quelques remarques sur l'énoncé de ce théorème.

Remarque. On a supposé que les B_j et c ne dépendent pas de x_n. On peut toujours se ramener à ce ceas en introduisant si nécessaire une nouvelle composante à l'inconnue u, avec $u^{m+1} = x_n$.

Remarque. Le système se réécrit :

$$u^k_{x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} b_j^{kl}(u, x')u^l_{x_j} + c^k(u, x') \qquad (k = 1, ..., m) \tag{8}$$

Remarque (Unicité)**.** Comme nous recherchons des solutions réelles analytiques, on peut écrire une hypothétique solution u sous la forme

$$u = \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha, \tag{9}$$

et de même pour les fonctions B_j et c. Prenons l'exemple de la résolution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, u)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, u)$$

avec u fonction de deux variables réelles x et t, que nous souhaitons résoudre avec la condition initiale $u(x, 0) = g(x)$ analytique. Nous pouvons écrire

$$A(x, u) = \sum_{j,s\geq 0} a_{js}x^j u^s, \quad B(x, u) = \sum_{j,s\geq 0} b_{js}x^j u^s \quad \text{et} \quad u(x, t) = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}x^j t^l \tag{10}$$

Comme $u(x, 0) = \sum_j c_{j0}x^j$, la condition initiale détermine les constantes c_{j0}. Pour les autres coefficients, on substitue les expressions de (10) dans (9) pour trouver :

$$\sum_{j,l} lc_{jl}x^j t^{l-1} = \sum_{i,j,k,s} ia_{js}c^s_{kl}c_{im}x^{i+j+k-1}t^{l+m} + \sum_{j,k,l,s} b_{js}c^s_{kl}x^{j+k}t^l$$

En identifiant les coefficients en t^0, on trouve

$$c_{j1}x^j = \sum_{i,j,k,s} ia_{js}c^s_{k0}c_{i0}x^{i+j+k-1} + \sum_{j,k,s} b_{js}c^s_{k0}x^{j+k}$$

Tous les termes du membre de droite sont connus donc on peut ainsi trouver les c_{j1}. En recommençant, on parvient à trouver les c_{jl} pour tous j et l. On en conclut que si une solution existe, elle est unique et donnée par la procédure qui vient d'être décrite. Pour montrer que la solution existe effectivement, il suffit de montrer que la série converge dans un voisinage de l'origine.

Remarque. Nous avons déjà étudié l'exemple de l'équation de la chaleur et vu que le théorème de Cauchy-Kowalevskaya ne s'appliquait pas. Essayons tout de même de lui appliquer la procédure décrite dans la remarque précédente et voyons ce qu'il advient. L'équation s'écrit

$$\partial_t u = \partial_{xx} u$$

où u est une fonction de deux variables réelles x et t, avec comme condition initiale $u(x, 0) = \psi(x)$ que nous choisirons après. On peut écrire $u(x, t) = \sum_{k,l} c_{kl}x^k t^l$. Formellement, l'équation donne les égalités suivantes sur les coefficients :

$$(l + 1)c_{k,l+1} = (k + 2)(k + 1)c_{k+2,l}$$

que l'on résout en

$$c_{k,l} = \frac{(k+2l)!}{k!l!} c_{k+2l,0}$$

Si l'on choisit maintenant par exemple $\psi(x) = 1/(1-x) = \sum x^k$, on obtient

$$c_{kl} = \frac{(k+2l)!}{k!l!}$$

Pour $(x,t) = (0,\varepsilon)$, on obtient

$$u(0,\varepsilon) = \sum_l \frac{(2l)!}{l!} \varepsilon^l$$

qui diverge pour tout $\varepsilon > 0$. On voit donc que la procédure décrite ne fonctionne pas dans ce cas.

Remarque. Le théorème de Cauchy-Kowalevskaya est vrai dans un cadre plus général que celui des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nous donnons ci-dessous un énoncé que l'on peut déduire du théorème pour les équations du premier ordre en posant

$$U = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}}\right)$$

où les composantes de U sont toutes les dérivées partielles de u d'ordre $\leq k$.
Nous notons par la suite, pour k un entier : $\partial^k u = \{\partial^\alpha u \mid |\alpha| = k\}$.

Théorème 10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que les a_α, pour $|\alpha| \leq k$, sont des fonctions analytiques à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $a_{(0,...,0,k)} \neq 0$ au voisinage de 0. Alors, avec les notations introduites ci-dessus, il existe $r > 0$ et une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ analytique réelle solution du système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\partial^{k-1}u, ..., u, x)\ \partial^\alpha u + a_0(\partial^{k-1}u, ..., u, x) = 0 \quad \text{pour } |x| < r \\ \displaystyle u = \frac{\partial u}{\partial x_n} = ... = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_n^{k-1}} = 0 \quad \text{pour } |x'| < r,\ x_n = 0 \end{cases}$$

De plus, cette fonction analytique réelle est unique.

Remarque. La condition $a_{(0,...,0,k)} \neq 0$ permet d'assurer que l'on puisse calculer toutes les dérivées partielles de u en fonction de ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ et des coefficients a_α.

6.4 Preuve du théorème de Cauchy-Kowalevskaya

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Cauchy-Kowalevskaya. Comme annoncé, nous allons devoir calculer les coefficients

$$u_\alpha = \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!}$$

en fonction de ceux des B_j et c et montrer la convergence de la série ainsi définie, au moins pour r suffisamment petit.

Comme les B_j et c sont analytiques, nous pouvons écrire, en utilisant les notations introduites,

$$B_j(z,x') = \sum_{\gamma,\delta} B_{j,\gamma,\delta} z^\gamma x^\delta \qquad (j = 1, ..., n-1)$$

et

$$c(z,x') = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta} z^\gamma x^\delta$$

où les séries considérées convergent pour $|z| + |x'| < s$ pour un certain $s > 0$.

Montrons maintenant un lemme qui sera utile pour appliquer la méthode des séries majorantes.

Lemme 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout multiindice α, il existe un polynôme à coefficients positifs ou nuls q_α^k tel que

$$u_\alpha^k(0) = q_\alpha^k(..., B_{j,\gamma,\delta}, ..., c_{\gamma,\delta}, ..., u_\beta, ...),$$

où $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ pour tout multiindice β apparaissant dans le membre de droite.

Preuve. Remarquons tout d'abord que, puisque $u = 0$ sur $\{x_n = 0\}$, on a

$$u_\alpha = \frac{\partial^\alpha u(0)}{\alpha!} = 0 \qquad \text{pour tous les multiindices } \alpha \text{ avec } \alpha_n = 0$$

Fixons $i \in \{1, ..., n-1\}$ et dérivons (8) par rapport à x_i :

$$u_{x_n x_i}^k = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} \left(b_j^{kl} u_{x_i x_j}^l + b_{j,x_i}^{kl} u_{x_j}^l + \sum_{p=1}^{m} b_{j,z_p}^{kl} u_{x_i}^p u_{x_j}^l \right) + c_{x_i}^k + \sum_{p=1}^{m} c_{z_p}^k u_{x_i}^p$$

par la formule des dérivées composées. Grâce à la remarque qui précède, on peut éliminer tous les termes du membre de droite sauf $c_{x_i}^k$ en évaluant en 0. Cela permet d'obtenir $u_{x_n x_i}^k(0) = c_{x_i}^k(0,0)$.

Par une récurrence immédiate, on obtient, pour tous les multiindices α de la forme $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, 1) = (\alpha', 1)$:

$$\partial^\alpha u^k(0) = \partial^{\alpha'} c^k(0,0)$$

Ensuite, intéressons-nous aux α de la forme $(\alpha', 2)$. pour de tels α, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha u^k &= \partial^{\alpha'} (u_{x_n}^k)_{x_n} \\
&= \partial^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} b_j^{kl} u_{x_j}^l + c^k \right)_{x_n} \qquad \text{par (8)} \\
&= \partial^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} (b_j^{kl} u_{x_j x_n}^l + \sum_{p=1}^{m} b_{j,z_p}^{kl} u_{x_n}^p u_{x_j}^l) + \sum_{p=1}^{m} c_{z_p}^k u_{x_n}^p \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\partial^\alpha u^k(0) = \partial^{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m} b_j^{kl} u_{x_j x_n}^l + \sum_{p=1}^{m} c_{z_p}^k u_{x_n}^p \right) \Bigg|_{x=u=0}$$

Le membre de droite est un polynôme à coefficients positifs ou nuls des dérivées des B_j et c, et des dérivées $\partial^\beta u$ où $\beta_n \leq 1$. Cela résout le cas des α de la forme $(\alpha', 2)$.

De façon générale, en procédant de même, pour tout multiindice α et tout $k \in \{1, ..., m\}$, on obtient :

$$\partial^\alpha u^k(0) = p_\alpha^k \left(..., \partial_z^\gamma \partial_x^\delta B_j, ..., \partial_z^\gamma \partial_x^\delta c, ..., \partial^\beta u, ... \right)\Big|_{x=u=0}$$

où p_α^k est un polynôme à coefficients positifs ou nuls tel que $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ pour tout multiindice β apparaissant dans le membre de droite.

Pour conclure, remarquons que pour tous multiindices γ et δ et tout $j = 1, ..., n-1$, on a

$$B_{j,\gamma,\delta} = \frac{\partial_z^\gamma \partial_x^\delta B_j(0,0)}{(\gamma+\delta)!} \quad \text{et} \quad c_{\gamma,\delta} = \frac{\partial_z^\gamma \partial_x^\delta c(0,0)}{(\gamma+\delta)!}$$

et donc

$$u_\alpha^k(0) = q_\alpha^k(..., B_{j,\gamma,\delta}, ..., c_{\gamma,\delta}, ..., u_\beta, ...)$$

avec q_α^k un polynôme à coefficients positifs ou nuls et où $\beta_n \leq \alpha_n - 1$ pour tout multiindice β apparaissant dans le membre de droite. C'est ce que l'on souhaitait.

Nous allons maintenant essayer de montrer que la série $\sum u_\alpha x^\alpha$ converge en utilisant la méthode des séries majorantes. Pour cela, supposons

$$B_j^* >> B_j \quad (j = 1, ..., n-1) \quad \text{et} \quad c^* >> c$$

où

$$B_j^* = \sum_{j,\gamma,\delta}^{*} z^\gamma x^\delta \quad (j = 1, ..., n-1) \quad \text{et} \quad c^* = \sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta}^* z^\gamma x^\delta$$

convergent pour $|z| + |x'| < s$.

Nous considérons alors un nouveau système d'équations aux dérivées partielles avec conditions au bord :

$$\begin{cases} u_{x_n}^* = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} B_j^*(u^*, x') u_{x_j}^* + c^*(u^*, x') \text{ pour } |x| < r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u^* = 0 \text{ pour } |x'| < r, \ x_n = 0 \end{cases}$$

et l'on cherche comme précédemment une solution de la forme

$$u^* = \sum_\alpha u_\alpha^* x^\alpha, \qquad \text{où } u_\alpha^* = \frac{\partial^\alpha u^*(0)}{\alpha!}$$

Lemme 10. Pour tout multiindice α et $k = 1, ..., m$, on a $0 \leq |u_\alpha^k(0)| \leq u_\alpha^{k*}(0)$.

Preuve. Comme q_α^k est à coefficients positifs ou nuls, on a, en utilisant $B_j^* >> B_j$ et $c^* >> c$:

$$\begin{aligned} |u_\alpha^k(0)| &= |q_\alpha^k(..., B_{j,\gamma,\delta}, ..., c_{\gamma,\delta}, ..., u_\beta, ...)| \\ &\leq q_\alpha^k(..., |B_{j,\gamma,\delta}^*|, ..., |c_{\gamma,\delta}^*|, ..., |u_\beta^*|, ...) \\ &= q_\alpha^k(..., B_{j,\gamma,\delta}^*, ..., c_{\gamma,\delta}^*, ..., u_\beta^*, ...) \\ &= u_\alpha^{k*}(0) \end{aligned}$$

On déduit de ce lemme que $u^* >> u$. Par le lemme (8), il suffit donc de prouver que la série $\sum_\alpha u^*_\alpha x^\alpha$ converge au voisinage de 0. Nous allons donc, pour conclure, trouver une telle série, solution du système d'équations aux dérivées partielles pour des B_j^* et c bien choisies, qui majore u et qui converge au voisinage de 0.

Posons, pour $j = 1, ..., n-1$:

$$B_j^*(z, x') = \frac{Cr}{r - (x_1 + ... + x_{n-1}) - (z_1 + ... + z_m)} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$c^*(z, x') = \frac{Cr}{r - (x_1 + ... + x_{n-1}) - (z_1 + ... + z_m)} {}^t(1, ..., 1)$$

Alors, d'après l'assertion (ii) du lemme (8) et sa preuve, on a bien $B_j^* >> B_j$ et $c^* >> c$ pour C suffisamment grand, r suffisamment petit et $|x'| + |z| < r$.

Le système d'équations aux dérivées partielles à résoudre se réécrit alors

$$\begin{cases} u^*_{x_n} = \dfrac{Cr}{r - (x_1 + ... + x_{n-1} - (u^{1*} + ... + u^{m*})} \left(\displaystyle\sum_j u^*_{x_j} + {}^t(1, ..., 1) \right) & \text{pour } |x| < r \\ u^* = 0 & \text{pour } |x'| < r, \ x_n = 0 \end{cases}$$

Pour ce système, il existe une solution explicite, à savoir

$$u^*(x) = v^*(x) {}^t(1, ..., 1)$$

où

$$v^*(x) = \frac{1}{mn} \left(r - (x_1 + ... + x_n) - \left[(r - (x_1 + ... + x_n))^2 - 2mnCrx_n \right]^{1/2} \right)$$

Cette expression est analytique pour r suffisamment petit et $|x|$ suffisamment petit pour que le membre de droite soit défini. Nous avons donc trouvé une série, solution du système d'équations aux dérivées partielles pour des B_j^* et c bien choisies, qui majore u et qui converge au voisinage de 0. Cela prouve que $\sum_\alpha u_\alpha x^\alpha$ converge pour $x < r$ et achève la preuve du théorème.

7 Le théorème de Cartan-Kähler

Le théorème de Cartan-Kähler, que nous allons discuter maintenant en suivant peu ou prou la présentation de [1], permet d'établir l'existence de variétés intégrales pour certains systèmes différentiels extérieurs. C'est une généralisation du théorème de Cauchy-Kowalevskaya (et on utilise ce théorème dans sa preuve). Cette fois-ci, les conditions initiales ne seront plus données par les valeurs sur une hypersurface comme dans le théorème de Cauchy-Kowalevskaya, mais par une variété intégrale de dimension n, et l'objectif est de l'étendre en une variété de dimension $(n+1)$.

7.1 Systèmes différentiels extérieurs et variétés intégrales

Nous poursuivons dans cette partie l'étude des variétés intégrales commencée dans la section 2 en introduisant notamment la notion de système différentiel extérieur. L'étude des systèmes différentiels extérieurs constitue un analogue des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Les dérivées partielles sont remplacées par la différentielle extérieure et les variétés intégrales remplacent les fonctions.

Définition 18. Un système différentiel extérieur est une paire $(M, \mathcal{I})$ où M est une variété (lisse) et $\mathcal{I} \subset \Omega(M)$ est un idéal différentiel.

Exemple. $\{dy - pdx, dp \wedge dx, dx\}_{diff}$ est un système différentiel extérieur, avec $M = \mathbb{R}^3$.

Rappelons la définition d'une variété intégrale et donnons quelques exemples de leur utilisation.

Définition 19. Une variété intégrale de $\mathcal{I}$ est une sous-variété $i : N \hookrightarrow M$ telle que $i^*(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{I}$, où i est l'inclusion de N dans M.

Définition 20. Si M est une variété et X un champ de vecteurs sur M, une courbe intégrale de X est une courbe $c : I \to M$ où I est un intervalle de temps, telle que $c'(t) = X_{c(t)}$ pour tout $t \in I$.

Exemple. Un système de N équations différentielles du premier ordre

$$\frac{du_i}{dx} = F_i(x, u_1, ..., u_N), \quad i = 1, ..., N$$

où $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F_i : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, se traduit par un système différentiel extérieur $(M, \mathcal{I})$ où $M = \mathbb{R}^{N+1}$ et $\mathcal{I}$ est engendré différentiellement par les N 1-formes $du_i - F_i dx$. Les variétés intégrales de ce système différentiel extérieur sont les courbes intégrales du champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

qui annule toutes les formes de $\mathcal{I}$. Résoudre le système de N équations différentielles du premier ordre revient donc à trouver les courbes intégrales de ce champ de vecteurs.

Exemple. Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} y'(x) &= (xyz)^{17} \\ z'(x) &= \cosh(x + y + z) \end{aligned}$$

On le réécrit comme un système différentiel extérieur avec $M = \mathbb{R}^3$ et

$$\mathcal{I} = \left\{ dy - (xyz)^{17} dx, dz - \cosh(x + y + z) dx \right\}_{diff}$$

On remarque que les variétés intégrales de dimension 1 sont les courbes intégrales du champ de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x} + (xyz)^{17} \frac{\partial}{\partial y} + \cosh(x + y + z) \frac{\partial}{\partial z}$$

Exemple. Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= F(x,y,u(x,y)) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= G(x,y,u(x,y))\end{aligned}$$

Cette fois-ci, le problème est différent de ceux des exemples décrits précédemment puisque des dérivées par rapport à deux variables distinctes apparaissent. Résoudre ce système revient à trouver les variétés intégrales de dimension 2 d'un certain système différentiel extérieur que nous décrivons maintenant. Réécrivons les équations aux dérivées partielles ci-dessus comme un système différentiel extérieur sur $\mathbb{R}^3$, avec

$$\mathcal{I} = \{dz - F(x,y,z)dx, dz - G(x,y,z)dy\}_{diff}.$$

Une surface $N \subset M = \mathbb{R}^3$ est intégrale si et seulement si les deux champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x} + F(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} + G(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

sont tangents à N. Mais il n'y a aucune raison qu'il y ait de variété intégrale de dimension 2, par exemple si $F(x,y,z) = y$ et $G(x,y,z) = -x$. Le problème vient, comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 4, de la non-égalité des dérivées croisées.

Nous allons maintenant définir la notion d'élément intégral, que nous avons déjà utilisée implicitement dans le théorème de Frobenius.

Notation. Pour V un espace vectoriel et n un entier, on note $G(n, V)$ la grassmanienne des espaces de dimension n passant par l'origine de V.

Définition 21. Soit $(M, \mathcal{I})$ un système différentiel extérieur. On dit que $E \in G(n, T_xM)$ est un élément intégral de $\mathcal{I}$ si $\forall \alpha \in \mathcal{I}, \alpha\big|_E = 0$.

Notation. Nous notons $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})_x$ l'espace des éléments intégraux de $\mathcal{I}$ en $x \in M$ et $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ l'espace de tous les éléments intégraux de dimension n.

Exemple. Plaçons-nous sur $M = \mathbb{R}^2$, soit $\theta = y^2dx - xdy$ et $\mathcal{I} = \{\theta\}_{diff}$.En tout point x à l'exception de l'origine, il y a un unique élément intégral qui est une droite, donc $\mathcal{V}_1(\mathcal{I})_x$ est un point. En l'origine, θ est nulle donc toute droite est un élément intégral et $\mathcal{V}_1(\mathcal{I})_0 = \mathbb{RP}^1$.

Remarque. Les éléments intégraux sont les espaces tangents potentiels aux variétés intégrales, au sens où les variétés intégrales d'un système différentiel extérieur sont les variétés $N \subset M$ telles que T_xN est un élément intégral pour tout $x \in N$.

Remarque. L'objet du théorème de Cartan-Kähler est de donner une condition pour qu'un $E \in \mathcal{V}_n(\mathcal{I})_x$ soit tangent à une variété intégrale. On peut y penser comme une extension de la variété intégrale infinitésimale E en une "vraie" variété intégrale.

Remarque. De façon générale, il n'est pas vrai que tout élément intégral de $\mathcal{I}$ est tangent à une variété intégrale de $\mathcal{I}$. Un contre-exemple simple est obtenu en considérant $M = \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}$ l'idéal (différentiel) engendré par la 1-forme $\alpha = xdx$. L'espace $E = T_0\mathbb{R}$ est un élément intégral de $\mathcal{I}$ mais n'est tangent à aucune variété intégrale de dimension 1 de $\mathcal{I}$.

Pour construire des variétés intégrales ayant E pour espace tangent en x, nous aurons besoin d'étudier les éléments intégraux au voisinage de E. Nous allons nous restreindre aux éléments intégraux qui sont des points "lisses" de $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$, ce que nous allons maintenant définir.

Définition 22. On dit que k est la codimension de $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ en E, et l'on note

$$k = \mathrm{codim}_E(\mathcal{V}_n(\mathcal{I}), G(n, TM))$$

si k est le nombre maximal de fonctions lisses $F_i : G(n, TM) \to \mathbb{R}$ qui s'annulent sur $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ et ont des différentielles linéairement indépendantes en E.

Définition 23. Un élément intégral $E \in \mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ est dit Kähler-ordinaire si $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ est une sous-variété lisse de $G(n, TM)$ au voisinage de E.

Remarque. Si la codimension est constante dans un voisinage de E, alors E est Kähler-ordinaire. Sinon, par continuité des coefficients, il existe un voisinage de E dans lequel $\mathcal{V}_n$ est de codimension au moins k (la codimension est une fonction semi-continue inférieurement sur $\mathcal{V}_n$). Comme la codimension est majorée, les éléments Kähler-ordinaires forment un ouvert dense dans $\mathcal{V}_n$.

Nous avons déjà mentionné en introduction le fait que le théorème de Cartan-Kähler vise à étendre une variété intégrale de dimension n en une variété intégrale de dimension $(n+1)$. L'analogue infinitésimal est d'étendre un élément intégral $E \subset T_xM$ de dimension n en un élément intégral $E^+ \subset T_xM$ de dimension $(n+1)$. L'espace de toutes les extensions possibles est appelé espace polaire de E.

Définition 24. Soit $e_1, ..., e_n$ une base de l'élément intégral $E \subset T_xM$. L'espace polaire de E est

$$H(E) = \left\{ v \in T_xM \mid \psi(v, e_1, ..., e_n) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{I}^{n+1} \right\}$$

Donnons sans preuve quelques propriétés simples des espaces polaires.

Proposition 4. Soit $E \in \mathcal{V}_n(\mathcal{I})_x$, $E^+ \in G(n+1, T_xM)$ et $E \subset E^+$. Alors

1. $E \subset H(E)$
2. $E^+ \subset H(E)$ si et seulement si $E^+ \in \mathcal{V}_{n+1}(\mathcal{I})$.
3. Si $E^+ \in \mathcal{V}_{n+1}(\mathcal{I})$, alors $H(E^+) \subset H(E)$.

Les équations définissant l'espace polaire de E sont continues, donc la codimension de $H(E)$ est une fontion semi-continue inférieurement de E : elle ne peut que croître dans un voisinage de E suffisamment petit. Le cas qui nous intéressera par la suite est celui où cette codimension est localement constante.

Définition 25. Un élément intégral E Kähler-ordinaire est dit Kähler-régulier si pour tout $\tilde{E}$ dans un voisinage de E dans $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$, on a codim $H(\tilde{E}) =$ codim $H(E)$.

Exemple. L'espace polaire de $0 \in T_xM$ est le sous-espace où s'annulent toutes les formes linéaires ψ_x pour $\psi \in \mathcal{I}^1$. L'espace vectoriel nul dans T_xM est donc Kähler-régulier si $\dim(\mathcal{I}^1)$ est constant dans un voisinage de x.

Remarque. Si l'on reprend un exemple vu précédemment, où $M = \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}$ est l'idéal (différentiel) engendré par la 1-forme $\alpha = xdx$ on voit que l'espace $E = T_0\mathbb{R}$ est un élément intégral de $\mathcal{I}$ qui n'est pas Kähler-régulier.

Lorsque nous voudrons trouver une condition sous laquelle la possibilité de résoudre le problème infinitésimal (c'est-à-dire étendre E en E^+) implique la possibilité de résoudre le problème "global" (c'est-à-dire trouver une variété intégrale), nous verrons qu'une telle condition est fournie par la Kähler-régularité.

7.2 Enoncé et preuve du théorème de Cartan-Kähler

Nous allons maintenant énoncer et démontrer (en grande partie) le théorème de Cartan-Kähler. Celui-ci admet plusieurs énoncés ; celui qui nous sera le plus utile, notamment pour le problème de la demande de marché agrégée, est donné par le théorème 13. Les preuves de cette section sont celles que l'on trouve dans ([1]).

Nous avons, avant cela, besoin de quelques dernières définitions : le cadre naturel du théorème de Cauchy-Kowalevskaya était celui des fonctions analytiques réelles, et celui de Cartan-Kähler est, de façon analogue, celui des variétés analytiques, que nous définissons ci-dessous.

Définition 26. Une variété analytique est une variété topologique dont les changements de cartes sont analytiques.

Le théorème de Cartan-Kähler exige aussi une certaine régularité sur les formes ω dans $\mathcal{I}$: elles doivent être analytiques.

Définition 27. Soit M une variété. On dit que $\omega \in \Omega(M)$ est une forme différentielle analytique si les coefficients dans la décomposition de ω sur toute base de $\Omega(M)$ sont des fonctions analytiques.

Nous pouvons alors enfin introduire la notion de système différentiel analytique.

Définition 28. Un système différentiel analytique est un système différentiel extérieur $(M, \mathcal{I})$ où M est une variété analytique et toute forme $\omega \in \mathcal{I}$ est analytique.

Une première version du théorème de Cartan-Kähler s'énonce alors comme suit :

Théorème 11 (Première version de Cartan-Kähler)**.** Soit $(M, \mathcal{I})$ un système différentiel analytique et $P \subset M$ une sous-variété analytique de dimension n dont les espaces tangents sont des éléments intégraux Kähler-réguliers et telle que, en tout $p \in P$, $H(T_pP)$ est de dimension $(n+1)$. Alors, pour tout $p \in P$, il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ de p et une unique variété intégrale analytique $N \subset U$ de dimension $(n+1)$ contenant $P \cap U$.

Preuve. Nous allons réduire notre problème à un système que l'on saura résoudre grâce au théorème de Cauchy-Kowalevskaya.

Choisissons des coordonnées analytiques $x^0, x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^s$ centrées en p, telles que $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ engendrent T_pP et $\frac{\partial}{\partial x^0} \in H(T_pP)$. Soit (ϕ^ν) une base de $\mathcal{I}^n$ au voisinage de p et soient (Φ^α), pour $1 \leq \alpha \leq s$, des $(n+1)$-formes linéairement indépendantes telles que pour tout $v \in T_pM$,

$$dy^\alpha(v) = \Phi^\alpha(v, \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}).$$

On appelle cela les équations polaires de T_pP.

Si N est une hypothétique variété intégrale de dimension $(n+1)$ contenant P, alors $T_pN = H(T_pP)$, et les x^i peuvent servir de coordonnées locales pour paramétriser N. Si N est défini au voisinage de p par $y^\alpha = F^\alpha(x^0, ..., x^n)$ pour $1 \leq \alpha \leq s$, alors TN est engendré, au voisinage de p, par les vecteurs

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \qquad (\text{pour } 0 \leq i \leq n).$$

Pour des variables q^β et p_j^β (avec $1 \leq \beta \leq s$ et $1 \leq j \leq n$), posons , pour $1 \leq \alpha \leq s$:

$$\Phi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{\beta=1}^{s} q^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\beta=1}^{s} p_1^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} + \sum_{\beta=1}^{s} p_n^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) = \sum_{\beta=1}^{s} A_\beta^\alpha q^\beta + B^\alpha$$

où $A_\beta^\alpha(x^i, y^\gamma, p_j^\gamma)$ et $B^\alpha(x^i, y^\gamma, p_j^\gamma)$ pour $1 \leq \gamma \leq s$ sont des polynômes en les p_j^β avec des fonctions analytiques pour coefficients sur un voisinage U de p. Comme en p les équations

$$\Phi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{\beta=1}^{s} q^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = 0$$

coïncident avec les équations polaires de T_pP, elles sont de rang $(n+1)$ en les q^β. Ainsi, la matrice $(A_\beta^\alpha)_{1 \leq \alpha, \beta \leq s}$ est inversible sur tout un voisinage de p, que nous supposerons sans perte de généralité être aussi U, et pour des p_j^β suffisamment petits. On peut donc, sous de telles conditions, définir les formes $\tilde{\Phi}^\alpha = (A^{-1})_\beta^\alpha \Phi^\beta$.

On définit ensuite $C^\alpha(x^i, y^\beta, p_j^\beta)$ par

$$\tilde{\Phi}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{\beta=1}^{s} q^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^1} + \sum_{\beta=1}^{s} p_1^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n} + \sum_{\beta=1}^{s} p_n^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) = q^\alpha - C^\alpha$$

Ensuite on construit N en résolvant grâce au théorème 9 de Cauchy-Kowalevskaya le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial x^0} = C^\alpha \left(x^0, ..., x^n, F^1, ..., F^s; \dfrac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \right) \\ F^\alpha(0, x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases}$$

Ce système est bien sous la forme requise dans le théorème puisque les dérivées partielles dans le membre de droite de la première équation ne portent pas sur la variable x^0. En fait, on peut vérifier que la variété N de dimension $(n+1)$ ainsi construite est une variété intégrale contenant P. On peut trouver les détails dans ([1]).

Nous pouvons en déduire une autre version de ce théorème, moyennant une nouvelle définition, celle de la transversalité.

Définition 29. Soit E un espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E et F sont transverses si $F + G = E$.

Théorème 12 (Deuxième version de Cartan-Kähler)**.** Soit r un entier. Soit $(M, \mathcal{I})$ un système différentiel analytique et $P \subset M$ une sous-variété analytique dont les espaces tangents sont des éléments intégraux Kähler-réguliers et telle que, en tout $p \in P$, $H(T_pP)$ est de dimension $(n + r + 1)$. Supposons que $R \subset M$ est une sous-variété analytique de codimension r, telle que $P \subset R$ et telle que pour tout $p \in P$, les espaces T_pR et $H(T_pP)$ sont tranverses dans T_pM. Alors pour tout $p \in P$, il existe un voisinage $U \subset R$ de p et une unique variété intégrale analytique $N \subset U$ de dimension $(n + 1)$ contenant $P \cap U$.

Preuve. La condition de transversalité implique que les intersections $T_pR \cap H(T_pP)$ sont de dimension $(n + 1)$. On peut donc appliquer le théorème 11 à R au lieu de M et l'on obtient le résultat.

On peut appliquer inductivement le théorème de Cartan-Kähler pour obtenir une variété intégrale admettant un espace E donné de dimension n comme plan tangent en p. Pour ce faire, on a besoin d'un drapeau $0 \subset E_1 \subset ... \subset E_{n-1} \subset E_n = E$ d'éléments intégraux contenus dans E, de telle sorte que l'on puisse appliquer la deuxième version du théorème à chaque étape. On a donc besoin à chaque étape d'une variété restreignante R. C'est précisément ce qui est fait dans la troisième version du théorème, la plus utile pour la suite.

Théorème 13 (Troisième version de Cartan-Kähler)**.** Soit E_k, $0 \leq k \leq n$ un drapeau d'éléments intégraux en p pour un système différentiel analytique, avec $\dim(E_k) = k$, et tel que E_k est Kähler-régulier pour $0 \leq k \leq n-1$. Alors il existe une variété intégrale lisse N de dimension n dont l'espace tangent en p est E_n. De plus, si $c_k = \mathrm{codim} H(E_k)$ pour $0 \leq k \leq n$ et soient $x^1, ..., x^n$ et $y^1, ..., y^s$ des coordonnées locales sur M, centrées en p, choisies de telle sorte que E_k est engendré par $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^k}$ et $H(E_k$ est annulé par $dy^1, ..., dy^{c_k}$. Si N est définie dans ces coordonnées par les équations $y^a = F^a(x^1, ..., x^n)$, $1 \leq a \leq s$, alors N est uniquement déterminée par les données

$$\begin{array}{ll} F^a(x^1, 0, ..., 0) & \text{pour } c_0 < a \leq c_1 \\ F^a(x^1, x^2, 0, ..., 0) & \text{pour } c_1 < a \leq c_2 \\ & ... \end{array}$$

Réciproquement, il existe un N correspondant à ces données si les fonctions F^a sont suffisamment petites.

Preuve. Soit R_1 la variété définie par $x^2 = ... = x^n = 0$ et $y^a = F^a(x^1, 0, ..., 0)$ pour $a > c_0$. Par la version 2 du théorème de Cartan-Kähler, en utilisant $R = R_1$, il existe une unique variété intégrale de dimension 1 contenue dans R_1, contenant p et tangente à E_1 en p. C'est forcément l'intersection de N avec l'ensemble $x^2 = ... = x^n = 0$. On poursuit comme cela en posant R_k la variété définie par $x^{k+1} = ... = x^n = 0$ et $y^a = F^a(x^1, ..., x^k, 0, ..., 0)$ pour $a > c_{k-1}$. Cela construit N de façon unique à partir des données. La condition de transversalité est à chaque fois satisfaite si les F^a sont suffisamment petites.

7.3 Les caractères de Cartan

Pour obtenir un drapeau d'éléments intégraux Kähler-réguliers, a priori, il est nécessaire de calculer la dimension des espaces polaires $H(\tilde{E}_k)$ dans un voisinage de

E_k. Mais le test de Cartan montre que cela n'est pas nécessaire, et qu'il suffit de calculer seulement la dimension des esapces polaires E_k.

Théorème 14 (Test de Cartan)**.** Soit E_k, pour $0 \leq k \leq n$, un drapeau d'éléments intégraux pour $\mathcal{I}$ en p, et soit $c_k = \text{codim } H(E_k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Alors

$$\text{codim}_{E_n} \mathcal{V}_n(\mathcal{I}) \geq c_0 + ... + c_{n-1}.$$

De plus, $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ est lisse de codimension exactement $c_0 + ... + c_{n-1}$ en E_n si et seulement si les E_k sont tous Kähler-réguliers pour $0 \leq k \leq n-1$.

Preuve. Nous ne démontrerons pas ce théorème ici. Le lecteur en trouvera une preuve dans ([1]).

Remarque. C'est précisément ce dernier critère que nous utiliserons pour traiter le problème de la demande de marché : nous appliquerons le théorème 13 après avoir calculé les caractères de Cartan et montré que l'égalité du test de Cartan est vérifiée.

8 Le problème de la demande de marché agrégée

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de la demande de marché agrégée, que l'on résout grâce au théorème de Cartan-Kähler. Ce problème a été résolu par Ekeland et Chiappori dans ([12]) en 1999 sous hypothèse d'analyticité de la fonction considérée.

8.1 Enoncé et reformulations

Enoncé. Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $p \cdot X(p) = n$. Peut-on trouver n fonctions de demande individuelle $x_1(p), ..., x_n(p)$ telles que $X(p) = x_1(p) + ... + x_n(p)$? Les x_i sont chacun solution d'un problème d'optimisation : ils maximisent une fonction d'utilité U_i concave sous contrainte $p \cdot x_i(p) = 1$ et $x_i(p) \geq 0$. On notera par la suite $V^i(p) = U_i(x_i(p))$.

Nous allons reformuler cet énoncé dans le langage du calcul différentiel extérieur, en deux étapes. La première est donnée par la proposition suivante, volontairement très vague.

Proposition 5. L'énoncé ci-dessus se ramène à trouver une décomposition de X sous la forme d'une somme de gradients, sous certaines contraintes de convexité et de positivité.

Preuve. Supposons dans un premier temps que $X(p)$ se décompose sous la forme souhaitée. Par le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange (se référer à l'annexe A), et puisque les contraintes $p \cdot x_i(p)$ sont affines donc automatiquement qualifiées, on peut écrire :

$$\nabla V^i(p) = -\alpha_i(p) x_i(p) \qquad \text{avec } \alpha_i(p) \geq 0$$

donc, en posant $\lambda_i = -1/\alpha_i \geq 0$, on obtient :

$$X(p) = \lambda_1(p) \nabla V^1(p) + ... + \lambda_n(p) \nabla V^n(p) \tag{11}$$

et l'on a de plus les contraintes suivantes sur les λ_i et les V^i :

$$\forall i,\ V_i \text{ est convexe} \qquad \forall i,\ \lambda_i \geq 0, \qquad \forall i,\ p \cdot \nabla V^i(p) = 1/\lambda_i, \tag{12}$$

la dernière équation provenant de l'égalité $p \cdot \nabla V^i(p) = -p \cdot \alpha_i(p) x_i(p) = -\alpha_i = 1/\lambda_i$.

Réciproquement, supposons qu'il existe des fonctions V_i et λ_i satisfaisant les équations (11) et (12). Alors en posant

$$U_i(x) = \min_{p \cdot x \leq 1} V^i(p)$$

et x_i les fonctions de demande associées, on a bien toutes les conditions souhaitées, comme on le vérifie en procédant exactement comme dans la preuve du lemme 1.

La proposition (5) est une première reformulation, mais elle ne sera pas suffisante pour appliquer les théorèmes classiques sur les équations aux dérivées partielles. Nous allons donc traduire l'équation (11) et les contraintes (12) de manière à pouvoir appliquer le théorème de Cartan-Kähler. Nous formulons cela dans une deuxième proposition, à nouveau volontairement très vague.

Proposition 6. L'équation (11) sous contraintes (12) est équivalente à un système d'équations aux dérivées partielles du type "égalité des dérivées croisées" sur une variété de dimension n^2.

Preuve. L'idée consiste à élargir l'espace de travail. On considère :

$$E = \left\{ p, \lambda_1, ..., \lambda_n, \Delta^1, ..., \Delta^n \right\} = \mathbb{R}^{2n+n^2}$$

où Δ^i sera interprété après comme le gradient ∇V^i. Supposons que l'équation (11) soit vérifiée sous les contraintes (12). Alors le graphe de l'application $p \mapsto (\lambda_i(p), \nabla V^i(p))$ est une variété $\mathcal{S}$ sur E (n-dimensionnelle). Il est clair que $\mathcal{S}$ est contenu dans la variété $\mathcal{M}$ de dimension n^2 définie par

$$X(p) = \sum_i \lambda_i \Delta^i \tag{13}$$

$$\forall i, \quad p \cdot \Delta^i = 1/\lambda_i \tag{14}$$

De plus, comme toute fonction $\Delta^i(p)$ est le gradient d'une fonction, elle satisfait la condition d'égalité des dérivées croisées :

$$\forall i, j, k, \quad \frac{\partial \Delta_i^k}{\partial p_j} = \frac{\partial \Delta_j^k}{\partial p_i} \tag{15}$$

et les contraintes de positivité qui correspondent aux contraintes (12).

Réciproquement, si on peut trouver λ_i et Δ^i satisfaisant (13), (14), (15) et les contraintes de positivité, alors chaque Δ^i est le gradient d'une fonction V^i (par le lemme de Poincaré) et les V^i résolvent le problème initial.

Cette proposition montre que l'on doit donc simplement résoudre (15) sur la variété définie par (13) et (14).

Remarque. On peut noter que l'équation (15) peut se réécrire, dans le langage du calcul différentiel extérieur :

$$\forall i, \quad \sum_j d\Delta_j^i \wedge dp_j = 0 \tag{16}$$

Nous cherchons une variété intégrale n-dimensionnelle du système différentiel extérieur (16) sur la variété $\mathcal{M}$.

Le théorème suivant, que l'on démontre à l'aide de Cartan-Kähler, donne alors une condition suffisante pour qu'une fonction soit une fonction de demande de marché agrégée.

Théorème 15. Considérons un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et une fonction analytique $X : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ telle que $p \cdot X(p) = n$. Pour tout $\tilde{p} \in \mathcal{U}$, tout $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $(\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont

$$\tilde{x}_1 + ... + \tilde{x}_n = X(\tilde{p})$$
$$\forall i, \quad \tilde{\lambda}_i > 0,$$

il existe n fonctions $U_1, ..., U_n$, où chaque U_i est définie dans un voisinage convexe $\mathcal{U}_i$ de $\tilde{x}_i$ et est analytique et strictement concave, n fonctions $(x_1, ..., x_n)$ et n fonctions $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, toutes définies dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $\tilde{p}$ et analytiques sur $\mathcal{V}$, telles que, pour tout $p \in \mathcal{V}$ et tous $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned}
p \cdot x_i(p) &= 1 \\
U_i(x_i(p)) &= \max \{U_i(x) \mid x \in \mathcal{U}_i, p \cdot x \leq 1\} \\
\frac{\partial U_i}{\partial x_j}(x_i(p)) &= \lambda_i(p) p_j \\
\sum_{i=1}^n x_i(p) &= X(p) \\
x_i(\tilde{p}) &= \tilde{x}_i \\
\lambda_i(\tilde{p}) &= \tilde{\lambda}_i
\end{aligned}$$

Remarque. Notons qu'à la fois les demandes individuelles et les multiplicateurs de Lagrange peuvent être choisis librement en $\tilde{p}$. En particulier, les contraintes de positivité peuvent être ignorées, puisque l'on peut demander que les demandes individuelles soient positives en $\tilde{p}$, et elles vont alors le rester sur un voisinage de $\tilde{p}$.

Remarque. Dans la preuve, on procèdera en deux temps, suivant un schéma déjà décrit dans les pararaphes qui précèdent : on s'intéressera tout d'abord au problème linéarisé, avant d'appliquer le théorème de Cartan-Kähler. L'existence d'une solution au problème linéarisé est en fait connue depuis longtemps (résultats de Sonnenschein, Diewert et Mantel), mais la preuve qui avait été trouvée ne s'étendait pas au cas non-linéarisé car elle ne permettait pas de calculer les caractères de Cartan nécessaires pour appliquer le théorème de Cartan-Kähler. Dans la preuve donnée ici, nous aurons besoin de calculer *toutes* les solutions du problème linéarisé, car nous aurons besoin de calculer les dimensions des espaces correspondants.

La preuve se décompose en deux étapes : tout d'abord, la résolution du problème linéarisé, et ensuite la résolution du problème général. On pourrait en principe se passer de la première étape, mais certains lemmes qui y sont prouvés sont utilisés dans la seconde. Dans la suite de ce texte, nous ne développons que la première étape, déjà assez complexe. La preuve complète peut être trouvée dans [12].

8.2 Résolution du problème linéarisé

8.2.1 Réduction à une équation matricielle

Soit $\tilde{p} \in \mathcal{M}$. Nous allons linéariser le problème au voisinage de ce point. Choisissons les valeurs de λ_i et $\Delta^i = \nabla V^i(\tilde{p})$ en $\tilde{p}$ arbitrairement, et notons-les $\tilde{\lambda}_i$ et $\tilde{\Delta}^i$. En particulier, choisissons $\tilde{\lambda}_i < 0, \tilde{\Delta}^i < 0$ (ce qui correspondra aux hypothèses de convexité) et $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}^1, ..., \tilde{\Delta}^n)$ inversible. Si ces conditions sont vérifiées en $\tilde{p}$, elles seront aussi vérifiées dans un voisinage par continuité. Elles doivent aussi vérifier les relations suivantes :

$$\sum_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}^i = X(\tilde{p}) \qquad \text{et} \qquad \forall i, \;\; \tilde{p} \cdot \tilde{\Delta}^i = 1/\tilde{\lambda}_i \tag{17}$$

Le lemme suivant exprime alors le problème linéarisé sous forme d'une équation matricielle.

Lemme 11. Résoudre le problème linéarisé revient à trouver des matrices M^i, pour $1 \leq i \leq n$, de taille $n \times n$, solutions du système d'équations matricielles :

$$\nabla X(\tilde{p}) + \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{\Delta}^i = \sum_i \tilde{\lambda}_i M^i - \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{p} \, M^i \tag{18}$$

$${}^t\tilde{p}(\sum_i \tilde{\lambda}_i M^i - \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{p} \, M^i) = 0 \tag{19}$$

Remarque. La notation $\nabla X(\tilde{p})$ désigne la matrice des gradients en $\tilde{p}$ de chacune des composantes de X.

Preuve. Linéarisons λ_i et Δ^i (comme fonctions de p) au voisinage de $\tilde{p}$:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = N_i^j \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \Delta_k^i}{\partial p_j} = M_k^{i,j} \tag{20}$$

Résoudre le problème linarisé consiste à trouver des vecteurs $N_i = (N_i^j)$ et des matrices $M^i = (M_k^{i,j})$ qui satisfont l'équation (15) et les équations qui expriment que $(\lambda_i,\, \Delta_i)$ reste sur la variété $\mathcal{M}$

Cela se traduit par les conditions suivantes :

– Δ^i est le gradient d'une fonction convexe, ce qui implique que

$$\forall i, \;\; M^i \text{ est symétrique positive}$$

– "Les points restent sur la variété". On doit donc prendre la différentielle dans les équations (13) et (14). Pour (13), en utilisant (20), on obtient

$$\frac{\partial X_k}{\partial p_j} = \frac{\partial (\sum_i \lambda_i \Delta_k^i)}{\partial p_j} = \sum_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} \tilde{\Delta}_k^i + \sum_i \tilde{\lambda}_i \frac{\partial \Delta_k^i}{\partial p_j} = \sum_i N_i^j \tilde{\Delta}_k^i + \sum_i \tilde{\lambda}_i M_k^{i,j}$$

ce qui donne

$$\nabla X(\tilde{p}) = \sum_i (\tilde{\Delta}_i {}^t N_i + \tilde{\lambda}_i M^i) \tag{21}$$

Pour (14), on obtient :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Delta}^i + M^i\tilde{p})_k &= \tilde{\Delta}^i_k + \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j M_j^{i,k} = \frac{\partial}{\partial p_k}(\sum_{j=1}^n p_j \Delta^i_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial p_k}(1/\lambda_i) = -\frac{1}{\lambda_i^2}\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \\
&= -\frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2} N_i^k
\end{aligned}$$

donc $\tilde{\Delta}^i + M^i\tilde{p} = -\frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2}N_i$, ou encore, en transposant :

$${}^t N_i = -\lambda_i^2({}^t\tilde{p}M^i + {}^t\tilde{\Delta}^i) \tag{22}$$

On réinjecte enfin (22) dans (21) ce qui donne (18)

$$\nabla X(\tilde{p}) + \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{\Delta}^i = \sum_i \tilde{\lambda}_i M^i - \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{p} \, M^i$$

Puisque $p \cdot X(p) = n$, on a aussi ${}^t\tilde{p}\nabla X(\tilde{p}) = -{}^tX$, ce qui permet d'obtenir, grâce à (13) :

$${}^t\tilde{p}(\nabla X(\tilde{p}) + \sum_i \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\Delta}^i \, {}^t\tilde{\Delta}^i) = -{}^tX + \sum_i \tilde{\lambda}_i \tilde{\Delta}^i = 0$$

ce qui, combiné à l'équation (18), donne l'équation (19).

Réciproquement, on peut "remonter" ces équations : une fois (18) résolu en les M^i, on posera ${}^tN_i = -\lambda_i^2({}^tpM^i + {}^t\Delta^i)$, et M^i et N_i vérifieront alors (21) et (22). Cela termine la preuve du lemme 11.

On peut donc maintenant se concentrer sur les solutions de (18). A priori, il faudrait considérer cette équation sur l'ensemble des matrices symétriques, définies, positives. Cependant, pour des raisons que nous expliciterons lors du calcul des caractères de Cartan, nous considérerons (18) comme une équation sur l'ensemble des matrices $n \times n$. Au vu du lemme 11, il semble naturel d'introduire l'espace suivant :

Notation. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ telles que ${}^tpA = 0$. Par ailleurs, on note $\mathbb{S}$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$. Enfin, à partir de maintenant, pour plus de lisibilité, nous omettrons les tildes de $\tilde{p}, \tilde{\lambda}$ et $\tilde{\Delta}$.

Commençons par étudier les opérateurs Φ et Φ_S définis par :

$$\begin{aligned}
\Phi : (\mathbb{R}^{n^2})^n = \left\{(M^1, ..., M^n) \mid M^i \in \mathbb{R}^{n^2}\right\} &\to \mathbb{A} \\
\Phi(M^1, ..., M^n) &= \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^tp \, M^i
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\Phi_S : \mathbb{S}^n = \Big\{(M^1, ..., M^n) \mid M^i \in \mathbb{S}\Big\} & \to & \mathbb{A} \\ \Phi_S(M^1, ..., M^n) & = & \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \; {}^t\!p \; M^i\end{array}$$

Notons que Φ_S est simplement la restriction de Φ à $\mathbb{S}$. Comme le lemme 11 nous incite à le faire, nous allons maintenant caractériser les noyaux de Φ et Φ_S.

8.2.2 Etude des noyaux de Φ et Φ_S

Commençons par un petit lemme préliminaire.

Lemme 12. Soit (y_i) une famille donnée de n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont toutes non nulles. Alors une famille (z_i) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifie l'égalité $\sum_i (y_i {}^t\!z_i - z_i {}^t\!y_i) = 0$ si et seulement s'il existe une matrice β symétrique telle que pour tout i, on ait $z_i = \sum_s \beta_{i,s} y_s$.

Preuve. Comme les y_i sont linéairement indépendants, il existe une matrice β telle que $\forall i,\ \sum_s \beta_{i,s} y_s$. Alors

$$0 = \sum_i (y_i {}^t\!z_i - z_i {}^t\!y_i) = \sum_{i,s} \beta_{i,s} y_i {}^t\!y_s - \sum_{i,s} \beta_{i,s} y_s {}^t\!y_i$$

donc pour tous i, s on a $\beta_{i,s} = \beta_{s,i}$ puisque les coordonnées des y_i sont non nulles. La réciproque est immédiate.

Lemme 13. $(M^1, ..., M^n) \in \ker \Phi$ (ou $\in \ker \Phi_S$) si et seulement s'il existe une matrice $n \times n$ symétrique $\beta = (\beta_{k,s})$ telle que

$$M^k p = \sum_s \lambda_s^2 \beta_{k,s} \Delta^s, \tag{23}$$

$$\sum_k \lambda_k M^k = \sum_{k,s} \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s} \Delta^k \; {}^t\!\Delta^s \tag{24}$$

Preuve. Nous prouvons le résultat pour Φ_s (la preuve pour Φ est identique). Le noyau est défini comme

$$\ker \Phi_S = \left\{(M^1, ..., M^n) \in \mathbb{S}^n \mid \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \; {}^t\!p \; M^i = 0\right\} \tag{25}$$

En transposant, on obtient

$$\sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 M^i p \; {}^t\!\Delta^i = 0$$

Puis on soustrait ces deux égalités :

$$\sum_i \lambda_i^2 (\Delta^i \; {}^t\!p \; M^i - M^i p \; {}^t\!\Delta^i) = 0$$

Définissons $y_i = \lambda_i^2 \Delta^i$ et $z_i = M^i p$. La relation précédente devient alors :

$$\sum_i (y_i {}^t\!z_i - z_i {}^t\!y_i) = 0$$

Par le lemme qui précède, puisque les coordonnées de Δ^i donc de y_i sont toutes non nulles, on peut donc trouver une matrice symétrique β telle que

$$z_i = M^i p = \sum_s \beta_{i,s} y_s = \sum_s \lambda_s^2 \beta_{i,s} \Delta^s$$

En remplaçant dans l'expression (25), on obtient :

$$\sum_k \lambda_k M^k p = \sum_{k,s} \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s} \Delta^k \, {}^t\Delta^s$$

Ces deux dernières équations sont celles demandées dans l'énoncé.

Lemme 14. Φ_S est surjective de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{A}$.

Preuve. Soit L_1 le sous-espace généré par les membres de droite de (23) et (24) :

$$L_1 = \left\{ (w_1, ..., w_n, W) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{S} \mid \sum_s \lambda_s^2 \beta_{i,s} \Delta^s = w_i \quad \text{et} \quad \sum_{k,s} \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s} \Delta^k \, {}^t\Delta^s = W \right\}$$

On vérifie que l'opérateur $\beta \to (w_1, ..., w_n, W)$ est injectif. En effet, si les w_i sont nuls, alors pour tout i, on a $\sum_s \lambda_s^2 \beta_{i,s} \Delta^s = 0$ donc, puisque la matrice des Δ^i est inversible, on obtient que β est la matrice nulle. L'injectivité de cet opérateur montre que

$$\dim L_1 = \dim \mathbb{S} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Toujours en utilisant (23) et (24), on obtient que

$$\ker \Phi_s = \left\{ (M^1, ..., M^n) \in \mathbb{S}^n \mid (M^1 p, ..., M^n p, \sum_k \lambda_k M^k) \in L_1 \right\}$$

Considérons l'opérateur $G : (M^1, ..., M^n) \to (M^1 p, ..., M^n p, \sum_k \lambda_k M^k)$. Son image est incluse dans le sous-espace L_2 défini par

$$L_2 = \left\{ (w_1, ..., w_n, W) \in \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{S} \mid Wp = \sum_k \lambda_k w_k \right\}$$

Montrons que $L_1 \cap L_2 = L_1$. En effet, si $(w_1, ..., w_n, W) \in L_1$, alors

$$Wp = \sum_{k,s} \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s} \Delta^k \, {}^t\Delta^s p = \sum_{k,s} \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s} \Delta^s \, {}^t\Delta^k p = \sum_{k,s} \lambda_k \lambda_s^2 \beta_{k,s} \Delta^s = \sum_k \lambda_k w_k$$

où la troisième égalité provient de l'égalité ${}^t\Delta^k p = 1/\lambda_k$. Donc $(w_1, ..., w_n, W) \in L_2$ et $L_1 \cap L_2 = L_1$.

Par ailleurs, la définition de L_2 fournit immédiatement que $\dim L_2 = n(n+1)/2 + n^2 - n$. On a donc

$$\operatorname{codim} \ker \Phi_S = \dim L_2 - \dim L_1 = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2} = n^2 - n$$

donc

$$\dim \ker \Phi_S = n \times \frac{n(n+1)}{2} - (n^2 - n) \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} \, \Phi_S = n^2 - n$$

Mais Φ_S envoie $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{A}$, avec $\dim \mathbb{A} = n^2 - n = n(n-1)$. Ceci achève la preuve du lemme.

On peut finalement résumer les résultats dans le lemme suivant :

Lemme 15. Pour toute matrice S telle que ${}^t\!pS = -{}^tX$, il existe n matrices symétriques $(M^1, ..., M^n)$ telles que

$$S + \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\Delta^i = \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\!p \; M^i$$

De plus, l'ensemble des n-uplets vérifiant cette égalité est un espace affine de dimension $\frac{n^2(n+1)}{2} - n(n-1)$.

Le cas de Φ est analogue, à l'exception du fait qu'il faut changer l'espace initial, qui est désormais $(\mathbb{R}^{n^2})^n$ (et donc de dimension n^3) au lieu de $\mathbb{S}^n$ (qui est de dimension $n^2(n+1)/2$). On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 16. Pour toute matrice S telle que ${}^t\!pS = -{}^tX$, il existe n matrices $(M^1, ..., M^n)$ telles que

$$S + \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\Delta^i = \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\!p \; M^i$$

De plus, l'ensemble des n-uplets vérifiant cette égalité est un espace affine de dimension $n^3 - n(n-1)$.

Finissons en trouvant une solution particulière des équations précédentes telle que les matrices $M^1, ..., M^n$ soient définies positives. L'idée clé est de prouver le lemme suivant :

Lemme 17. Il existe n matrices symétriques définies positives $Q^1, ..., Q^n$ telles que

$$(Q^1, ..., Q^n) \in \ker \Phi.$$

Remarque. Si l'on arrive à prouver ce lemme, alors pour tout n-uplet de matrices symétriques satisfaisant

$$S + \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\Delta^i = \sum_i \lambda_i M^i - \sum_i \lambda_i^2 \Delta^i \, {}^t\!p \; M^i$$

et tout scalaire k, $(M^1 + kQ^1, ..., M^n + kQ^n)$ satisfait aussi cette équation et, pour k suffisamment grand, ces matrices sont définies positives. On aura ainsi trouvé ce que l'on cherchait.

Preuve. Reste donc à prouver ce lemme 17. Le lemme 13 donne que, à tout n-uplet $(Q^1, ..., Q^n)$ de matrices symétriques dans le noyau, on peut associer une matrice symétrique β satisfaisant les relations (23) et (24). Pour simplifier les notations, posons

$$P^k = \lambda_k Q^k \quad \text{et} \quad \gamma_{k,s} = \lambda_s^2 \lambda_k^2 \beta_{k,s}$$

Les P^i doivent être négatives puisque $\lambda_i < 0$, et satisfaire les équations

$$P^k p = \sum_s \frac{\gamma_{k,s}}{\lambda_k} \Delta^s = \Delta \Gamma \frac{e_k}{\lambda_k}, \tag{26}$$

$$\sum_k P^k = \sum_{k,s} \gamma_{k,s} \Delta^k \, {}^t\Delta^s = \Delta \Gamma \, {}^t\Delta$$

où e_k est le k-ème vecteur de la base canonique, $\Gamma = (\gamma_{k,s})$, et $\Delta = (\Delta^1, ..., \Delta^n)$.

Comme la matrice Δ est, par hypothèse, inversible, on peut définir Γ^k par

$$P^k = \Delta\Gamma^k\, {}^t\Delta$$

On remarque qu'il y a une correspondance bijective entre Γ^k et P^k et que P^k est symétrique (resp. définie négative) si et seulement si Γ^k est symétrique (resp. définie négative). Enfin, puisque $p \cdot \Delta^k = 1/\lambda_k$ pour tout k, on a ${}^t\Delta p = \sum_i (e_i/\lambda_i)$. On cherche donc, d'après (26) n matrices Γ^k symétriques définies négatives telles que

$$\Gamma^k(\sum_i \frac{e_i}{\lambda_i}) = (\sum_i \Gamma^i)\frac{e_k}{\lambda_k}$$

Montrons que l'on peut supposer $\lambda_k = 1 \forall k$. Supposons que les Γ^k sont solutions du problème précédent avec $\lambda_k = 1$. Définissons $\tilde{\Gamma}^k$ par $\tilde{\gamma}^k_{i,j} = \lambda_i\lambda_j\gamma^k_{i,j}$. Les $\tilde{\Gamma}^k$ sont alors solutions du problème initial, comme on le vérifie directement.

On a alors le problème suivant, à résoudre dans les matrices symétriques définies négatives :

$$\Gamma^k(\sum_i e_i) = (\sum_i \Gamma^i)e_k$$

On peut exhiber un ensemble de solutions particulières, que l'on note $(\Gamma^{(1)1}, ..., \Gamma^{(1)n})$:

$$\Gamma^{(1)1} = \begin{pmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_2 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_3 & \gamma^1_3 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{(1)2} = \begin{pmatrix} \gamma^1_2 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_2 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_3 & \gamma^1_3 & \gamma^1_3 & \cdots & \gamma^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Gamma^{(1)n} = \begin{pmatrix} \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \\ \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma^1_n & \gamma^1_n & \gamma^1_n & \cdots & \gamma^1_n \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont symétriques et satisfont l'équation demandée, et on peut facilement fixer les coefficients pour qu'elles soient négatives. Le seul problème est que seule $\Gamma(1)1$ est définie. La solution est d'obtenir d'autres solutions construites selon le même principe et de sommer à la fin ces solutions. Ainsi, on définit la solution $(\Gamma^{(i)1}, ..., \Gamma^{(i)n})$ par :

$$\Gamma^{(i)1} = \begin{pmatrix} \gamma_1^i & \gamma_1^i & \cdots & \gamma_1^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^i & \gamma_1^i & \cdots & \gamma_1^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \gamma_{i+1}^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_{i+1}^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n^i & \gamma_n^i & \cdots & \gamma_n^i & \gamma_n^i & \cdots & \gamma_n^i \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Gamma^{(i)i} = \begin{pmatrix} \gamma_i^i & \gamma_i^i & \cdots & \gamma_i^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \gamma_i^i & \gamma_{i-1}^i & \cdots & \gamma_{i-1}^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_i^i & \gamma_{i-1}^i & \cdots & \gamma_1^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \gamma_{i+1}^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_{i+1}^i & \gamma_{i+1}^i & \cdots & \gamma_n^i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n^i & \gamma_n^i & \cdots & \gamma_n^i & \gamma_n^i & \cdots & \gamma_n^i \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Gamma^{(1)n} = \begin{pmatrix} \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^1 \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^1 \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \gamma_n^1 & \cdots & \gamma_n^1 \end{pmatrix}$$

Dans cette nouvelle série de solutions, les matrices ont les mêmes propriétés que les $\Gamma^{(1)k}$, à l'exception du fait que seule $\Gamma^{(i)i}$ est définie.

Il suffit alors de prendre

$$\Gamma^k = \sum_i a_i \Gamma^{(i)k}, \quad a_i > 0$$

Ces matrices sont symétriques définies négatives et sont des solutions de l'équation

$$\Gamma^k(\sum_i e_i) = (\sum_i \Gamma^i) e_k$$

On a ainsi achevé la résolution du problème linéarisé.

Pour conclure pour le problème général, il faut alors calculer les caractères de Cartan, comme fait dans[12], et montrer que la condition $c_0+...+c_{n-1} = \frac{1}{2}n^2(n-1)$ est bien vérifiée. Le lecteur se réfèrera à ([12]) pour cette dernière étape de calcul.

A Annexe : Multiplicateurs de Lagrange

Nous présentons brièvement dans cette annexe le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange utilisé à de nombreuses reprises. Nous renvoyons le lecteur à [2] pour une preuve.

On s'intéresse ici à la minimisation de fonctionnelles sur des ensembles du type

$$K = \{v \in H, \phi_i(v) \leq 0, i = 1, ..., N\}$$

où H est un espace de Hilbert donné.

Définition 30. On dit que la contrainte i est active en $u \in H$ dès que $\phi(u) = 0$. On note I_u l'ensemble des i tels que la contrainte i est active en u.

Définition 31. Soit $u \in H$, et I_u l'ensemble des contraintes actives en u. On dit que les contraintes $[\phi_i \leq 0]$ sont qualifiées en $u \in H$ s'il existe un vecteur $h \in H$ tel que

$$\nabla \phi_i(u) \cdot h < 0$$

ou simplement $\nabla \phi_i(u) \cdot h \leq 0$ si ϕ_i est affine, pour tout $i \in I_u$.

Remarque. Si toutes les contraintes sont affines, elles sont automatiquement qualifiées, puisque $h = 0$ convient.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème dit des "multiplicateurs de Lagrange".

Théorème 16. Soit J une fonctionnelle $\mathcal{C}^1$ sur H et u un minimiseur local de J sur K. On suppose que les contraintes sont qualifiées en u. Il existe alors $\lambda_1, ..., \lambda_N \geq 0$ tels que

$$\nabla J(u) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \nabla \phi_i = 0,$$

avec $\phi(u) \cdot \lambda = 0$ (ce qui implique que $\lambda_i = 0$ dès que la contrainte i n'est pas saturée).

Références

[1] A.Ivey and J.M.Landsberg. *Cartan for beginners : Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems.* American Mathematical Society, 2003.

[2] B.Maury. Modélisation. *Cours de l'ENS*, 2016.

[3] Bryant, Chern, Gardner, Goldschmidt, and Griffiths. *Exterior Differential Systems.* Springer, 1991.

[4] E.Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs.* Hermann, 1945.

[5] I. Ekeland. *Exterior Differential Calculus and Applications to Economic Theory.* 1998.

[6] G.Debreu. Excess demand functions. *Journal of Mathematical Economics*, 1, 1974.

[7] K.Siegel. Exterior differential systems. 2014.

[8] L.C.Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1998.

[9] M.Browning and P.Chiappori. Efficient intra-household allocations : A general characterization and empirical tests. *Econometrica*, 66(6), nov 1998.

[10] M.Dunajski. Overdetermined PDEs. 2008.

[11] M.Dunajski. *Solitons, Instantons, and Twistors.* Oxford University Press, 2010.

[12] P.Chiappori and I.Ekeland. Aggregation and market demand : An exterior differential calculus viewpoint. *Econometrica*, 67(6), nov 1999.

[13] R.Mantel. On the characterization of aggregate excess demand. *Journal of Economic Theory*, 7, 1974.

[14] V.I.Arnold. *Mathematical methods of Classical Mechanics.* Springer, 1989.