Relativité générale, toujours plus générale

Xavier Lachaume

sous la direction d'Emmanuel Humbert et de Loïc Villain
Laboratoire de mathématiques et de physique théorique
Université de Tours

Octobre 2013

Introduction au domaine de recherche

Table des matières

Introduction

La théorie de la Relativité Générale est une modélisation des liens entre matière et gravitation à travers des équations reliant des objets géométriques. Ces équations ont des conséquences nécessaire, des *contraintes* imposées aux objets. La première partie de ce rapport présentera les contraintes que les équations d'Einstein, qui portent sur un espace-temps, exercent sur les hypersurfaces de genre espace, en particulier leur interprétation en terme de problème de Cauchy.

Dans un deuxième temps, nous exposerons les résultats de résolution du problème de Cauchy et des équations de contrainte, en nous appuyant principalement sur l'article de R. Bartnik et J. Isenberg [1]. Si la solution théorique au problème de Cauchy est connue depuis les années 1950, la recherche concernant les méthodes de résolution des équations de contrainte est encore active, cf. [2].

La troisième partie se penchera sur la formulation lagrangienne des équations de champ et des équations de contrainte d'Einstein, et sur la formulation hamiltonienne de leur évolution dans le temps. Cette formulation hamiltonienne, baptisée ADM, est issue des efforts menés dans les années 1960 et encore bien d'actualité aujourd'hui pour concilier la Relativité Générale et des théories de la matière comme la théorie quantique des champs. Enfin nous étudierons les théorèmes de D. Lovelock, [3] et [4] qui imposent une forte contrainte aux équations d'Einstein elles-mêmes. Il y sera montré que sous certaines conditions, celles-ci sont les seules équations de champ qui aient un sens physique. La généralisation de ce résultat en dimensions supérieures permet de développer les théories $f(R)$, cf. [5], qui explorent les différentes formes que peut prendre une théorie de la gravitation à travers sa formulation lagrangienne.

1 Les équations de contrainte d'Einstein

1.1 Le problème de Cauchy

1.1.1 en physique classique

Le temps, dans la physique classique, est considéré comme une variable indépendante des référentiels et des objets étudiés. Il s'écoule, régulièrement, dans une seule direction, comme extérieur au problème. Il permet donc de *paramétrer* les événements et les quantités : si l'on considère un laps de temps $[t_1, t_2]$ durant lequel une quantité f évolue dans un espace E, alors à un instant $t \in [t_1, t_2]$, on peut associer la valeur de la quantité à cet instant : $f(t)$. On définit ainsi une application $f : [t_1, t_2] \to E$. Si f se situe au sein d'un système de mesure (distance, volume, poids, température...), E peut être vu comme une sous-partie de $\mathbb{R}^n$. L'évolution d'une quantité dans le temps est ainsi décrite par des fonctions de la variable réelle.

En général, l'étude d'un phénomène physique se limite à celle de quantités que l'on peut décrire par des fonctions réelles (ou complexes). La modélisation du phénomène consiste alors en un ensemble d'équations liant ces fonctions. Lorsque les variations temporelles des quantités sont impliquées dans le phénomène, des équations différentielles par rapport à la variable t apparaissent dans le modèle.

La présence de ces équations différentielles pose la question suivante, nommée *problème de Cauchy* : étant données les valeurs des quantités modélisées à un instant initial t_0, les équations différentielles déterminent-elles de façon unique l'évolution de ces quantités dans le temps, au moins sur un voisinage de t_0 ? Y a-t-il au moins une solution ? Au plus ? Que doivent vérifier les quantités en t_0 pour que le problème de Cauchy admette localement une et une seule solution ?

1.1.2 en Relativité Générale

La théorie de la Relativité Générale a ceci de particulier par rapport aux autres théories physiques qu'elle considère le temps lui-même comme une des quantités étudiées dans un phénomène. Plus encore, elle le lie géométriquement aux quantités spatiales, fondant la donnée temporelle et les trois données spatiales en une variété réelle de dimension 4. Le temps n'est plus défini de façon unique, mais dépend de la façon dont on parcourt cette variété ; les équations différentielles ordinaires de fonctions de t deviennent des équations aux dérivées partielles de fonctions définies sur la variété. Le problème de Cauchy dans sa formulation précédente n'a plus réellement de sens : qu'est-ce qu'un instant initial ?

Dans la partie qui va suivre, nous présenterons une partie de l'article *The Constraint Equations* de Robert Bartnik et James Isenberg [1]. Il y est prouvé, en reprenant principalement les travaux d'Yvonne Choquet-Bruhat [6] des années 1950, que si une 3-variété satisfait à certaines équations, nommées *équations de contrainte d'Einstein*, alors elle peut être plongée dans une 4-variété vérifiant les équations de la Relativité Générale et dont elle constitue une donnée initiale, en un sens à préciser. Ce résultat fondamental permet de construire et d'étudier, y compris numériquement, des espaces-temps d'Einstein, et s'avère d'une importance majeure dans la modélisation des phénomènes astrophysiques.

1.2 Obtention des équations de contrainte

La stratégie employée pour obtenir ces équations consiste à prendre un espace-temps d'Einstein, ie. vérifiant les équations de la Relativité Générale, et à déterminer les contraintes impliquées par ces équations sur les hypersurfaces de genre espace ; on pourra en un sens considérer ces hypersurfaces comme des données initiales d'un problème de Cauchy. Nous présentons ici cette première étape, qui établit donc des conditions *nécessaires* à remplir par une hypersurface candidate à être une donnée initiale.

1.2.1 Définitions

Comme nous l'avons dit précédemment, un espace-temps d'Einstein peut être modélisé par une 4-variété V (que nous supposerons lisse) munie d'une métrique lorentzienne g, ie. de signature $(-1, +1, +1, +1)$. Nous adopterons la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Les lettres grecques désigneront les indices variant de 0 à 3, les lettres latines de 1 à 3.

Définition 1.1. Pour $x \in V$, un vecteur $v \in T_xV$ tangent à V en x est dit :
- de genre *temps* si $g(v, v) < 0$;
- de genre *espace* si $g(v, v) > 0$;
- de genre *lumière* si $g(v, v) = 0$.

Une *hypersurface* de V est une sous-variété $M \hookrightarrow V$ de codimension 1. Elle est dite de genre *espace*, ou *spatiale*, si la métrique induite $\gamma := i^*g$ (où $i : M \hookrightarrow V$) est riemannienne, ie. définie positive.

On peut montrer facilement qu'une sous-variété $M \hookrightarrow V$ est de genre espace si et seulement si en chaque point $m \in M$, il existe un vecteur unitaire $n \in T_mV$, normal à M et de genre temps. On peut alors décomposer

$$TV = TM \overset{\perp}{\oplus}_g \mathbb{R}n.$$

En chaque point de V, le cône de lumière de g peut être scindé en deux cônes convexes. Nous supposerons dans la suite que V est temporellement *orientable*, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir cette scission continûment sur V. Les cônes convexes de g peuvent alors être répartis continûment en deux ensembles, baptisés arbitrairement *passé* et *futur*. Tout vecteur de type temps appartient à l'un de ces deux ensembles ; on peut également dire que pour tout vecteur de type temps, son opposé ou lui-même pointe vers le futur. En chaque point de V, on choisira le vecteur n décrit dans le paragraphe précédent dirigé vers le futur, quitte à prendre son opposé.

1.2.2 Fibrations de l'espace-temps

Définition 1.2. On note L la dérivée de Lie sur V, D la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g sur V, et ∇ la connexion associée à γ sur M. La *connexion* associée à une métrique peut être vue comme la dérivée qui se comporte le plus simplement possible envers cette métrique. Elle est parfois nommée *dérivée covariante*, car elle varie de la même façon que ("co = avec") les coordonnées.

On utilisera par exemple les résultats suivants : soient X, Y, Z trois champs de vecteurs sur V.

$$X.g(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ) \tag{1}$$

$$D_XY - D_YX = [X, Y] = L_XY \tag{2}$$

$$(L_Xg)(Y, Z) = g(D_YX, Z) + g(Y, D_ZX) \tag{3}$$

Dans la suite, l'idée est de "découper" l'espace-temps de dimension 4 selon $4 = 3 + 1$, et de décomposer la connexion D sous l'effet de ce découpage. Plus précisément, si X et Y sont des champs de vecteurs sur TM, un résultat de géométrie riemannienne nous permet de les considérer comme des vecteurs de TV, et de décomposer $D_XY \in TV$ en :

$$D_XY = \nabla_XY + K(X, Y)n$$

où K est une forme bilinéaire sur M, appelée *seconde forme fondamentale* ou *courbure extrinsèque*. On peut montrer que K est un tenseur symétrique, ie. $K(X, Y) = K(Y, X)$, et que

$$K(X, Y) = g(D_Xn, Y).$$

Définition 1.3. Une fonction $t \in \mathcal{C}^1(V)$ est une *fonction temps* si son gradient est en tout point un vecteur de type temps.

Une fonction temps t est *adaptée* à une hypersurface M si M est une courbe de niveau de t, ie. $M = t^{-1}(t_0)$ où $t_0 \in \mathbb{R}$. Si l'on munit M de cooordonnées locales x, on obtient alors des coordonnées locales de V : (t, x). Le vecteur n se décompose dans la base de TV formée par $(\partial_t = \partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_\mu)_{\mu=0..3}$: il existe N et X^i dans $\mathcal{C}^\infty(V)$, N ne s'annulant pas, tels que

$$n = N^{-1}(\partial_t - X^i \partial_i).$$

N est appelée fonction de *lapse* et $X := X^i \partial_i$ vecteur de *shift*. On a donc

$$\partial_t = Nn + X.$$

Remarquons que les $(\partial_i)_{i=1..3}$ forment une base de TM : $X \in TM$, donc en particulier X est de genre espace en tout point.

Proposition 1.4. Dans les coordonnées locales introduites précédemment, en calculant les différentes valeurs de g sur la base ∂_μ, on peut exprimer la métrique spatio-temporelle g en fonction du lapse et du shift, et de la métrique spatiale γ :

$$g = -N^2 \,\mathrm{d}t^2 + \gamma_{ij}(\mathrm{d}x^i + X^i \,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + X^j \,\mathrm{d}t).$$

On en déduit cette écriture de la seconde forme fondamentale :

$$K_{ij} = K(\partial_i, \partial_j) = \tfrac{1}{2} N^{-1}(\partial_t \gamma_{ij} - L_X \gamma_{ij})$$

où

$$L_X \gamma_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.$$

L'évolution selon ∂_t de la métrique spatiale γ peut donc s'écrire

$$\partial_t \gamma_{ij} = 2NK_{ij} + L_X \gamma_{ij}. \tag{4}$$

1.2.3 Équations de Gauss, Codazzi et Mainardi

Définition 1.5. On appelle *courbure* de la variété V le tenseur de rang 4 défini par

$$\mathrm{Riem}^V(X, Y, Z, W) = g((D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})Z, W)$$

pour $X, Y, Z, W \in TV$. Il s'agit du *tenseur de Riemann.*

À travers la décomposition $D = \nabla + K$, toutes les composantes du tenseur de Riemann sur V peuvent être exprimées en fonction de données intrinsèques à M, comme sa propre courbure, et de la seconde forme fondamentale K.

Proposition 1.6. Si $X, Y, Z, W \in TM$, de simples calculs, plus ou moins longs mais ne faisant pas intervenir de résultats particulièrement puissants, aboutissent aux équations suivantes.

- L'*équation de Gauss*, reliant la courbure extrinsèque, la courbure intrinsèque, et la seconde forme fondamentale :

  $$\mathrm{Riem}^V(X, Y, Z, W) = \mathrm{Riem}^M(X, Y, Z, W) + K(X, W)K(Y, Z) - K(X, Z)K(Y, W).$$

  Cette équation s'écrit en formulation indicielle, les ∂_i formant une base de TM,

  $$\boxed{\mathrm{Riem}^V_{ijkl} = \mathrm{Riem}^M_{ijkl} + K_{il}K_{jk} - K_{ik}K_{jl}.} \tag{5}$$

– L'*identité de Codazzi* :

$$\mathrm{Riem}^V(X,Y,n,Z) = \nabla_X K(Y,Z) - \nabla_Y K(X,Z), \tag{6}$$

où $(\nabla_X K)(Y,Z) := X.K(Y,Z) - K(\nabla_X Y, Z) - K(Y, \nabla_X Z)$ est la dérivée covariante sur M du tenseur K. En notation indicielle :

$$\boxed{\mathrm{Riem}^V_{ijnk} = K_{jk;i} - K_{ik;j}.}$$

– L'*équation de Mainardi* :

$$\mathrm{Riem}^V(Y,n,n,Z) = -L_n K(Y,Z) + K^2(Y,Z) + N^{-1}\,\mathrm{Hess}(N)(Y,Z), \tag{7}$$

– où $K^2(Y,Z) := K^2_{ij} Y^i Z^j = K^k_i K_{jk} Y^i Z^j$,
– $\mathrm{Hess}(N) := \nabla^2 N$ est la Hessienne de N pour ∇,
– et $(L_n K)(Y,Z) := n.K(Y,Z) - K(Y, L_n Z) - K(L_n Y, Z)$ est la dérivée de Lie du tenseur K.

En notant $N_{|ij} = \nabla^2 N_{ij}$, l'équation de Mainardi a pour forme indicielle

$$\boxed{\mathrm{Riem}^V_{innj} = -L_n K_{ij} + K^k_i K_{jk} + N^{-1} N_{|ij}.}$$

Ces relations permettent de calculer Riem^V sur tout TV en décomposant chaque vecteur sur $TV = TM \overset{\perp}{\oplus}_g \mathbb{R}n$, et en changeant éventuellement la position du ou des indices n dans Riem^V pour se ramener aux expressions calculées dans les équations de Gauss, Codazzi et Mainardi.

1.2.4 Formulation des équations de contrainte

Définition 1.7. À partir du tenseur de courbure Riem, on définit les tenseurs suivants, qui sont différentes façons de considérer la courbure de la variété :
– Le *tenseur de Ricci*, $\mathrm{Ric}_{\mu\nu} := \mathrm{Riem}_{\mu\alpha}{}^{\alpha}{}_{\nu}$.
– Le *tenseur de courbure scalaire*, $\mathrm{R} := \mathrm{Ric}_{\alpha}{}^{\alpha} = \mathrm{Riem}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}$.
– Le *tenseur d'Einstein*, $G_{\mu\nu} := \mathrm{Ric}^V_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\mathrm{R}^V g_{\mu\nu}$.

Proposition 1.8. En injectant les équations de la proposition 1.6, on déduit de quelques calculs :

$$(i) \qquad 2G_{nn} = \mathrm{R}^M + \kappa^2 - \|K\|^2$$

$$(ii) \qquad G_{in} = K^j_{i;j} - K^j_{j;i},$$

où $\kappa := \mathrm{tr}_\gamma K = K^i_i$.

Combinons maintenant ces relations avec les *équations de champ d'Einstein* ; ce sont les équations de la Relativité Générale, celles qui relient la courbure de l'espace-temps, représentée par $G_{\mu\nu}$, au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{8}$$

On obtient alors, par le biais de $G_{\mu\nu}$, des contraintes sur γ et K. Ce sont les *équations de contrainte d'Einstein*.

Théorème 1.9 (Équations de contrainte d'Einstein)**.**

$$\mathrm{R}^M + \kappa^2 - \|K\|^2 = 16\pi T_{nn}, \tag{9}$$

$$K^j_{i;j} - K^j_{j;i} = 8\pi T_{in}. \tag{10}$$

Étant donnée la façon dont nous les avons obtenues, il s'agit de conditions *nécessaires* que doit vérifier une sous-variété M munie de (γ, K) pour pouvoir être une hypersurface de genre espace d'un espace-temps vérifiant les équations d'Einstein (8). Nous discuterons dans la prochaine partie de leur caractère *suffisant*.

2 Résolutions

2.1 Résolution du problème de Cauchy

Définition 2.1 (cf. [7] et [1]). Une *donnée initiale* est un triplet (M, γ, K) où M est une 3-variété, γ une métrique riemannienne et K un 2-tenseur symétrique sur M.

Un *développement* d'une donnée initiale est un espace-temps (V, g) tel que $i : M \hookrightarrow V$, $\gamma = i^*g$, et K est la seconde forme fondamentale de $i(M) \subset V$. Il est dit *d'Einstein* si g vérifie les équations d'Einstein. Le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein est dit *bien posé* si pour tout choix d'une donnée initiale suffisamment régulière, il en existe un développement d'Einstein, et si l'application associant la donnée à son développement est continue.

Il a été montré par Y. Choquet-Bruhat dans [6] le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.2. *Le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide est bien posé.*

Ces équations s'écrivent simplement $\mathrm{Ric}^V(g) = 0$. L'idée de la preuve consiste à perturber ce système, qui est quasi-linéaire mais non hyperbolique, afin de le rendre *hyperbolique*. En effet, un système hyperbolique d'EDP peut être vu comme la propagation à vitesse finie d'une donnée initiale, et se comporte bien sous le problème de Cauchy. L'équation perturbée est de la forme $\mathrm{Ric}^V(g) + \frac{1}{2}L_W g = 0$, avec $L_W g_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu + D_\nu W_\mu$, et se résout facilement.

On peut alors montrer qu'un choix judicieux des conditions initiales implique que W s'annule le long de leur développement. Plus précisément, donnons-nous une structure géométrique (M, γ, K) obéissant aux équations de contrainte dans le vide (9) et (10), ainsi qu'un lapse et un shift $g_{0\nu}$ arbitraires, à la seule condition que M soit de genre espace pour $g_{\mu\nu}(0)$. Alors, on peut choisir $\partial_t g_{0\nu}$ de sorte que W s'annule en tout temps. On a donc construit un développement d'Einstein de M : le problème de Cauchy est bien posé, les équations de contrainte sont *suffisantes*.

REMARQUE 1. Deux précisions sont ici utiles à apporter.
- Les valeurs *initiales* de lapse et de shift, $g_{0\nu}$, sont arbitraires. On peut cependant montrer que les développements issus de la même donnée (γ, K), mais pour des lapses et shifts différents, sont égales (dans des systèmes de coordonnées à préciser) sur un voisinage de M.
- Il n'est en revanche pas possible d'imposer en général, de façon arbitraire, le lapse et le shift en tout temps, $g_{0\nu}(t)$, qui sont déterminés par la résolution des équations perturbées.

2.2 Résolution des équations de contrainte

Revenons maintenant aux équations de contrainte elles-mêmes, (9) et (10), et décrivons une méthode employée pour les résoudre, la méthode dite *conforme*. Rappelons-les :

$$\mathrm{R}^M + \kappa^2 - \|K\|^2 = 16\pi T_{nn},$$
$$K^j_{i;j} - K^j_{j;i} = 8\pi T_{nn}.$$

Prenons le cas du vide, $T_{nn} = T_{ni} = 0$. Ces quatre équations ont douze inconnues : (γ, K), deux 2-tenseurs symétriques. L'idée de la méthode conforme est de diviser ces données entre des données *libres* (conformes), et des données *déterminées*. Le problème se ramènera alors à la résolution d'un système déterminé d'EDP elliptiques pour les données contraintes, étant imposé l'ensemble arbitraire des données libres.

Nous présenterons ici deux méthodes conformes, nommées historiquement A et B, pour lesquelles les données sont divisées de façon similaire :

(i) Données libres
- λ_{ij}, une métrique riemannienne, déterminée à un facteur près. On notera ∇' sa connexion de Levi-Civita, Δ' son laplacien, R' son tenseur de courbure scalaire.
- σ_{ij}, un 2-tenseur symétrique de trace et de divergence nulle ($\nabla'^i\sigma_{ij} = 0$ et $\lambda^{ij}\sigma_{ij} = 0$).

– τ, un champ scalaire.

(ii) Données déterminées
– ϕ, un champ scalaire strictement positif.
– W^i, un champ vectoriel.

2.2.1 Méthode A

Également appelée « semi-decoupling split ». Elle consiste à imposer aux données déterminées les quatre équations suivantes :

$$\nabla'_i(L'W)^i_j = \tfrac{2}{3}\phi^6\nabla'_j\tau \tag{11}$$
$$\Delta'\phi = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{R}'\,\phi - \tfrac{1}{8}(\sigma^{ij}+L'W^{ij})(\sigma_{ij}+L'W_{ij})\phi^{-7} + \tfrac{1}{12}\tau^2\phi^5, \tag{12}$$

avec L' l'*opérateur de Killing conforme*, défini par

$$(L'W)_{ij} = \nabla'_iW_j + \nabla'_jW_i - \tfrac{2}{3}\lambda_{ij}\nabla'_kW^k.$$

On construit ensuite γ et K à partir des données libres et déterminées :

$$\gamma_{ij} = \phi^4\lambda_{ij}$$
$$K_{ij} = \phi^{-2}(\sigma_{ij}+L'W_{ij}) + \tfrac{1}{3}\phi^4\lambda_{ij}\tau.$$

2.2.2 Méthode B

Aussi nommée « conformally covariant split ». Le principe est identique, les équations changent :

$$\nabla'_i(L'W)^i_j = \tfrac{2}{3}\nabla'_j\tau - 6(L'W)^i_j\nabla'_i\ln\phi \tag{13}$$
$$\Delta'\phi = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{R}'\,\phi - \tfrac{1}{8}\sigma^{ij}\sigma_{ij}\phi^{-7} - \tfrac{1}{4}\sigma^{ij}(L'W)^{ij}\phi^{-1} + \tfrac{1}{12}(\tau^2 - (L'W)^{ij}(L'W)_{ij})\phi^5, \tag{14}$$

Puis

$$\gamma_{ij} = \phi^4\lambda_{ij}$$
$$K_{ij} = \phi^{-2}\sigma_{ij} + \phi^4L'W_{ij} + \tfrac{1}{3}\phi^4\lambda_{ij}\tau.$$

2.2.3 Discussion

Le nom de méthode « conforme » provient du lien entre γ et λ : deux métriques sont dites *conformes* lorsqu'elles sont égales à la multiplication près par un champ scalaire strictement positif. En définissant γ et K comme dans la méthode A (respectivement B), les équations (11) et (12) (respectivement (13) et (14)) sont équivalentes aux équations de contrainte (9) et (10). Les calculs qui le prouvent utilisent les relations entre connexions, symboles de Christoffel et courbures scalaires pour deux métriques conformes.

L'avantage de la méthode A est de supprimer la dépendance de $L'W$ en ϕ dans (11) lorsque τ est choisi constant. Les efforts se concentrent alors sur (12), baptisée *équation de Lichnerowicz*. La méthode B présente d'autres intérêts, comme celui de rendre équivalentes l'existence de solution pour des données libres $(\lambda_{ij}, \sigma_{ij}, \tau)$ et pour $(\theta^4\lambda_{ij}, \theta^{-2}\sigma_{ij}, \tau)$. La première méthode reste cependant la plus utilisée, étant la mieux connue mathématiquement.

Le champ de l'étude des solutions aux équations de contrainte, en particulier à travers la méthode conforme, est vaste et encore ouvert aujourd'hui. Par exemple, il a été montré dans [2] en 2010 que certaintes conditions impliquant l'existence de solutions sont respectées par un ensemble dense de métriques g, et ainsi que l'ensemble des solutions est plus vaste qu'on ne le croyait.

3 De la formulation lagrangienne à la théorie de Lovelock

3.1 La dynamique des équations de contrainte

Les équations de contrainte correspondent à quatre des dix équations d'Einstein. Les six autres, $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$, décrivent quant à elles l'évolution des données (γ, K) au sein d'un espace-temps d'Einstein. Cette dynamique peut être vue comme dérivant de la formulation hamiltonienne de la Relativité Générale. Le formalisme hamiltonien, initialement développé dans la quête d'une théorie de la gravitation compatible avec la mécanique quantique, a été baptisé « ADM », en l'honneur du travail pionnier d'Arnowitt, Deser et Misner dans les années 1960 [8], et est basé, dans le cas du vide $T_{\mu\nu} = 0$, sur l'étude de *l'action d'Einstein-Hilbert* :

$$\mathcal{S}_G[g] = \int_V \mathrm{R}^V[g] \, \mathrm{d}v_V.$$

Proposition 3.1. Les équations d'Einstein dans le vide dérivent de l'action $\mathcal{S}_G$. C'est-à-dire qu'une métrique vérifiant les équations d'Einstein est une extrémale de la fonctionnelle $\mathcal{S}_G[g]$.

La preuve, accessible (cf. [9]), fait intervenir un peu de théorie des perturbations. Elle consiste à montrer que

$$\frac{\delta \mathcal{S}_G}{\delta g^{\mu\nu}} = \int \sqrt{-g} \left(\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathrm{R} \, g_{\mu\nu} \right) \mathrm{d}^4 x.$$

Remarque 2. L'action correspondant aux équations avec un tenseur d'énergie-impulsion non nul aura pour forme $\mathcal{S} = \mathcal{S}_G + \alpha_M \mathcal{S}_M$, avec $\mathcal{S}_M$ l'intégrale d'action de la théorie de la matière que l'on considère (électromagnétisme, Klein-Gordon…) et α_M une constante de normalisation.

L_G est la densité du *lagrangien* associé aux équations d'Einstein. Cette formulation *lagrangienne* est spatio-temporellement covariante : elle ne fait intervenir que des quantités tensorielles. Cependant, lui associer sa formulation *hamiltonienne* canonique nécessite tout d'abord un choix de fonction temps, et donc une rupture temps/espace. Une fois cette fonction temps t précisée, en notant $\dot{f} = \partial_t f$, on définit le moment conjugué à la variable d'état $g_{\mu\nu}$:

$$\pi^{\mu\nu} := \frac{\delta L_G}{\delta \dot{g}_{\mu\nu}}.$$

La formulation ADM de la Relativité Générale consiste alors en l'étude du hamiltonien

$$\mathcal{H}_{ADM} := \int_M (\pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - L_G) =: \int_M H_{ADM}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange nous donnent en particulier l'évolution de (γ, π) dans le temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \gamma_{ij} = \frac{\partial H_{ADM}}{\partial \pi^{ij}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pi^{ij} = -\frac{\partial H_{ADM}}{\partial \gamma_{ij}}.$$

3.1.1 Conservation des contraintes

Si $(\gamma(0), K(0))$ est une donnée initiale vérifiant les équations de contrainte dans le vide, il est légitime de se demander si l'évolution dans le temps de cette donnée $(\gamma(t), K(t))$ pour un lapse et un shift donnés se comporte de même. La réponse est positive, et utilise des résultats sur les EDP hyperboliques.

Cependant, l'un des intérêts de cette formulation dynamique est de permettre une simulation numérique de l'évolution dans le temps d'une donnée initiale ; et si l'on effectue ce calcul numériquement, avec la quantité d'erreurs que cela implique, on s'aperçoit que la trajectoire quitte bien vite l'ensemble des couples (γ, K) qui vérifient les équations de contrainte, et en diverge exponentiellement.

3.2 Les théorèmes de Lovelock

La formulation lagrangienne que nous venons d'introduire fait apparaître le caractère central du tenseur de courbure scalaire R dans la théorie de la gravitation. Nous allons maintenant présenter les résultats de D. Lovelock datant des années 1970, cf. [3] et [4], portant sur les formes que peut prendre ce scalaire. Il s'agit d'abord de constater que le tenseur d'Einstein, $G_{\mu\nu}$, obéit à quatre contraintes :

(a) il est symétrique : $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$;

(b) il ne dépend que de la métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses deux premières dérivées :
$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}; \partial_\gamma g_{\alpha\beta}; \partial^2_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta})$;

(c) il est de divergence nulle : $D^\nu G_{\mu\nu} = 0$;

(d) il est linéaire en $\partial^2 g_{\mu\nu}$;

puis de s'interroger sur l'ensemble des tenseurs qui vérifient ces contraintes : $G_{\mu\nu}$ est-il le seul ?

Des travaux de Cartan ou Weyl et Vermeil (cf. bibliographie de [3]) indiquent que les tenseurs remplissant ces quatre conditions sont nécessairement de la forme

$$A_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}. \tag{15}$$

Les équations d'Einstein dans le vide appliquées à ce tenseur général, $A_{\mu\nu} = 0$, deviennent alors les équations d'Einstein classiques (ie. appliquées au tenseur d'Einstein) dans le vide *avec constante cosmologique* : $G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Cette formulation est donc la plus générale qui satisfasse (a, b, c, d). On peut y voir une forme d'unicité des équations d'Einstein : ce sont les seules équations qui aient du sens en impliquant un tenseur vérifiant (a, b, c, d).

Définition 3.2. Dans la suite,

- Nous formulerons des résultats pour toute dimension : la variété lorentzienne que nous étudierons aura pour dimension n.
- Nous ne distinguerons plus les indices 0 et 1..3 : les caractères tant latins que grecs désigneront les indices parcourant $1..n$.
- La dérivée partielle d'un tenseur T selon x^i sera notée $T_{,i} := \partial_i T$, la dérivée covariante $T_{|i} := D_i T$.
- Les tenseurs de Riemann, de Ricci et de courbure scalaire seront tous trois notés R, le nombre d'indices écrits les distinguera.
- On définit enfin le symbole de Kronecker généralisé par :

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_N}_{j_1 j_2 \dots j_N} := \det \begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \dots & \delta^{i_1}_{j_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_N}_{j_1} & \dots & \delta^{i_N}_{j_N} \end{pmatrix}.$$

Les deux théorèmes de Lovelock permettent de renforcer l'unicité des équations d'Einstein, en affaiblissant les contraintes nécessaires pour obtenir un tenseur de la forme (15).

3.2.1 Premier théorème

Les théorèmes de Lovelock sont des corollaires du résultat fondamental suivant, démontré dans [10] :

Proposition 3.3. Le tenseur A^{ij} le plus général satisfaisant (a), (b) et (c) est de la forme

$$A^{ij} = \sum_{p=1}^{m-1} \left(c_p \theta^{ij;i_1 i_2 \dots i_{4p-1} i_{4p}} \prod_{t=1}^{p} \mathrm{R}_{i_{4t-1} i_{4t-3} i_{4t-2} i_{4t}} \right) + ag^{ij}, \tag{16}$$

où $m := \lceil n/2 \rceil$, a et c_p sont des constantes, et les $\theta^{ij;i_1 i_2 \dots i_{4p-1} i_{4p}}$

(*i*) ne dépendent que de g_{ab} : $\theta^{ij;i_1 i_2 \ldots i_{4p-1} i_{4p}} = \theta^{ij;i_1 i_2 \ldots i_{4p-1} i_{4p}}(g_{ab})$;

(*ii*) sont symétriques en i et j, ainsi qu'en i_{2t-1} et i_{2t} pour $1 \leq t \leq 2p$;

(*iii*) sont symétriques sous l'échange de la paire (i, j) avec une paire (i_{2t-1}, i_{2t}) quelconque, $1 \leq t \leq 2p$;

(*iv*) satisfont l'identité cyclique à somme nulle pour toute permutation circulaire de trois des quatre indices $(i, j, i_{,2t-1}, i_{2t})$:

$$\theta^{\mathbf{ij};\mathbf{i_1} i_2 \ldots i_{4p-1} i_{4p}} + \theta^{\mathbf{j i_1};\mathbf{i} i_2 \ldots i_{4p-1} i_{4p}} + \theta^{\mathbf{i_1 i};\mathbf{j} i_2 \ldots i_{4p-1} i_{4p}} = 0.$$

De plus, les tenseurs vérifiant (i, ii, iii, iv) sont déterminés à une constante multiplicative près.

Le premier théorème et les propositions qui le suivent sont énoncés dans [3].

Théorème 3.4 (Premier théorème de Lovelock)**.** *Les seuls tenseurs A respectant* (*a*), (*b*) *et* (*c*) *sont les*

$$A^i_j = \sum_{p=1}^{m-1} \left(a_p \delta^{i i_1 \ldots i_{2p}}_{j j_1 \ldots j_{2p}} \prod_{t=1}^{p} \mathrm{R}_{i_{2t-1} i_{2t}}{}^{j_{2t-1} j_{2t}} \right) + a\delta^i_j, \tag{17}$$

où a et les a_p sont des constantes arbitraires.

Corollaire 3.5. Pour $n = 4$, les seuls tenseurs vérifiant (*a*), (*b*) et (*c*) sont de la forme

$$A^{ij} = aG^{ij} + bg^{ij}.$$

La condition (*d*), qui semblait pourtant bien exigeante, n'est donc pas nécessaire : les trois premières suffisent à contraindre A^{ij}. Par ailleurs, le théorème 3.4 permet également de relier l'expression de A^{ij} à celle d'un lagrangien :

Corollaire 3.6. Si A^{ij} est donnée par l'équation (17), alors $\sqrt{g}A^{ij}$ est la variable d'état du lagrangien

$$L := \sqrt{g} \sum_{p=1}^{m-1} \left(2a_p \delta^{i_1 \ldots i_{2p}}_{j_1 \ldots j_{2p}} \prod_{t=1}^{p} \mathrm{R}_{i_{2t-1} i_{2t}}{}^{j_{2t-1} j_{2t}} \right) + 2a\sqrt{g}.$$

Remarque 3. Pour $n = 4$, on retrouve le résultat de la proposition 3.1 :

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{g} 2a_1 \delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \mathrm{R}_{i_1 i_2}{}^{j_1 j_2} + 2a\sqrt{g} \\ &= \sqrt{g}(\alpha \mathrm{R} + \beta). \end{aligned}$$

3.2.2 Deuxième théorème

Le prochain résultat, énoncé dans [4], est un raffinement du premier. Parmi les quatre conditions (a, b, c, d) que vérifient le tenseur d'Einstein et dont nous venons de prouver que la dernière est superflue, nous pouvons montrer que pour $n = 4$, la première l'est également.

Théorème 3.7 (Deuxième théorème de Lovelock)**.** *Supposons $n = 4$. Si un tenseur A^{ij} vérifie* (*b*) *et* (*c*), *il existe nécessairement deux constantes a et b telles que*

$$A^{ij} = aG^{ij} + bg^{ij}.$$

Remarque 4. Le théorème 3.7 n'est pas vrai en général pour une dimension autre que $n = 4$: pour contre-exemples, on peut considérer $\frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{ij}_{12}$ en dimension 2 et $\frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{ijrstu}_{123456} \mathrm{R}_{rs}{}^{ab} \mathrm{R}_{abtu}$ en dimension 6.

Ainsi, en dimension $n = 4$, si l'on considère le tenseur $A^{ij}(g_{ab}; g_{ab,c}; g_{ab,cd})$ le plus général qui dépende de la métrique et de ses deux premières dérivées (b), et qui soit de divergence nulle (c), $A^{ij}{}_{|j} = 0$, alors il existe une constante $\Lambda \in \mathbb{R}$ telle que l'équation

$$A^{ij} = 0$$

est équivalente à une équation d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique,

$$G^{ij} = \Lambda g^{ij}.$$

Ces contraintes reviennent simplement à exiger que A^{ij} ait un sens physique : (b) correspond à des équations de mouvement du second ordre, et (c) à la conservation locale de l'énergie. Ainsi, les équations d'Einstein sont les équations physiques les plus générales en dimension 4 faisant intervenir un 2-tenseur. En dimension supérieure cependant, la présence de termes en R d'ordre supérieur à 2 dans le théorème 3.4 rend possible un vaste ensemble de théories de la gravitation alternatives à celle d'Einstein ; il s'agit des théories de Lovelock.

Enfin, il existe depuis 1970 des théories encore plus générales de la gravitation, nommées *théories* $f(\mathrm{R})$, où $f(\mathrm{R})$ est une fonction arbitraire qui remplace R dans l'action d'Einstein-Hilbert. Développées par Buchdahl et Starobinsky, elles sont aujourd'hui encore très étudiées (cf. [5]) et permettent des interactions avec d'autres champs de la physique des deux infinis, comme la physique des hautes énergies et la cosmologie.

Références

[1] R. Bartnik and J. Isenberg. The constraint equations. In *50 Years of the Cauchy Problem, in honour of Y. Choquet-Bruhat*, 2003.

[2] Mattias Dahl, Romain Gicquaud, and Emmanuel Humbert. A limit equation associated to the solvability of the vacuum einstein constraint equations using the conformal method. arXiv e-print 1012.2188, December 2010. Duke Math. J. Volume 161, Number 14 (2012), 2669-2697.

[3] David Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3) :498–501, March 1971.

[4] David Lovelock. The Four-Dimensionality of space and the Einstein tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6) :874–876, June 1972.

[5] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(R) theories of gravity. arXiv e-print 0805.1726, May 2008. Rev. Mod. Phys. 82, 451-497 (2010).

[6] Y. Fourès(Choquet)-Bruhat. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Mathematica*, 88 :141–225, 1952.

[7] Y. Choquet-Bruhat. *General Relativity and the Einstein equations.* Oxford University Press, 2009.

[8] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner. The dynamics of general relativity. In *Gravitation*, pages 227–265. L. Witten, ed. (Wiley, N.Y.), 1962.

[9] R. M. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984.

[10] David Lovelock. Divergence-free tensorial concomitants. *Aequationes Math.*, 4 :127–138, 1970.