EXPOSE DE MAÎTRISE
Le modèle du votant

proposé par
Thierry BODINEAU

Catherine Lagneau
Guillaume Moroz
5 juillet 2002

Table des matières

1 Introduction

Le modèle du votant a été introduit indépendamment par Clifford et Sudbury (1973) et par Holley et Liggett (1975). Il s'agit d'un cas particulier de sytèmes de particules en interaction : on se donne $S = \mathbb{Z}^d$, l'espace des sites sur lequel nous allons définir le processus, et $W = \{0, 1\}$ l'ensemble des opinions possibles sur chaque site.
Les points de S seront notés x,y,z... et les configurations de l'espace des états $\mathcal{X} = W^S$ seront notées η ou ζ.

Le mécanisme d'évolution est décrit par :

$$\eta(x) \text{ se change en } 1 - \eta(x) \text{ au taux de saut } \frac{1}{2d} \sum_{\substack{y \in S \\ |y-x|=1}} \mathbf{1}_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}} \ .$$

Une interprétation possible (Holley et Liggett) est que les sites de $\mathbb{Z}^d$ représentent les votants qui peuvent balancer entre deux opinions politiques (0 ou 1). Un votant attend un temps suivant une loi exponentielle avant de se laisser influencer par ses voisins selon la loi décrite ci-dessus (il prend l'opinion de la majorité de ses voisins avec une probabilité proportionnelle à leur nombre).

Une autre interprétation (Clifford et Sudbury) est une modélisation de concurrence entre deux populations (0 et 1) où les sites qui ont les mêmes valeurs représentent les territoires de chacune des populations. Un site est alors envahi selon le nombre de concurrents sur les sites voisins.

Nous allons définir précisement le modèle, puis étudier la convergence en temps, la question principale étant la détermination des mesures invariantes qui permettent de décrire l'issue du vote. Le consensus est représenté par les masses de Dirac δ_0 et δ_1 qui sont des mesures invariantes triviales, et nous verrons qu'en dimension inférieure à 2, ce sont les seules. Mais il y en a d'autres pour les dimensions supérieures. Enfin, nous étudierons plus précisement la convergence en dimension 1.

2 Construction d'un processus de Markov

Dans le cas de notre modèle, seuls les espaces finis ou dénombrables nous interressent.

2.1 Définition générale

Définition 1 *Soit I un ensemble fini ou dénombrable.*

*Un **processus stochastique** $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans I est une famille de variables aléatoires sur I indéxées par $\mathbb{R}^+$. On suppose en plus que le processus $t \to X_t$ est continu à droite, avec limites à gauche en tout point. La filtration $\mathcal{F}_t$ est la tribu $\sigma(X_u, u \leq t)$ engendré par les événements mesurables avant le temps t.*

*On dit que (X_t) est un **processus de Markov** à valeurs dans I si, pour tout temps $t_0 < ... < t_{n+1}$, et pour tout états $i_0, ..., i_{n+1}$*

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n, ..., X_{t_0} = i_0) = \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n). \tag{1}$$

*De plus, si la loi de $X_{t_{n+1}}$ sachant X_{t_n} ne dépend que de $t_{n+1} - t_n$, on dit que le processus est **homogène**. Dans ce cas, pour $s < t$, la loi de X_t sachant X_s est donnée par :*

$$\mathbf{P}(X_t = j | X_s = i) = p_{t-s}(i, j),$$

où la famille $p_t(i, j)$ est une famille de noyaux markoviens.

Le choix de la *continuité à droite* est compréhensible : le processus reste un temps strictement positif sur un point avant de sauter au suivant. Le choix de l'*existence d'une limite à gauche* vient de ce qu'on ne s'interesse pas ici à l'existence d'explosions. Mais cette hypothèse sera toujours vérifiée si l'espace est fini.

Définition 2 *On appelle **instants de saut** du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ les instants $T_1, T_2, ...$ définis par :*

$$T_0 = 0, \quad T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n : X_t \neq X_{T_n}\},$$

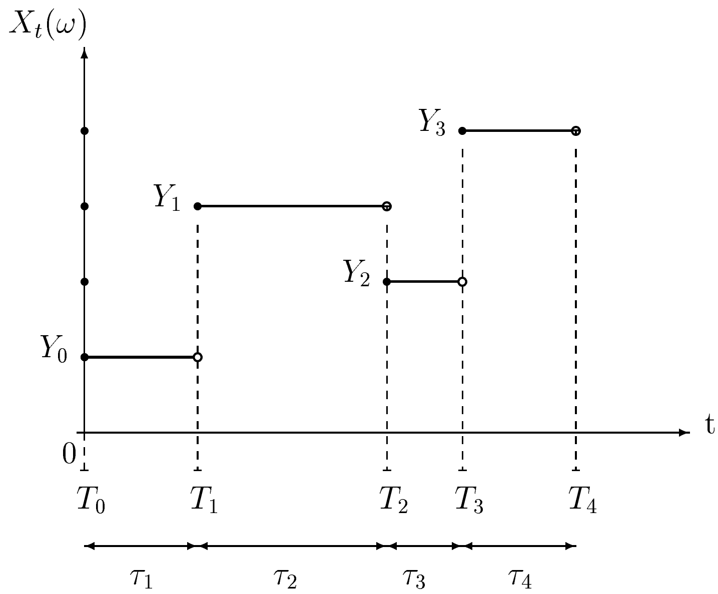
pour $n \geq 0$ avec $\inf \emptyset = \infty$.

*On appelle **temps d'attente** les variables :*

$$\tau_n = \begin{cases} T_n - T_{n-1} & si\ T_{n-1} < \infty, \\ \infty & sinon. \end{cases}$$

On associe à $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov discrète $(Y_n)_{n\geq 0}$ donnée par :

$$Y_n = X_{T_n}.$$



Remarque : La propriété de Markov est encore vraie pour les chaînes de Markov continues ; cela se déduit immédiatement du résultat sur les chaînes discrètes appliqué à $(Y_n)_{n\geq 0}$.

Définition 3 *On note P_t l'opérateur linéaire défini par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \forall x \in I, \quad P_t(f)(x) = \mathbf{E}[f(X_t)|X_0 = x] = \sum_y p_t(x,y)f(y).$$

Si le processus de Markov est issu du point x au temps $t = 0$, on note :

$$\mathbf{E}^x[f(X_t)] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{E}[f(X_t)|X_0 = x].$$

Proposition 1 *L'opérateur P_t vérifie :*
i) $P_0 = I$,
ii) $P_t \circ P_s = P_{t+s}$,
iii) la fonction $t \to P_t$ est continue en 0.

Définition 4 *La famille $\{P_t, t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires définis ci-dessus est appelée* ***semi-groupe de Markov*** *associé au processus.*

Définition 5 *Soit μ une mesure de probabilité sur I. Sa mesure image par P_t est notée μP_t et est définie par :*

$$\forall y \in I, \quad \mu P_t(y) = \sum_x \mu(x)p_t(x,y),$$

ce qui signifie :

$$\mu P_t(f) = \sum_x (\mu P_t)(x)f(x) = \sum_x \mu(x)P_t f(x).$$

La mesure μP_t est la distribution du processus à l'instant t lorsque la distribution initiale est μ.

Définition 6 *La mesure de probabilité μ est dite* ***invariante*** *pour le processus si*

$$\forall t \geq 0, \quad \mu P_t = \mu.$$

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur X et $\mathcal{I}$ l'ensemble des mesures invariantes.

Proposition 2 *Si, pour $\mu \in \mathcal{P}$, $\nu = \lim_{t\to\infty} \mu P_t$ existe, alors $\nu \in \mathcal{I}$.*

Preuve : En utilisant le (ii) de la proposition 1, on a

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \mu P_t}_{= \nu} = \lim_{t\to\infty} \mu P_{s+t} = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \mu P_t P_s}_{\nu P_s}$$

□

2.2 Construction d'un processus à partir d'un générateur infinitésimal

Dans ce paragraphe, nous allons construire un processus de Markov particulier à l'aide d'une matrice génératrice. Nous verrons au paragraphe 2.3 qu'en fait, tout processus dans un espace d'états finis peut se construire de cette manière.

Définition 7 *On dit qu'une matrice $L = (\lambda_{ij} : i, j \in I)$ est un* ***générateur infinitésimal*** *si elle vérifie :*

i) $0 \leq -\lambda_{ii} < \infty$ pour tout i ;
ii) $\lambda_{ij} \geq 0$ pour tout $i \neq j$;
iii) $\sum_{j\in I} \lambda_{ij} = 0$ pour tout i.

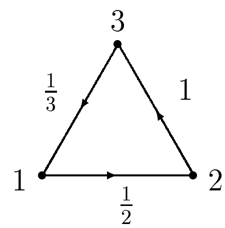
On notera $\lambda_i = \lambda(i) := -\lambda_{ii}$.

Définition 8 *On dit que $\Pi = (\pi_{ij} : i, j \in I)$ est une* ***matrice stochastique*** *si elle vérifie :*

i) $0 \leq \pi_{ij}$ pour tout i,j;
ii) $\sum_{j\in I} \pi_{ij} = 1$ pour tout i.

Proposition 3 *P_t est une matrice stochastique.*

Exemple : Pour illustrer la signification d'une matrice stochastique, on considère le processus à trois états :



où le nombre sur une flèche allant de i à j correspond à la probabilité de passer de l'état i à j. On peut alors construire une matrice stochastique correspondant au processus :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

A chaque générateur infinitésimal $L = (\lambda_{ij} : i, j \in I)$, on peut associer une matrice stochastique $\Pi_L = (\pi_{ij} : i, j \in I)$ définie par :

$$\begin{aligned} \pi_{ij} &= \begin{cases} \lambda_{ij}/\lambda_i & si \quad j \neq i \ et \ \lambda_i \neq 0, \\ 0 & si \quad j \neq i \ et \ \lambda_i = 0. \end{cases} \\ \pi_{ii} &= \begin{cases} 0 & si \quad \lambda_i \neq 0, \\ 1 & si \quad \lambda_i = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir un processus de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ de générateur L et de distribution initiale μ_0 :

- sa chaîne discrète associée $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov discrète de distribution initiale μ_0 et de matrice de transition Π_L ;
- ses temps d'attente τ_n sachant Y_{n-1} sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda(Y_{n-1})$.

Pour construire un tel processus, on se donne $(Y_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov discrète de distribution initiale μ_0 et de matrice de transition Π_L et des variables aléatoires indépendantes $t_1, t_2, ...$ de loi exponentielle de paramètre 1, indépendantes des (Y_n). Puis on pose $\tau_n = t_n/\lambda(Y_{n-1})$ (temps d'attente), $T_n = \tau_1 + ... + \tau_n$ (instants de saut) et

$$X_t = \begin{cases} Y_n & si \quad T_n \leq t < T_{n+1}, \\ \infty & sinon. \end{cases}$$

Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie bien la propriété (1) du paragraphe 2.1 qui définit un processus de Markov.
Concrètement, cette construction signifie que, après le saut à l'instant T_n au point $Y_n = X_{T_n}$, on attend un temps exponentiel de paramètre $\lambda(Y_n)$, puis on saute vers un autre point y avec la probabilité $\pi(Y_n, y)$.

Ainsi, la matrice L contient toutes les informations concernant le processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

2.3 Equivalence des constructions dans un espace d'états fini

On aimerait caractériser un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ dans un espace d'états fini à l'aide d'un générateur infinitésimal. Le théorème 2 va nous permettre de lier les opérateurs linéaires P_t définis au (2.1) au générateur L.

Proposition 4 *Soit Q une matrice sur un ensemble fini I. Posons $R(t) = e^{tQ}$. Alors $(R(t) : t \geq 0)$ a les propriétés suivantes :*
i) $R(s+t) = R(s)R(t)$ pour tout s, t ;
ii) R est l'unique solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}R(t) = R(t)Q, \quad R(0) = I;$$

iii) R est l'unique solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}R(t) = QR(t), \quad R(0) = I;$$

iv) pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k \Bigg|_{t=0} R(t) = Q^k.$$

Preuve : (i) Comme sQ et tQ commutent, on a

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad e^{sQ}e^{tQ} = e^{(s+t)Q}.$$

(ii)-(iii)-(iv) La série de matrices

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQ)^k}{k!}$$

a un rayon de convergence infini. On peut donc dériver terme à terme et on obtient immédiatement que R vérifie les équations de (ii) et (iii). Puis en réitérant la dérivation terme à terme, on obtient (iv).

Montrons que l'équation (ii) a une unique solution :
Si $M(t)$ vérifie l'équation (ii), alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M(t)e^{-tQ}) &= \left(\frac{d}{dt}M(t)\right)e^{-tQ} + M(t)\left(\frac{d}{dt}e^{-tQ}\right) \\ &= M(t)Qe^{-tQ} + M(t)(-Q)e^{-tQ} = 0 \end{aligned}$$

donc $M(t)e^{-tQ}$ est une constante et par donnée initiale, $M(t) = R(t)$.
On raisonne de même pour (iii). $\square$

Théorème 1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu à droite à valeurs et admettent des limites à gauche dans un ensemble fini I. Soit L un générateur infinitésimal et Π_L la matrice stochastique associée. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) –construction du (2.2) – *Conditionnellement à $\{X_0 = i\}$, la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$ associée au processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est de distribution initiale δ_i et de matrice de transition Π_L et, pour chaque $n \geq 1$, conditionnellement à $Y_0, ..., Y_{n-1}$, les temps d'attente $\tau_1, ..., \tau_n$ sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda(Y_0), ..., \lambda(Y_n)$.*

ii) –définition infinitésimale – *Pour tout $t, h \geq 0$, conditionnellement à $X_t = i$, X_{t+h} est indépendant de $(X_s : s \leq t)$ et, quand $h \downarrow 0$, uniformément en t, pour tout j,*

$$\mathbf{P}(X_{t+h} = j | X_t = i) = \delta_{ij} + \lambda_{ij} h + o(h).$$

iii) –définition à l'aide des probabilités de transition – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout temps $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n+1}$ et pour tout état $i_0, ..., i_{n+1}$, on a :*

$$\mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) = p_{t_{n+1} - t_n}(i_n, i_{n+1})$$

où $P_t = (p_t(i,j) : i, j \in I, t \geq 0)$ est la solution de :

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t L, \quad P_0 = I.$$

et aussi de :

$$\frac{d}{dt} P_t = L P_t, \quad P_0 = I.$$

Dans ce cas, L est appelé le **générateur du processus** $(X_t)_{t\geq 0}$.

Preuve : $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons (i), alors, quand $h \downarrow 0$, on a

$$\mathbf{P}^i(X_h = i) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{P}(X_h = i | X_0 = i) \geq \mathbf{P}^i(T_1 > h) = e^{-\lambda_i h} = 1 + \lambda_{ii} h + o(h),$$

et pour $j \neq i$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^i(X_h = j) &\geq \mathbf{P}(T_1 \leq h, Y_1 = j, T_2 > h) \\ &= (1 - e^{-\lambda_i h}) \pi_{ij} e^{-\lambda_j h} \\ &= \lambda_i \pi_{ij} h + o(h) = \lambda_{ij} h + o(h). \end{aligned}$$

Donc, pour tout état j, on a

$$\mathbf{P}^i(X_h = j) \geq \delta_{ij} + \lambda_{ij} h + o(h).$$

Si l'on somme pour tout état $j \in I$ fini, on constate que cette inégalité est en fait une égalité. Enfin, on applique la propriété de Markov et on obtient (ii).

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Posons $p_t(i,j) = \mathbf{P}^i(X_t = j)$. Si (ii) est vérifié, alors, pour tout $t, h \geq 0$, quand $h \downarrow 0$, uniformément en t

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+h) &= \sum_{k \in I} \mathbf{P}^i(X_y = k)\ \mathbf{P}(X_{t+h} = j | X_t = k) \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}(t)(\delta_{kj} + \lambda_{kj} h + o(h)). \end{aligned}$$

Comme I est fini, on obtient

$$\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_{kj} + o(1).$$

Donc, lorsque $h \downarrow 0$, on a $t \to p_t(i,j)$ est dérivable à droite. En utilisant l'uniformité en t, on peut remplacer t par $t-h$ dans l'égalité ci-dessus : on obtient ainsi la dérivabilité à gauche. Donc $t \to p_t(i,j)$ est dérivable et vérifie :

$$\frac{dp_{ij}}{dt}(t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Et, comme I est fini, en utilisant la proposition 4, $P_t = (p_{ij} : i, j \in I)$ est l'unique solution de chacune des équations.

En utilisant l'hypothèse (ii), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, ..., X_{t_n} = i_n) &= \mathbf{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n) \\ &= \mathbf{P}(X_{t_{n+1} - t_n} = i_{n+1} | X_0 = i_n) \\ &= p_{t_{n+1} - t_n}(i_n, i_{n+1}). \end{aligned}$$

$(iii)\Rightarrow(i)$ On a montré que si un processus satisfait (i), il satisfait aussi (iii). Or (iii) détermine entièrement le processus. Donc (iii) entraîne (i). □

Théorème 2 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov sur un espace d'états finis de générateur L. Alors l'opérateur défini par*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \forall x \in I, \quad P_t(f)(x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)] = \sum_y p_t(x,y) f(y)$$

vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad P_t = e^{tL}.$$

Preuve : C'est tout simplement le (iii) du theorème 1. □

Dans la suite, on notera $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que la variable T suit une loi exponentielle de paramètre λ :

$$\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

3 Construction du modèle du votant sur un espace d'états fini

3.1 Le générateur du votant

On note $S = \{-N, ..., N\}^d$ l'espace des sites sur lequel évolue le processus. Le modèle du votant concerne l'évolution d'une configuration $\eta \in \{0,1\}^S$. On note $\mathcal{X} = \{0,1\}^S$ l'espace des états. En chaque point de S se trouve un votant dont l'opinion est modélisée par $\eta(x) \in \{0,1\}$. A chaque étape un individu situé en un point $x \in S$ change d'opinion ou non selon l'avis de ses voisins. Il change d'opinion au taux de saut :

$$\frac{1}{2d} \sum_{\substack{y \in S \\ |y-x|=1}} \mathbf{1}_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}} \ .$$

On note η^x la configuration η dans laquelle x a changé d'avis :

$$\eta^x(y) = \begin{cases} \eta(y) & si \ \ y \neq x\,, \\ 1 - \eta(x) & si \ \ y = x\,. \end{cases}$$

Le générateur du modèle du votant est la matrice $L = (\lambda(\eta, \zeta) : \eta, \zeta \in \mathcal{X})$ définie par :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda(\eta,\zeta) = \begin{cases} c(x,\eta) & si \ \ \zeta = \eta^x, \\ -\sum_{x \in S} c(x,\eta) & si \ \ \zeta = \eta\,, \\ 0 & sinon, \end{cases} \\ \text{avec :} \\ c(x,\eta) = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_{\substack{y \in S \\ |y-x|=1}} \mathbf{1}_{\{\eta(y) \neq \eta(x)\}} \ . \end{array}}$$

On note :

$$\begin{cases} \lambda_\eta = \sum_{x \in S} c(x,\eta)\,, \\ p(\eta, \eta^x) = \frac{c(x,\eta)}{\lambda_\eta}\,. \end{cases}$$

D'après le paragraphe (2.2), cela signifie que, à chaque configuration η , on attend un temps $T_\eta \sim \mathcal{E}(\lambda\eta)$ avant de passer à une configuration η^x avec la probabilité $p(\eta, \eta^x)$.

3.2 Une construction équivalente

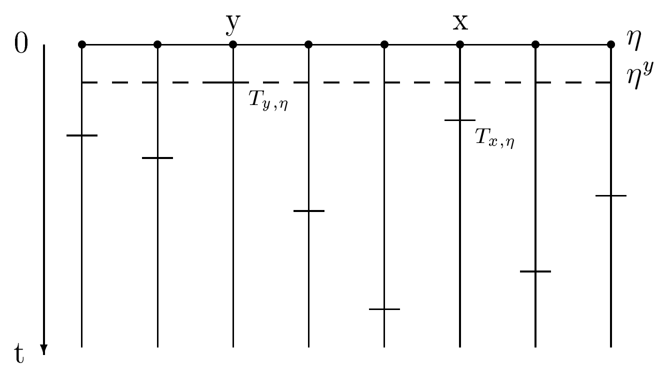
On peut aborder différemment la construction du modèle du votant :
Pour chaque configuration $\eta \in \mathcal{X}$, à chaque point $x \in S$, on associe une variable aléatoire $T_{x,\eta} \sim \mathcal{E}(c(x,\eta))$ où les $(T_{x,\eta})_{x \in S}$ sont indépendantes.
On peut alors implémenter la transition entre η et η^y de la façon suivante :

1/ on lance les variables $(T_{x,\eta})_{x\in S}$;
2/ on choisit le y tel que

$$T_{y,\eta} = \min_{x\in S}(T_{x,\eta}) \ ;$$

– on change $\eta(y)$ en $1-\eta(y)$.

On obtient alors la configuration η^y pour laquelle on répète les trois procédures précédentes avec de nouvelles variables alétoires T_{x,η^y}. On construit ainsi par étapes une réalisation du processus stochastique.



Montrons que cette construction est équivalente à celle du paragraphe (3.1) :

Proposition 5 *Le temps d'attente T_η entre chaque saut suit la même loi dans les deux constructions :*

$$T_\eta = \min_{x\in S}(T_{x,\eta}) \sim \mathcal{E}(\lambda_\eta)$$

où $\lambda_\eta = \sum_x c(x,\eta)$.

Preuve : Comme les $(T_{x,\eta})_{x\in S}$ sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_\eta > t) &= \mathbf{P}(\min_{x\in S}(T_{x,\eta}) > t) = \mathbf{P}(\bigcap_{x\in S}\{T_{x,\eta} > t\}) \\ &= \prod_{x\in S}\mathbf{P}(T_{x,\eta} > t) = \prod_{x\in S} e^{-c(x,\eta)t} = e^{-\lambda_\eta t}. \end{aligned}$$

Enfin, comme la fonction caractéristique détermine entièrement la loi, on a bien

$$T_\eta \sim \mathcal{E}(\lambda_\eta).$$

□

Proposition 6 *La probabilité $p(\eta,\eta^x)$ de sauter de η à η^x est la même dans les deux constructions.*

On rappelle qu'au paragraphe (3.1), $p(\eta,\eta^x)$ était défini comme suit :

$$p(\eta,\eta^x) = \frac{c(x,\eta)}{\lambda_\eta}.$$

Preuve : On a, en utilisant l'indépendance des $(T_{x,\eta})_{x\in S}$,

$$p(\eta,\eta^x) = \mathbf{P}(\forall y \neq x,\ T_{x,\eta} < T_{y,\eta}) = \mathbf{P}(\bigcap_{y\neq x}\{T_{y,\eta} > T_{x,\eta}\}) = \mathbf{E}\left[\exp(-(\sum_{y\neq x} c(y,\eta))T_{x,\eta})\right].$$

Or, pour toute variable exponentiellement distribuée $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a

$$\mathbf{E}[e^{-sY}] = \int_0^\infty e^{-sy}\lambda e^{-\lambda y}dy = \frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Donc on obtient

$$p(\eta,\eta^x) = \frac{c(x,\eta)}{\sum_y c(y,\eta)}\ .$$

□

3.3 Caractérisation du générateur par son action sur les fonctions

Regardons, dans le cas su modèle du votant, comment le générateur L agit sur les fonctions continues de $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$:

Théorème 3 *Le générateur L du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est caractérisé par*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{X}), \quad Lf(\eta) = \sum_{x\in S} c(x,\eta)\left[f(\eta^x) - f(\eta)\right].$$

Preuve : Le résultat est immédiat en utilisant le théorème 1 et la définition du générateur du votant. En effet, pour $(P_t)_{t\geq 0}$ associé au processus, on a

$$\frac{d}{dt}P_t\Big|_{t=0} = L \qquad et \qquad P_tf(\eta_0) = \mathbf{E}^{\eta_0}[f(\eta_t)] = \sum_{\eta\in\mathcal{X}} p_t(\eta_0,\eta)f(\eta)\ .$$

Or la propriété *(ii)* du théorème 1 nous dit :

$$p_t(\eta_0,\eta) = \delta_{\eta_0,\eta} + \lambda(\eta_0,\eta)h + o(h).$$

Or, on rappelle la définition de L :

$$\lambda(\eta_0,\eta) = \begin{cases} c(x,\eta_0) & si\ \eta = \eta_0^x\ , \\ -\sum_{x\in S} c(x,\eta_0) & si\ \eta = \eta_0\ , \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Donc, on a

$$P_tf(\eta_0) = f(\eta_0) + \left[\sum_{x\in S} c(x,\eta_0)f(\eta_0^x) - \sum_{x\in S} c(x,\eta_0)f(\eta_0)\right]h + o(h),$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}P_tf(\eta_0)\Big|_{t=0} = Lf(\eta_0) = \sum_{x\in S} c(x,\eta_0)\left[f(\eta_0^x) - f(\eta_0)\right].$$

□

4 Le modèle dual du modèle du votant

4.1 Une représentation graphique de la dualité

Soit $(\eta_t)_{t\geq 0}$ un processus du votant. Comme dans le paragraphe 2.1, on associe à $(\eta_t)_{t\geq 0}$:

- les instants de saut $T_1, T_2, ...$ définis par :

$$T_0 = 0, \quad T_{n+1} = \inf\{t \geq T_n : \eta_t \neq \eta_{T_n}\}$$

- la chaîne discrète

$$\eta_n = \eta_{T_n}.$$

auxquels on ajoute

- la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ des votants qui ont changé d'avis : sachant η_n,

$$X_{n+1} = x \quad \text{où} \quad \eta_{n+1} = \eta_n^x$$

- $(Y_n^x)_{n\geq 0}$ définie par : $(Y_n)_{n\geq 0}$ est un ensemble de variables aléatoires indépendantes vérifiant : $\mathbf{P}(Y_n^x = y) = \frac{1}{2d}$ pour y tel que $|y| = 1$.

Ainsi, à l'instant T_n, le votant situé en $X_n = x$ change d'avis et prend celui de $x + Y_n^x$.

On note $\xi_t = \{x \in S : \eta_t(x) = 1\}$ l'ensemble des votants ayant une opinion favorable.

On va étudier le processus à l'aide d'une représentation graphique. Pour chaque n et $x = X_n$, on trace une flèche de $(x + Y_n^x, T_n)$ à (x, T_n). Cela signifie que le point (x, T_n) prend l'opinion de $(x + Y_n^x, T_n)$.

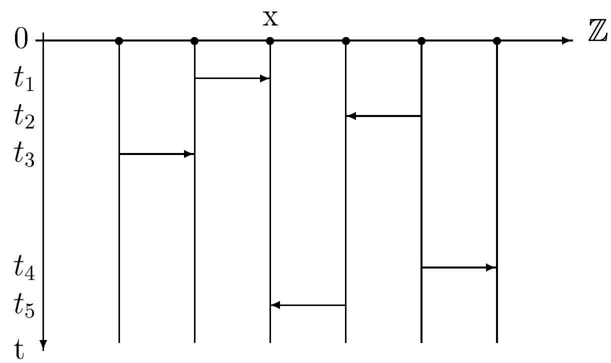
Définition 9 *On dit qu'il y a un **chemin** de $(x,0)$ à (y,t), noté $(x,0) \rightsquigarrow (y,t)$, s'il existe $s_0 = 0 < s_1 < s_2 ... < s_n + 1 = t$ et $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ tels que :*

- *pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il y a une flèche de x_{i-1} à x_i ;*
- *il n'y a pas de flèches arrivant sur les segments verticaux $\{x_i\} \times [s_i, s_{i+1}]$.*

S'il y a un chemin de $(x,0)$ à (y,t), cela signifie que (y,t) a pris l'opinion de $(x,0)$. On peut imaginer un fluide qui entre en les points de ξ_0 et suit les flèches.
On pose pour $A \in Y$, l'ensemble des sous-parties finies de S :

$$\xi_t^A = \{y : \exists x \in A, (x,0) \rightsquigarrow (y,t)\}.$$

Alors, si $A = \xi_0$ défini par $\xi_t = \{x \in S : \eta_0(x) = 1\}$, ξ_t^A donne l'ensemble des votants favorables au temps t.



Si l'on veut calculer l'opinion de x à l'instant t_1 dans l'exemple ci-dessus, il suffit de travailler "à l'envers", c'est-à-dire remarquer qu'à $t = t_5$, x prend l'opinion de $x+1$, qui lui même à t_2 a pris l'opinion de $x+2$. Conclusion : x à l'instant t_1 a l'opinion de $x+2$ à l'instant 0.

Nous pouvons donc introduire une définition graphique du processus dual du modèle du votant. A partir de l'instant T, graphiquement, il suffit de changer l'orientation des flèches et de changer de sens le temps : $\hat{t} = T - t$. De même que précedemment, on peut définir des chemins, pour $B \in Y$,

$$\hat{\xi}_t^B = \{x : \exists y \in B, (y,0) \rightsquigarrow (x,t)\}.$$

Alors, pour tout $A, B \in Y$, on a

$$\mathbf{P}\left\{\xi_t^A \cap B \neq \emptyset\right\} = \mathbf{P}\left\{\hat{\xi}_t^B \cap A \neq \emptyset\right\}. \tag{2}$$

Le paragraphe suivant va nous permettre de définir proprement la dualité.

4.2 Définitions

Le but de cette section est d'établir la dualité entre le modèle du votant, et le modèle des marches aléatoires coalescentes. Pour cela, nous nous restreignons au cas fini.

Soit $\Lambda_N = \{-N, ..., N\}^d$

Définition 10 *Le modèle des marches aléatoires coalescentes est un processus de Markov A_t à valeurs dans $\mathcal{P}(\Lambda_N)$ =l'ensemble des parties de Λ_N. Il correspond à l'évolution de $|A|$ marches aléatoires simples partant de chacun des points de A, ayant en outre la propriété de fusionner à chaque rencontre plutôt que de se croiser simplement. On notera $\mathcal{L}$ le générateur infinitésimal d'un tel processus.*

Définition 11 *Soient η_t et ζ_t deux processus de Markov à valeurs dans X et Y respectivement, et soit $H(\eta, \zeta)$ une fonction mesurable bornée sur $X \times Y$. Les processus η_t et ζ_t sont alors dit dual l'un vis-à-vis de l'autre, relativement à H si*

$$E^\eta H(\eta_t, \zeta) = E^\zeta H(\eta, \zeta_t),$$

pour tout $\eta \in X$ *et* $\zeta \in Y$.

Nous allons ici nous interesser à la dualité relative à la fonction :

$$H(\eta, A) = \prod_{x \in A} (1 - \eta(x)).$$

La fonction $H(\eta, A)$ vaut donc $\begin{cases} 1 & \text{si } \forall x \in A, \eta(x) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Dans ces conditions, on peut remarquer que

$$c(x, \eta) = (1 - \eta(x)) + (2\eta(x) - 1) \sum_{|y-x|=1} \frac{1}{2d} H(\eta, \{y\})$$

ce qui traduit bien : $c(x, \eta) = \frac{\text{nombre de voisins de x d'opinion différente}}{\text{nombre total de voisins}}$

4.3 Main à la patte

Nous allons voir que grâce à la dualité, le modèle complexe du votant peut se ramener au modèle beaucoup mieux connu des marches aléatoires coalescentes. On passe d'un domaine infini dimensionnel à un domaine fini dimensionnel.

4.3.1 Calculs

On rappelle que l'on note L la matrice génératrice du processus du votant, et $\mathcal{L}$ la matrice génératrice du processus des marches aléatoires coalescentes.

Lemme 1 $\forall \eta \in \{0,1\}^{\Lambda_N}, \forall A \in \mathcal{P}(\Lambda_N)$ *on a*

$$LH(., A)(\eta) = \mathcal{L}H(\eta, .)(A)$$

Preuve : On calcule :

$$\begin{aligned}
& LH(., A)(\eta) \\
= & \sum_{x \in \Lambda_N} c(x, \eta)(H(\eta_x, A) - H(\eta, A)) \\
& \text{en utilisant la représentation de } c(x,\eta) \text{ vue en 4.1 :} \\
= & \sum_{x \in \Lambda_N} [(1 - \eta(x)) + 2(\eta(x) - 1) \sum_{|y-x|=1} \frac{1}{2d}(1 - \eta(y))][\prod_{y \in A \backslash \{x\}} (1 - \eta(y))][(1 - \eta_x(x)) - (1 - \eta(x))] \\
= & \sum_{x \in A} \frac{1}{2d} \sum_{|y-x|=1} (H(\eta, A \cup \{y\} \backslash \{x\}) - H(\eta, A)) \\
= & \mathcal{L}H(\eta, .)(A).
\end{aligned}$$

□

Théorème 4 *Soient* η_t *et* A_t *deux processus de Markov de matrice génératrice respectivement* L *et* $\mathcal{L}$. *Soient* $\eta \in \{0,1\}^{\Lambda_N}$ *et* $A \in \mathcal{P}(A)$. *Alors*

$$E^{\eta}(H(\eta_t, A)) = E^A(H(\eta, A_t))$$

Preuve : Notons $f_A = H(.,A)$, $g_\eta = H(\eta,.)$, et $u_t(A) = E^\eta(H(\eta_t, A))$, alors, par définition :

$$E^\eta(H(\eta_t,A)) = e^{-tL} f_A(\eta)$$
$$E^A(H(\eta,A_t)) = e^{-t\mathcal{L}} g_\eta(A)$$

Le lemme 1 permet d'identifier l'action des 2 générateurs sur H, c'est à dire de caractériser la dérivée au temps 0 des espérances des 2 processus. Pour identifier les 2 processus à un temps t arbitraire, on se sert de l'unicité de la solution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}R(t) = -\mathcal{L}R(t)$ pour R(0) fixé, vue à la proposition 4.

$$u_t(A) = e^{-tL} f_A(\eta)$$

d'où,

$$\frac{d}{dt}u_t(A) = -e^{-tL} L f_A(\eta)$$

or, d'après le lemme 1,

$$Lf_A(\eta) = \mathcal{L}g_A(\eta) = \frac{1}{2d} \sum_{\substack{x\in A \\ |y-x|=1}} (H(\eta, A\cup\{y\}\backslash\{x\}) - H(\eta, A))$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_t(A) &= -e^{-tL}\frac{1}{2d} \sum_{\substack{x\in A \\ |y-x|=1}} (f_{A\cup\{y\}\backslash\{x\}} - f_A)(\eta) \\
&= -\frac{1}{2d} \sum_{\substack{x\in A \\ |y-x|=1}} [e^{-tL} f_{A\cup\{y\}\backslash\{x\}}(\eta) - e^{-tL} f_A(\eta)] \\
&= -\frac{1}{2d} \sum_{\substack{x\in A \\ |y-x|=1}} (u_t(A\cup\{y\}\backslash\{x\}) - u_t(A)) = -\mathcal{L}u_t(A).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la proposition 4, $\forall A \in \mathcal{P}(\Lambda_N)$:

$$u_t(A) = e^{-t\mathcal{L}} g_\eta(A)$$

Ce qui nous donne le résultat voulu. □

4.3.2 Interprétation

Ainsi, l'espérance que η_t n'ait que des 0 dans A est la même que l'espérance que η n'ait que des 0 dans A_t.

4.4 Quelques mots sur le modèle du votant sur un espace d'états infini

On admet ici que le modèle du votant sur un espace dénombrable infini, en l'occurrence $\mathbb{Z}^d$ se traite de ma même façon que dans le cas de m'espace fini. Cela vient de ce que, si l'on regarde l'évolution d'un processus stochastique sur l'intervalle de temps [0,T], elle peut être approximée par une évolution sur un domaine finie (dont le diamètre croît avec T).

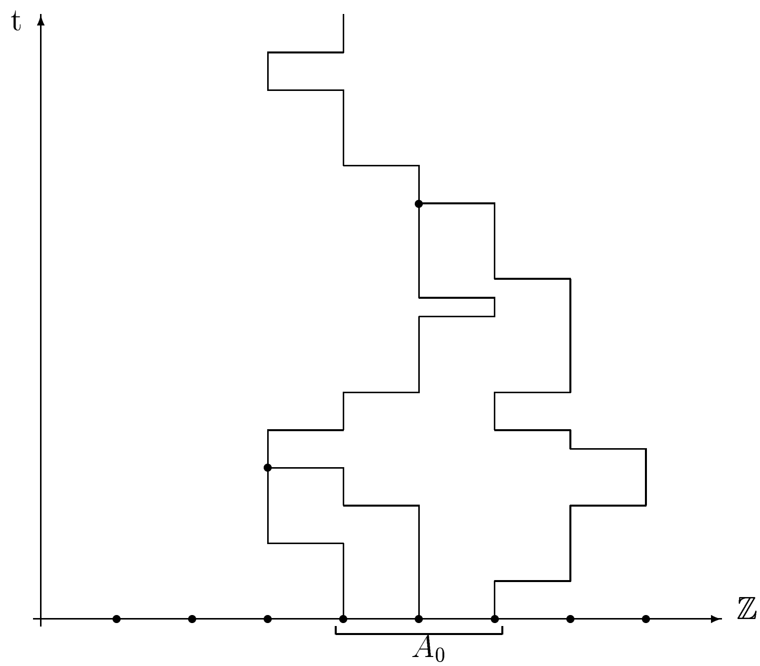
5 Etude de la convergence du modèle du votant

On considère $(X_t)_{t\geq 0}$ un modèle du votant sur $\mathbb{Z}^d$. On veut étudier son comportement à l'infini.

Soit Y l'ensemble des sous-parties finies de S. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$, on définit $\hat{\mu}(A)$ pour $A \in Y$ par

$$\hat{\mu}(A) = \mu\{\eta : \forall x \in A, \eta(x) = 1\}.$$

Soit A_t une chaîne de Markov sur Y dans lequel les points suivent indépendamment une chaîne de Markov continue avec des taux de saut $T \sim \mathcal{E}(1)$ et des probabilités de transition $p(x,y) = \frac{1}{2d}$ lorsque $|y-x| = 1$. De plus, deux chaînes qui se rencontrent coalescent. C'est le dual du modèle du votant (cf. partie (4)).



Théorème 5 *La relation de dualité s'écrit, pour μ mesure de probabilité sur $\mathcal{X}$,*

$$\boxed{\hat{\mu}_t(A) = \mathbf{E}^A \hat{\mu}(A_t)}$$

avec $\mu_t = \mu P_t$.

Preuve : On a montré que le modèle dual vérifiait, pour toute valeur initiale η :

$$\mathbf{P}^\eta[\forall x \in A, \;\; \eta_t(x) = 1] = \; \mathbf{P}^A[\forall x \in A_t, \;\; \eta(x) = 1]$$

Si on choisit η selon la loi μ, alors η_t suit la loi μ_t. Donc

$$\int d\mu(\eta) \; \mathbf{P}^\eta[\forall x \in A, \;\; \eta_t(x) = 1] = \hat{\mu}_t(A),$$

et

$$\int d\mu(\eta)\ \mathbf{P}^A[\forall x \in A_t,\ \ \eta(x) = 1] = \mathbf{E}^A \hat{\mu}(A_t).$$

$\square$

Pour $\alpha \in [0, 1]$, on considère une mesure ν_α sur $\mathcal{X}$ vérifiant :

$$\forall x \in S, \quad \nu_\alpha\{\eta : \eta(x) = 1\} = \alpha$$

On peut prendre par exemple la mesure définie comme la mesure produit :

$$\nu_\alpha = \bigotimes_{x \in S} \nu_\alpha^{(x)} \qquad \textit{et} \qquad \forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \nu_\alpha^{(x)}(\eta) = \alpha \delta_{\eta_{x=1}} + (1 - \alpha)\delta_{\eta_{x=0}}$$

Autrement dit, chaque site est occupé par un vote 1 indépendamment des autres à la probabilité α.

5.1 Cas général

Théorème 6
i) $\mu_\alpha = \lim_{t\to\infty} \nu_\alpha S(t)$ *existe pour tout* $\alpha \in [0, 1]$ *et* $\mu_\alpha \in \mathcal{I}$ *;*
ii) $\forall x \in S, \mu_\alpha\{\eta : \eta(x) = 1\} = \alpha$.

Preuve : Notons $A = \{x_1, ..., x_n\}$ où les x_i sont distincts. On considère $(A_t)_{t\geq 0}$ et $\{X_t^1, ..., X_t^n\}_{t\geq 0}$ avec $X_0^i = x_i$ où les (X_t^n) coincident avec les chaînes issues de A_t avant qu'elles ne coalescent, puis continuent sans fusionner. Alors, pour tout instant t, $A_t \subset \{X_t^1, ..., X_t^n\}$.

Par définition de $\hat{\mu}$, on a $A \subset B \Rightarrow \hat{\mu}(A) \geq \hat{\mu}(B)$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^A \hat{\nu}_\alpha(A_t) &\geq \mathbf{E}^{(x_1,...,x_n)} \left[\hat{\nu}_\alpha(\{X_t^1, ..., X_t^n\})\right] \\
&= \mathbf{E}^{(x_1,...,x_n)} \left[\nu_\alpha(\bigcap_{i=1}^n \{\eta : \eta(X_t^i) = 1\})\right],
\end{aligned}$$

et comme les (X_t^i) sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^A \hat{\nu}_\alpha(A_t) &\geq \mathbf{E}^{(x_1,...,x_n)} \left[\prod_{i=1}^n \nu_\alpha(\{\eta : \eta(X_t^i) = 1\})\right] \\
&\geq \mathbf{E}^{(x_1,...,x_n)} \alpha^n = \alpha^n = \hat{\nu}_\alpha(A).
\end{aligned}$$

La propriété de Markov et l'inégalité précédente impliquent :

$$\mathbf{E}^A\hat{\nu}_\alpha(A_{t+s}) = \mathbf{E}^A[\mathbf{E}^A[\hat{\nu}_\alpha(A_{t+s})|\mathcal{F}_s]] = \mathbf{E}^A[\mathbf{E}^{A_s}\ \hat{\nu}_\alpha(A_t)] \geq \mathbf{E}^A\hat{\nu}_\alpha(A_s).$$

Donc $t \mapsto \mathbf{E}^A\hat{\nu}_\alpha(A_t)$ est une fonction croissante et majorée, et admet donc une limite $\hat{\mu}_\alpha(A)$ supérieure ou égale à $\hat{\nu}_\alpha(A)$. On a donc :

$$\hat{\mu}_\alpha(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A\hat{\nu}_\alpha(A_t) \geq \hat{\nu}_\alpha(A). \tag{3}$$

En utilisant la relation de dualité du théorème 5, on en déduit l'existence de la limite.

On en déduit $\mu_\alpha \in \mathcal{I}$ grâce à la proposition 2.

Enfin, on a clairement

$$\forall x \in S, \hat{\mu}_\alpha(\{x\}) = \hat{\nu}_\alpha(\{x\}).$$

On en déduit (ii). □

5.2 Cas des dimensions 1 et 2

Théorème 7 *Soit* $\alpha \in [0,1]$. *Si* $d \leq 2$, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} \nu_\alpha P_t = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0.$$

Cela signifie qu'on tend vers un consensus. Avec probabilité α, à la limite, tout le monde vote 1.

Preuve : Remarquons tout d'abord que, par la relation de dualité donnée par le théorème 5, on a l'équivalence :

$$\begin{array}{c} \lim_{t\to\infty} \mu P_t = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0 \\ \Updownarrow \\ \forall A \in Y, \quad \displaystyle\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A\hat{\mu}(A_t) = \alpha^{\cdot} \end{array}$$

On introduit le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |A_t| = 1\}.$$

Alors $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. En effet, si $d \leq 2$, deux marches aléatoires se rencontrent presque sûrement (prendre leur différence : c'est une marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$. Donc 0 est récurrent — cf. annexe p.27—), donc c'est vrai aussi lorsqu'elles sont en nombre fini.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A \hat{\mu}(A_t) &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A[\mathbf{E}^A[\hat{\mu}(A_t)|\mathcal{F}_\tau]] \\
&= \mathbf{E}^A \left[\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A[\hat{\mu}(A_t|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbf{E}^A \left[\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}^A[\hat{\mu}(A_{t+\tau}|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbf{E}^A[\lim_{t\to\infty} \underbrace{\mathbf{E}^{A_\tau}[\hat{\mu}(A_t)]}_{=\alpha}] = \alpha
\end{aligned}
$$

□

6 Amas en dimension 1

On se place maintenant dans un modèle du votant basique où $S = \mathbb{Z}$ et $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. D'après les théorèmes de convergence, on sait que :

$$\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0$$

où $\alpha = \mu\{\eta : \eta(x) = 1\}$ avec $\mu \in \mathcal{S}$. Cela signifie donc qu'en dimension 1, les opinions ont tendance à s'uniformiser pour former un unique amas, constitué de 0 ou constitué de 1.

Mais plus précisément, comment et à quelle "vitesse" se forment ces amas ? C'est à cette question que l'on se propose de répondre dans cette section.

6.1 Définition et outils de base

Définition 12 *Les amas d'une configuration η de $\mathcal{X}$ sont les composantes connexes des ensembles $\{x : \eta(x) = 0\}$ et de $\{x : \eta(x) = 1\}$. La longueur moyenne des amas de η est donnée par la formule :*

$$C(\eta) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\textit{nombre d'amas de } \eta \textit{ dans } [-n;n]},$$

dans le cas où cette limite existe.

Définition 13 *Soit η un état de $\mathcal{X}$ et f une fonction définie sur $\mathcal{X}$, alors on définit τ_x par :*
$\tau_x\eta(y) = \eta(y-x)$
$\tau_x f(\eta) = f(\tau_x\eta)$

Théorème 8 (théorème ergodique) *Soit μune mesure ergodique et f est une fonction de $L^1(\mu, X)$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tau_k f}{n} = \int f d\mu \qquad \mu\text{-}ps.$$

Théorème 9 *Pour le processus du votant que l'on considère, si $\mu \in \mathcal{S}_e$ alors, $\forall t \geq 0$, $\mu S(t) \in \mathcal{S}_e$.*

6.2 Convergence des amas

Avec ces définitions qui formalisent la notion intuitive des paquets, on peut maintenant démontrer quelques lemmes :

Lemme 2 *Soit un modèle du votant avec $\mu \in \mathcal{S}_e$ comme distribution initiale. Alors :*

$$C(\eta_t) = \frac{1}{\mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)]} \qquad \mu S(t)\text{-}ps.$$

Preuve : D'après le théorème 9 , $\mu \in \mathcal{S}_e$ entraîne $\mu S(t) \in \mathcal{S}_e$, puis on applique le théorème 8 à la fonction $f(\eta_t) = \mathbf{1}_{\{\eta_t(0)\neq\eta_t(1)\}}$. $\square$

Lemme 3 *Soit* $0 < y < \pi$, *alors la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{x}$ *converge et il existe* c_1, c_2 *constantes telles que*

$$\sup_{N\geq 1} \mid \sum_{x=1}^{n} \frac{e^{ixy}}{x} \mid \leq c_1 + c_2 \mid log\ y \mid$$

Preuve : Calculs. $\square$

Théorème 10 *Si la distribution initiale du modèle du votant est ergodique et si* $\alpha = \mu\{\eta : \eta(0) = 1\} \in]0, 1[$, *alors*

$$\frac{C(\eta_t)}{\sqrt{t}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha(1-\alpha)} \qquad \textit{en probabilité pour } t \to \infty$$

Preuve : D'après le lemme 2, il suffit de montrer

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\ \mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}}$$

On a,

$$\mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = \ \mathbf{P}[\eta_t(0) = 1] + \ \mathbf{P}[\eta_t(1) = 1] - 2\ \mathbf{P}[\eta_t(0) = \eta_t(1) = 1]$$

d'où, avec la dualité, si A_t est un processus du modèle dual partant de $A_0 = \{0, 1\}$:

$$\mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = 2\alpha - 2E^{\{0,1\}}(\hat{\mu}(A_t)),$$

puis, soit Z(t) la différence de 2 marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$, soit $\tau = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } Z(t) = 0\}$ et soit P^1 la mesure de probabilité sachant Z(0)=1 , alors :

$$\mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = 2\alpha\ \mathbf{P}^1(\tau \geq t) - 2\sum_{x=1}^{\infty} \hat{\mu}(\{0, x\})\ \mathbf{P}^1(Z(t) = x, \tau > t)$$

Or, d'après le principe de réflection (Cf Karlin & Taylor, 1975) :

$$P^1(Z(t) = x, \tau \leq t) = P^1(Z(t) = -x)$$

donc, en notant $p_t(x) = P^0(Z(t) = x)$ pour tout $x \geq 1$, on a :

$$P^1(Z(t) = x, \tau > t) = p_t(x-1) - p_t(x+1)$$

et ainsi :

$$\mathbf{P}\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = 2\sum_{x=1}^{\infty}(\alpha - \hat{\mu}(\{0, 1\}))(p_t(x-1) - p_t(x+1)).$$

Ensuite, on sait qu'il existe une mesure de probabilité ν sur $\Gamma = [-\pi, \pi[$ (tout simplement la transformée de Fourier de $\frac{\hat{\mu}(0,x)}{\hat{\mu}(0)}$) telle que :

$$\hat{\mu}(0,x) = \alpha \int_\Gamma e^{ix\gamma} \nu(d\gamma),$$

d'où

$$\mathbf{P}[\eta_t(0) \neq \eta_t(1)] = 2\alpha \sum_{x=1}^{\infty} (p_t(x-1) - p_t(x+1)) \int_\Gamma (1 - e^{ix\gamma}) \nu(d\gamma)$$

A ce stade, pour pouvoir conclure, avec le théorème de convergence dominée, il ne reste plus qu'à montrer :

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{\pi t} \sum_{x=1}^{\infty} (p_t(x-1) - p_t(x+1)) e^{ix\gamma} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Pour cela, on utilise d'abord la formule d'inversion de Fourier pour écrire :

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{-ix\sigma} e^{-2t(1-\cos(\sigma))} d\sigma \tag{4}$$

d'où, avec le changement de variable $\lambda = \sqrt{2t}\sigma$, on a par convergence dominée :

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{2t} p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{5}$$

Ainsi, pour $\gamma = 0$, on a le résultat voulu :

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{\pi t} \sum_{x=1}^{\infty} (p_t(x-1) - p_t(x+1)) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\pi t} (p_t(0) + p_t(1)) = 1$$

Ensuite, pour $\gamma \neq 0$, c'est plus délicat. D'abord on intègre par partie :

$$\begin{aligned} p_t(x-1) - p_t(x+1) &= \frac{i}{\pi} \int_\Gamma e^{-ix\sigma} \sin(\sigma) e^{-2t(1-\cos(\sigma))} d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-ix\sigma}}{x} (\cos(\sigma) - 2t \sin^2(\sigma)) e^{-2t(1-\cos(\sigma))} d\sigma \end{aligned}$$

Puis, le lemme 3 nous permet d'écrire, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\sqrt{2t} \sum_{x=1}^{\infty} (p_t(x-1) - p_t(x+1)) e^{ix\gamma} = \frac{\sqrt{2t}}{\pi} \int_\Gamma \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{ix(\gamma-\sigma)}}{x} (\cos(\sigma) - 2t \sin^2(\sigma)) e^{-2t(1-\cos(\sigma))}$$

De là, on coupe l'intégrale en 2 :

-pour $\{\sigma : |\sigma| > \frac{|\gamma|}{2}\}$, l'expression ci-dessus tend directement vers 0 lorsque t tend vers ∞

-pour $\{\sigma : |\sigma| \leq \frac{|\gamma|}{2}\}$, on procède comme précédemment au changement de variable $\lambda = \sigma\sqrt{2t}$ et on arrive au résultat voulu par convergence dominée. $\square$

6.3 Quelques résultats amusants en dimension 1

Pour A_t un processus de Markov du modèle dual et B une partie finie de S, on note ici P^B la mesure de probabilité sachant $A_0 = B$.

Lemme 4 *Il existe une constante c telle que*

$$P^{\{0,x\}}(|A_t| = 2) \leq c\frac{x}{\sqrt{t}}$$

pour tout $x \geq 1$ et $t > 0$.

Preuve : En reprenant les notations précédentes, on a :

$$P^{\{0,x\}}(A_t = 2) = P^x(\tau > t)$$

Puis, par le principe de réflection,

$$P^x(\tau \leq t) = 2P^x(Z(t) \leq 0) = P^0(|Z(t)| \geq x),$$

d'où avec (6),

$$P^{\{0,x\}}(A_t = 2) = P^0(|Z(t)| < x) = \sum_{k=-(x-1)}^{x-1} p_t(k)$$
$$\leq (2x-1)p_t(0)$$

ce qui nous permet de conclure avec (7). □

Lemme 5 *Il existe une constante c telle que*

$$P^{\{-x,0,y\}}(|A_t| = 3) \leq c\frac{xy}{t}$$

pour tout $x, y \geq 1$ et $t > 0$.

Preuve : Soient $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X_3(t)$ trois marches aléatoires simples indépendantes sur $\mathbb{Z}$, puis $U(t) = X_1(t) - X_2(t)$ et $V(t) = X_3(t) - X_2(t)$. Alors, en considérant la marche aléatoire (U(t),V(t)) sur $\mathbb{Z}^2$, on pourrait montrer

$$P^{\{-x,0,y\}}(|A_t| = 3) \leq P^{\{-x,0\}}(|A_t| = 2)P^{\{0,y\}}(|A_t| = 2)$$

ce qui permettrait alors de conclure avec le lemme 4. □

ANNEXE : Récurrence et transience des marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}^d$

Définition 14 *Soient $d \geq 1$ et e_i le point de $\mathbb{Z}^d$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, telle que, pour $i = 1, ..., d$, $\mathbf{P}(Y_n = e_i) = \mathbf{P}(Y_n = -e_i) = 1/(2d)$.*
*La suite $X_n = Y_1 + ... + Y_n$, $X_0 = 0$ s'appelle la **marche aléatoire simple** sur $\mathbb{Z}^d$.*

Théorème 11 *La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d = 1, 2$ et transiente si $d \geq 3$.*

Preuve : La marche est clairement irréductible. Donc il suffit d'étudier $\mathbf{P}^n(0,0)$, la probabilité d'être de retour en 0 au temps n. On voit immédiatement que $\mathbf{P}^n(0,0) = 0$ si n est impair. Si $n = 2p$, $\mathbf{P}^n(0,0)$ est la probabilité que, pour chaque $i = 1, ..., d$, il y ait autant de k pour lesquels $Y_k = e_i$ que de k pour lesquels $Y_k = -e_i$. Appelons $a_p^{(d)}$ cette probabilité.

Commencons par le cas $d = 1$. Alors, par la formule de Stirling,

$$a_p^{(1)} = C_{2p}^p \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi p}}.$$

La série est donc divergente : la chaîne est récurrente.

Pour $d = 2$, si l'on prend deux copies indépendantes de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, en tournant la figure de $\pi/4$, on voit que l'on obtient une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$. Plus exactement, en notant $Y_n = (Y_n^1, Y_n^2)$ la marche sur $\mathbb{Z}^2$, les marches

$$\frac{Y_n^1 + Y_n^2}{2}, \frac{Y_n^1 - Y_n^2}{2}$$

sont des marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$, donc, comme produit de deux marches aléatoires récurrentes, le couple formé de ces deux marches est récurrent. (Y_n) est donc aussi récurrente.

Le calcul explicite dans le cas $d \geq 3$ est beaucoup plus difficile, car la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ et le produit de d marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ ont des comportements différents (la première se déplace sur $2d$ points voisins, la seconde sur 2^d points voisins). Nous pouvons nous en sortir par l'astuce suivante : si $n \in \mathbb{Z}^d$, et en désignant par $x.y$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$, nous avons

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \exp(in.\theta) d\theta = \mathbf{1}_{\{n=0\}}.$$

En intégrant par rapport à la mesure $\mathbf{P}$, on obtient, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, et en notant $\phi_X(\theta) = \mathbf{E}[\exp(iX.\theta)]$ (la transformée de Fourier de la loi de X),

$$\mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbf{E}[\exp(iX.\theta)]d\theta = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \phi_X(\theta)d\theta.$$

Or, en posant $f(\theta) = \mathbf{E}[\exp(iY_1.\theta)] = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d cos(\theta_i)$, on a $\phi_{X_n}(\theta) = f(\theta)^n$ et donc

$$\mathbf{P}(X_{2p}=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} f(\theta)^{2p}d\theta.$$

Finalement, en sommant, ce qui est licite puisque tout est positif,

$$\sum_p \mathbf{P}(X_{2p}=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-f(\theta)^2}d\theta.$$

Il reste à travailler un peu pour montrer que cette intégrale est convergente si $d \geq 3$, ce qu'on peut faire en observant que les seuls endroits où cette intégrale pose problème sont en $(0,...,0)$, $(\pi,...,\pi)$ et $(-\pi,...,-\pi)$. Il faut alors faire un développement en coordonnées polaires au voisinage de chacun de ces points et on montre que l'intégrale est bien convergente. $\square$

Références

[1] T. Ligett. *Interacting Particle Systems*, 276. Springer-Verlag, New York (1985).

[2] J.R. Norris. *Markov Chains*, Cambridge University Press (1997).