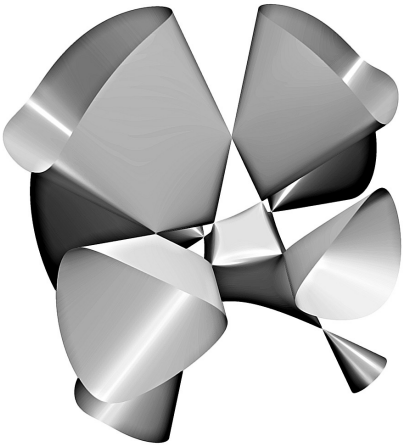
MÉMOIRE DE MAGISTÈRE

Résolution des singularités & Singularités minimales

— moult illustré —

Pierre Lairez
sous la direction d'Edward Bierstone*

soutenu le 1er juillet 2011
augmenté, revu & corrigé le 10 septembre 2011



Résumé

On s'intéresse à des résultats de désingularisation partielle des variétés algébriques, c'est-à-dire résolution des singularités en dehors d'une classe de singularités minimales.

Ce sera l'occasion de rappeler quelques éléments sur la géométrie algébrique et les éclatements et de donner quelques idées sur la résolution des singularités. Les grandes lignes d'une méthode récente de résolution (Bierstone et Milman, 1991, 1997, 2008) sont présentées. Enfin les outils construits par cette méthode sont utilisés pour résoudre les problèmes de résolution partielle.

*Fields Institute, Toronto, Canada

J'adresse ma plus profonde gratitude à Edward Bierstone pour m'avoir généreusement accueilli et formé à Toronto. Je suis tout aussi reconnaissant à Vincent Cossart et Joris van der Hoeven d'avoir pris autant de leur temps à m'initier aux problèmes de résolution. Puissé-je avoir tiré le meilleur profit de leur expérience.

Table des matières

1 Rappels de géométrie algébrique 2
1.1 Variétés affines . . . 3
1.2 Variétés projectives . . . 3
1.3 Anneaux et variétés . . . 5
1.4 Lissité . . . 6
1.5 Éclatements . . . 8

2 Quelques idées sur la résolution 11
2.1 Le problème . . . 11
2.2 Mythologie . . . 12
2.3 Exemples et cas particuliers . . . 13
2.4 Uniformisation locale . . . 15

3 Résolution selon Bierstone & Milman 18
3.1 Principes . . . 18
3.2 Résolution des idéaux . . . 18
3.3 Contact maximal . . . 20
3.4 Invariants des idéaux marqués . . . 21

4 Singularités minimales 23
4.1 Singularité de type croisement normal . . . 23
4.2 Croisements normaux simples . . . 23
4.3 Croisements normaux généraux . . . 24

1 Rappels de géométrie algébrique

Si les singularités apparaissent dans plusieurs branches des mathématiques, nous nous intéressons ici au cadre algébrique. Cette partie est à l'usage de ceux qui ignorent la chose.

Bien que l'histoire de la notion de variété algébrique soit tortue, il s'agit toujours de pouvoir manipuler le mieux possible les objets définis par équations polynomiales.

Fixons un corps k de caractéristique nulle. Pour simplifier cette introduction à la géométrie algébrique, nous le supposerons algébriquement clos.

1.1 Variétés affines

Une *variété algébrique affine* sur k est un sous-ensemble d'un k^n qui coïncide avec l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales à n variables.

Exemple 1. Voici quelques variétés affines ou non :
- l'espace affine k^n est lui-même une variété algébrique affine, notée $\mathbb{A}^n k$;
- tout comme la parabole $\{(x,y) \mid x = y^2\}$, qui est isomorphe à la droite affine *via* l'application $u \mapsto (u^2, u)$;
- le groupe $\mathrm{GL}_n k$ est une variété affine, pas en tant que sous ensemble de k^{n^2} mais de k^{n^2+1}, en effet $\mathrm{GL}_n k$ est identifiable à

$$\{(\mathrm{M}, t) \in k^{n^2} \times k \mid t \det \mathrm{M} = 1\} ;$$

- si l'ensemble $k^2 \setminus (0,0)$ est bien une variété, ce n'est pas une variété affine.

Les variétés algébriques affines de k^n sont les fermés de la topologie de Zariski. Chaque fermé est lui-même muni de la topologie induite. Une *sous-variété fermée* d'une variété affine est un fermé de Zariski. Une *variété quasi-affine* est un ouvert d'une variété affine.

Soit $\mathrm{X} \subset k^n$ une variété quasi-affine. Une application $\mathrm{X} \to k$ est *régulière* si elle s'exprime rationnellement en fonction des coordonnées de k^n et sans pôle sur X. L'espace des fonctions régulières est naturellement muni d'une structure d'anneau.

Exemple 2. L'anneau des fonctions régulières de la variété $\mathbb{A}^n$ est isomorphe à l'anneau des polynômes sur k à n variables, car une fraction rationnelle n'a pas de pôle dans $\mathbb{A}^n$ si et seulement si c'est un polynôme, car k est algébriquement clos.

Soit $\mathrm{Y} \subset k^m$ une autre variété quasi-affine. Un *morphisme de variétés quasi-affines* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une application $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ dont on peut écrire les m fonctions coordonnées comme des applications régulières de X. Un isomorphisme est bien entendu un morphisme qui admet un morphisme inverse.

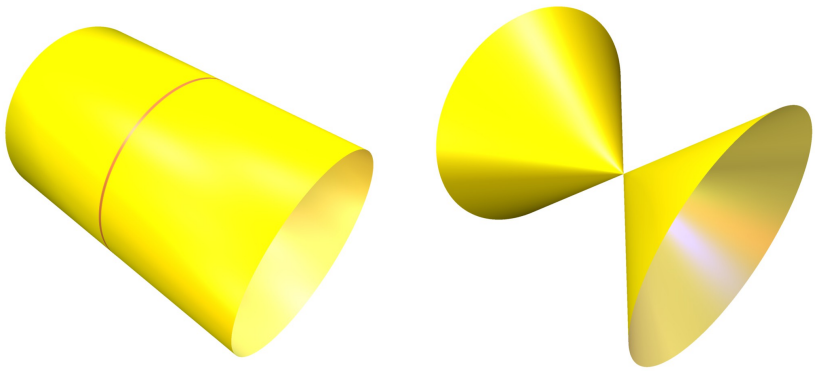
Exemple 3. Soient $\mathrm{X} \subset k^n$ une variété affine et f une fonction régulière sur X. Alors l'ouvert U défini par $\{f \neq 0\}$ est isomorphe à une variété affine par

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &\longrightarrow \{(t, \mathbf{x}) \in k \times k^n \mid \mathbf{x} \in \mathrm{X} \text{ et } t f(\mathbf{x}) = 1\} \subset \mathbb{A}^{n+1} k \\ \mathbf{x} &\longmapsto (1/f(\mathbf{x}), \vec{x}). \end{aligned}$$

Soit V un ouvert quelconque de X. On peut écrire V comme une union finie d'ouverts de la forme $\{f_i \neq 0\}$, où les f_i sont des applications régulières sur X. Par ce qui précède V est recouvert par un nombre fini d'ouverts isomorphes à des variétés affines, appelés *ouverts affines*, ou *cartes affines*.

1.2 Variétés projectives

Définissons sur $\mathbb{P}^n k$ la topologie de Zariski. On considère sur $\mathbb{P}^n k$ les coordonnées homogènes $[x_0 : \ldots : x_n]$. Les fermés sont les sous-ensembles de $\mathbb{P}^n k$ qui coïncident avec l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales homogènes à $n+1$ variables ; et les ouverts sont les complémentaires des fermés.



(a) Le cylindre $\{x^2 + y^2 = 1\}$ (b) Le cône $\{z^2 = x^2 + y^2\}$

Figure 1 – Cône et cylindre

Une *variété projective* est un fermé de $\mathbb{P}^n k$. Une *variété quasi-projective* est un ouvert d'une variété projective.

Pour chaque i, soit Ω_i^n l'ouvert défini par $\{x_i \neq 0\}$. Cet ouvert est homéomorphe à $\mathbb{A}^n k$ *via*

$$\begin{aligned} \gamma_i^n : \Omega_i^n &\longrightarrow \mathbb{A}^n k \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto (x_0/x_i, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n/x_i) \\ [x_0 : \cdots : 1 : \cdots : x_n] &\longleftarrow\!\shortmid (x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Soit $X \subset \mathbb{P}^n k$ et $Y \subset \mathbb{P}^m k$ deux variétés quasi-projectives, et $\varphi : X \to Y$ un homéomorphisme pour la topologie de Zariski. L'application φ est un *morphisme de variétés quasi-projectives* si chacune des restrictions de φ à $\Omega_i^n \cap \varphi^{-1}\Omega_j^m$ est un morphisme de variétés quasi-affines.

Un morphisme *birationnel* $X \to Y$ est morphisme qui est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense de Y. Cela peut se voir comme un morphisme dont on peut exprimer un inverse, mais avec quelques indéterminations, sous forme de pôles.

Exemple 4. Soit X la variété affine $\{x^2 = y^3\}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1 k &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

est un morphisme birationnel. En effet, sur $X \setminus (0,0)$ on a l'inverse $(x,y) \mapsto x/y$. Cet inverse partiel ne peut pas s'étendre à X tout entier. Ce morphisme est une désingularisation de X.

Exemple 5. Soit X la variété affine $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ et Y la variété $\{x^2 + y^2 = 1\}$, elle aussi plongée dans $\mathbb{A}^3 k$. L'application $(x,y,z) \in Y \mapsto (xz, yz, z) \in X$ est un morphisme birationnel. Ce morphisme du cylindre vers le cône est une désingularisation — voir figure 1.

Bien que ce soit insatisfaisant à beaucoup d'égards, on pourra définir une variété *comme un ouvert d'une variété projective*. Cela suffira à nos besoins. Pour une définition plus générale, voyez Eisenbud et Harris (2000) ou Hartshorne (1977).

L'essentiel à savoir est que :

(i) un ouvert ou un fermé d'une variété est encore une variété ;

(ii) une variété est recouverte par un nombre fini d'ouverts affines ;

(iii) on peut, dans une certaine mesure, recoller des variétés.

1.3 Anneaux et variétés

1.3.1 Nullstellensatz

Une théorème fondamental de la géométrie algébrique est le théorème des zéros de Hilbert, ou *Nullstellensatz* : il explicite le lien entre une sous-variété et ses équations, comment l'un détermine l'autre.

Soit X une sous-variété de $\mathbb{A}^n$. On peut considérer l'idéal I(V) des polynômes de $k[\mathbf{x}]$ nuls sur X, c'est-à-dire l'idéal de toutes les équations de X. C'est un idéal radical [1].

Inversement si l'on a un idéal I de $k[\mathbf{x}]$ — un autre théorème d'Hilbert indique qu'il est finiment engendré —, il définit une sous-variété V(I) en considérant l'ensemble des points de $\mathbb{A}^n k$ annulant tous les éléments de I.

Théorème 1 (Nullstellensatz, cf. Hartshorne 1977). *Le corps k est algébriquement clos. Pour* I *un idéal de* $k[x_1,\dots,x_n]$, *on pose* V(I) *la sous-variété des* $\mathbf{a} \in k^n$ *tels que pour tout* $f \in \mathrm{I}$ *la quantité* $f(\mathbf{a})$ *soit nulle ; pour* X *une sous-variété de* $\mathbb{A}^n k$, *on pose* I(X) *l'idéal des* f *de* $k[\mathbf{x}]$ *tels que* $f \restriction \mathrm{V} \equiv 0$.

Alors pour tout I *et tout* X, *on a* $\mathrm{V}(\mathrm{I}(\mathrm{X})) = \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{I}(\mathrm{V}(\mathrm{I})) = \sqrt{\mathrm{I}}$.

Exemple 6. Soit X une sous variété fermée de $\mathbb{A}^n k$ définie par un idéal I. Une fonction régulière sur X est donc une fraction rationnelle $f = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$ de $k(x_1,\dots,x_n)$ sans pôle sur X. Il est possible d'écrire f, en tant que fonction sur X, comme un polynôme de $k[x_1,\dots,x_n]$. Montrons cela.

Par hypothèse Q ne s'annule pas sur X, c'est-à-dire que la variété $\mathrm{V}(\mathrm{I}+(\mathrm{Q}))$ est vide. Par le théorème 1 l'idéal $\mathrm{I}+(\mathrm{Q})$ est donc égal à l'idéal (1), l'anneau tout entier. Écrivons alors 1 comme $\mathrm{AQ}+\mathrm{BU}$, avec U dans I. Sur X la fonction constante 1 égale donc AQ et f égale AP.

1.3.2 La catégorie des variétés affines

Soit X une sous-variété de $\mathbb{A}^n k$. Si l'idéal I(X) n'est pas intrinsèque à X — dépend du plongement dans $\mathbb{A}^n k$, n'est pas invariant par isomorphisme —, l'anneau $k[\mathbf{x}]/\mathrm{I}(\mathrm{X})$ l'est : c'est l'anneau des fonctions régulières sur X — conséquence immédiate de l'exemple 6. Notons $\mathcal{O}(\mathrm{X})$ cet anneau. C'est en fait plus qu'un anneau, c'est aussi une k-algèbre, réduite [2] et de type fini qui plus est. Le Nullstellensatz, théorème 1, se généralise facilement en remplaçant $k[\mathbf{x}]$ par $\mathcal{O}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{A}^n k$ par X.

1. Le *radical* d'un idéal I d'un anneau A, noté $\sqrt{\mathrm{I}}$ est l'idéal défini par $\{x \in \mathrm{A} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathrm{I}\}$.

Un ideal I d'un anneau A est *radical* si $\sqrt{\mathrm{I}}$ égale I, ou encore si le quotient A/I n'a pas de nilpotent.

2. Un anneau est *réduit* si l'ideal (0) est radical.

Réciproquement, soit A une k-algèbre réduite et de type fini. Par le choix de générateurs, elle peut s'écrire comme quotient $k[\mathbf{x}]/I$ d'un anneau de polynômes par un idéal radical. Et V(I) donne une variété affine. Un choix différent de générateurs donnera une variété isomorphe. C'est une conséquence facile des deux paragraphes suivants. Par emprunt à la terminologie des schémas, on notera Spec A cette variété.

Soit, maintenant, deux variétés affines X et Y ainsi qu'un morphisme f de X dans Y. Alors la composition par φ des fonctions régulières de Y donne immédiatement un morphisme $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Réciproquement, soit φ un morphisme $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. Choisissons des plongements affines de X et Y. On peut donc écrire $\mathcal{O}(X)$ comme $k[\mathbf{x}]/I$ et $\mathcal{O}(Y)$ comme $k[\mathbf{y}]/J$, avec I et J radicaux. L'image par φ de y_j est un polynôme en les x_i, modulo I.

Soit $\mathbf{u}$ un point de k^n appartenant à X — en considérant le plongement choisi à l'instant. L'application

$$\mathbf{u} \in k^n \mapsto (\varphi(y_1)(\mathbf{u}), \ldots, \varphi(y_m)(\mathbf{u})) \in k^m$$

est bien définie et établit un morphisme $X \to \mathbb{A}^m$. Il est facile de vérifier que l'image est bien incluse dans Y induisant ainsi un morphisme $X \to Y$.

Ce qui précède n'est rien d'autre qu'une équivalence de catégories.

Théorème 2. *La catégorie des variétés affines — au sens du chapitre 1 — sur k est équivalente par un foncteur contravariant à la catégorie des k-algèbres réduites et de type fini.*

Cette équivalence est d'une grande richesse car elle donne un cadre commun à la géométrie et à l'algèbre, elle permet une étude algébrique de la géométrie et une approche géométrique de l'algèbre. Par exemple, le procédé de normalisation [3] est une notion naturelle en algèbre mais n'a pas d'interprétation intuitive en géométrie, elle s'y révèle pourtant bien utile, notamment pour la résolution des singularités. À l'inverse, la notion de lissité est bien évidente en géométrie, mais elle l'est beaucoup moins en algèbre, elle s'y révèle tout autant utile.

Une généralisation de cette équivalence met en correspondance d'un côté les *schémas* affines, et de l'autre les anneaux — commutatifs et unitaires, toujours. On pourra voir Eisenbud et Harris (2000) pour plus de détails.

Exemple 7. Soit f : Spec B $\to$ Spec A un morphisme de variétés, associé à un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$. Soit I un idéal de A, réduit ou non. On note f^*I l'idéal $\varphi(I)B$ de B. Il correspond — avec une notion de multiplicité si I n'est pas réduit — à l'image réciproque de V(I) par f.

Si J est un idéal de B, on note f_*J l'idéal $\varphi^{-1}J$ de A. Il correspond à l'image directe de V(J) par f.

1.4 Lissité

Une notion importante, qui est bien sûr le point de départ de la théorie des singularités, est celle de lissité. Dans le cas où k est $\mathbb{C}$, on dira qu'une variété est lisse si elle est une sous-variété différentielle [4] de son espace ambiant. Et

3. La *normalisation* est la complétion d'un anneau par les fractions entières.

4. C'est-à-dire que muni de la topologie induite par $\mathbb{C}^n$, la variété est localement difféomorphe en chaque point à un espace affine.

Géométrie	**Algèbre commutative**
variété affine sur k	k-algèbre réduite de type fini
variété affine irréductible	algèbre intègre
sous-variété	idéal radical
sous-variété irréductible	idéal premier
sous-variété *avec multiplicité*	idéal
point	idéal maximal
morphisme $X \to Y$	morphisme $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$
morphisme $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$	morphisme $A \to B$
inclusion $V(I) \subset V(J)$	inclusion $J \subset I$
image directe d'une sous-variété	image réciproque d'un idéal
ouvert $f \neq 0$	algèbre $A[1/f]$

Table 1 – Lexique entre algèbre et géométrie

cette propriété se vérifie à l'aide du critère jacobien bien connu. On peut en fin de compte ériger le critère jacobien en définition pour généraliser la notion de lissité à n'importe quel corps.

Ainsi, une sous-variété X de $\mathbb{A}^n$, définie par des équations $f_1, \ldots, f_p$ est *lisse* en un point x de X si le rang de la jacobienne[5] des équations est égal à la codimension de X. La codimension ne sera pas définie ici mais correspond à la notion intuitive. La lissité est une notion locale, elle peut se voir dans des cartes affines.

Le *lieu singulier* d'une variété X, noté $\operatorname{Sing} X$, est l'ensemble des points où X n'est pas lisse. Ce lieu singulier est une sous-variété fermée de X.

Exemple 8. Mettons que X soit une hypersurface de $\mathbb{A}^n k$, définie par l'idéal (f). Alors le lieu singulier de X est défini par l'idéal engendré par F et toutes ses dérivées partielles.

En particulier, les points singuliers de X sont exactement les points où f est d'ordre[6] au moins 2.

La notion de lissité se généralise de manière intrinsèque à l'aide d'un peu d'algèbre. Les notions de dérivations et de critère jacobien se généralisent de manière locale aux variétés : une variété lisse est recouverte pas des ouverts affines dans lesquels la situation est similaire à $\mathbb{A}^n$. C'est la notion de *faisceau d'idéaux* : une définition locale d'équations, faite de manière suffisament consistante pour s'assurer d'un recollement en un objet global. On pourra néanmoins comprendre « idéal » pour « faisceau d'idéaux » quand on pourra se restreindre à des variétés affines.

5. La *jacobienne* des équations est la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$.

6. L'*ordre* de f en l'origine est le plus petit des degrés de ses monômes. L'ordre en d'autres points peut se voir après translation des variables.

1.5 Éclatements

Une classe toute particulière de morphismes birationnels nous intéressera : les éclatements[7]. On pourra même se restreindre aux éclatements dont les centres sont lisses. Depuis Hironaka, l'éclatement est l'opération de base de la résolution des singularités, il ne reste plus qu'à choisir les centres.

1.5.1 Construction

Nous allons construire l'éclatement du plan en l'origine. Par X notons $\mathbb{A}^2 k$.

Considérons le morphisme $\pi_y : \mathbb{A}^2 k \to X$ défini par $(u, v) \mapsto (uv, v)$, représenté par la figure 2 ; morphisme qui est bien sûr à rapprocher de la transformation polaire sur $\mathbb{R}^2$, seulement au lieu d'utiliser le module et l'argument, on utilise l'ordonnée et la cotangente de l'argument, qui eux s'expriment algébriquement en fonction des coordonnées cartésiennes. On notera que π_y n'est pas surjectif : l'axe (ox) n'est pas dans l'image. De plus cette transformation dépend lourdement du choix des coordonnées.

Du point de vue des anneaux, *via* l'équivalence de catégorie du théorème 2, le morphisme π_y correspond au morphisme $k[x, y] \to k[u, v]$ défini par $x \mapsto uv$ et $y \mapsto v$.

Ce morphisme, ainsi que quelques autres, peuvent-être exprimés en termes de sous-anneaux du corps $k(x, y)$. Notons x' et y' les fractions x/y et y/x, et considérons les sous-anneaux de $k(x, y)$ suivants :

- $k[x, y]$;
- $k[x', y]$, isomorphe à un anneau polynômes à deux variables ;
- $k[x, y']$, même remarque ;
- $k[x, y, x', y']$, qui n'est *pas* isomorphe à un anneau de polynômes.

On peut former le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} k[x,y] \arrow[r, hook, "x \mapsto x'y"] \arrow[d, hook, "y \mapsto y'x"'] & k[x',y] \arrow[d, hook] \\ k[x,y'] \arrow[r, hook] & k[x,y,x',y']. \end{tikzcd}$$

En traduisant cela dans la catégorie des variétés affines, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X & U_y \arrow[l, "\pi_y"'] \\ U_x \arrow[u, "\pi_x"] & V \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où U_x et U_y sont des variétés isomorphes à $\mathbb{A}^2 k$. La figure 2 est la représentation graphique de π_y sur $\mathbb{R}$, avec l'image d'une parabole coupant l'axe des abscisses.

Dans la catégorie des espaces topologiques on sait que l'on peut recoller[8] U_x et U_y le long de l'ouvert V pour obtenir le diagramme et la factorisation sui-

7. *Blowing up* en anglais.

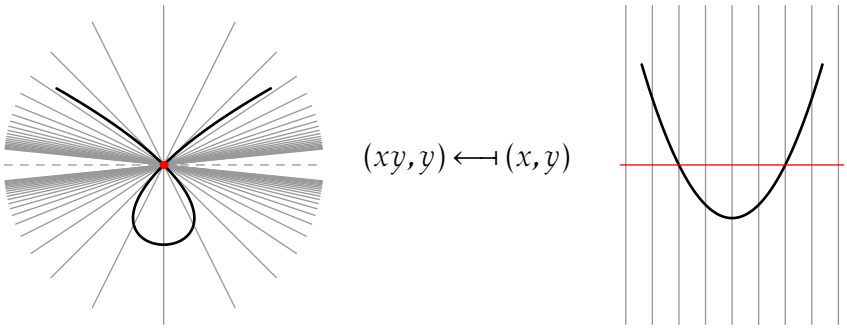


Figure 2 – Éclatement du plan et de la cubique de Tschirnhausen

vants :

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
& X' \arrow[ul, dotted, "\pi"'] & U_y \arrow[l, hook, "\iota_y"'] \arrow[ull, bend right, "\pi_y"'] \\
& U_x \arrow[u, hook, "\iota_x"] \arrow[uul, bend left, "\pi_x"] & V. \arrow[l, hook] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Pour les variétés algébriques la situation est exactement la même. On obtient ainsi l'éclatement $\pi : X' \to X$ de notre plan en l'origine. Cet éclatement ne dépend pas du choix des coordonnées. De plus π est un morphisme propre, surjectif et birationnel.

La méthode s'étend aisément. Soit $X = \operatorname{Spec} A$ une variété affine, et $I = (f_1, \ldots, f_p)$ un idéal de A. On définit des variétés $U_i = \operatorname{Spec} A[I/f_i]$, et $U_{ij} = \operatorname{Spec} A[I/f_i, I/f_j]$, où I/f_i désigne l'ensemble des éléments de Frac A s'ecrivant h/f_i, avec h dans I. On a des inclusions $U_{ij} \hookrightarrow U_i$ et on peut alors recoller les U_i le long des U_{ij}, pour donner une variété $\mathcal{E}_I X$ et un morphisme naturel $\pi : \mathcal{E}_I X \to X$.

Enfin, si X n'est pas une variété affine, on peut construire son éclaté en éclatant chacune de ses cartes affines et en montrant que l'on peut recoller tout cela de manière cohérente.

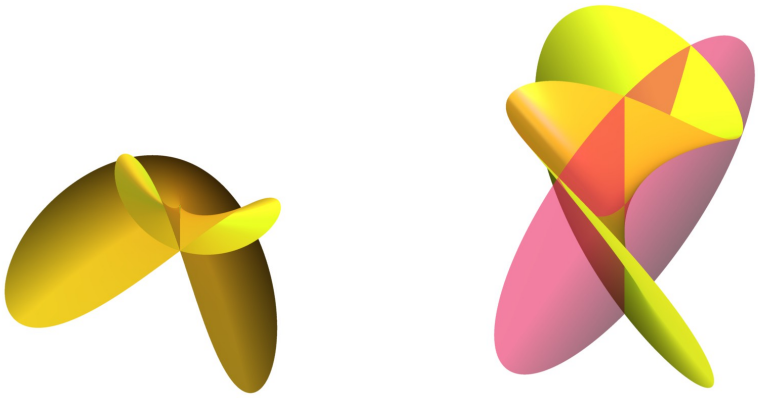
La sous-variété $\pi^{-1}V(I)$ de X', est une hypersurface car lieu des points critiques[9] de l'application π, et est donc défini localement par une seule équation : l'annulation du déterminant de la jacobienne. Cette sous-variété est appelée *diviseur exceptionnel*[10].

Si l'éclaté d'une variété lisse par un centre lisse est encore lisse ; et l'image réciproque d'un point x du centre est isomorphe au projectivisé du cotangent du centre en ce point, c'est-à-dire $\mathbb{P}(T_x X / T_x V(I))$.

8. Le recollement le long de V est l'opération topologique qui colle U_x et U_y en faisant coïncider les deux copies de V. Par exemple Æ est le recollement de A et de E le long de I.

9. C'est-à-dire les points où π n'est pas un isomorphisme local.

10. Un *diviseur* est en fait un peu plus qu'une hypersurface : il faut garder trace de la multiplicité des composantes.



(a) La variété $z^3 - x^2yz - x^4 = 0$

(b) Transformée stricte et diviseur exceptionnel (rouge)

Figure 3 – Éclatement d'une droite dans l'espace

1.5.2 Transformées

Soient X une sous-variété d'une variété fermée W, et Z une sous-variété fermée de X. Les éclatés $\mathcal{E}_Z X$ et $\mathcal{E}_Z W$ se calculent de concert.

Supposons construit $\pi : \mathcal{E}_Z W \to W$. Alors $\mathcal{E}_Z X$ est isomorphe à l'adhérence dans W de $\pi^{-1}(X \setminus Z)$, c'est la *transformée stricte* de X. La *transformée totale* de X est la sous-variété $\pi^{-1}X$, c'est l'union de la transformée stricte et du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}Z$, qui est toujours une hypersurface de $\mathcal{E}_Z W$.

Sur l'exemple de la figure [11] 3, on éclate la droite singulière de la variété représentée en 3a. En 3b sont représentés en jaune la transformée stricte et en rouge translucide le diviseur exceptionnel.

Exemple 9. Voyons un cas de calcul pratique. Éclatons l'espace affine $\mathbb{A}^n k$ en l'idéal $J = (x_1, \ldots, x_p)$. Comme expliqué au paragraphe 1.5.1, l'éclaté est décrit par p cartes, données par les anneaux

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} k\left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_p}{x_i}, x_i, x_{p+1}, \ldots, x_n\right].$$

Regardons la carte U_p et pour i entre 1 et $p-1$ notons x_i/x_p par x'_i, de sorte que A_p est $k[x'_1, \ldots, x'_{p-1}, x_p, \ldots, x_n]$. La transformée totale d'une sous-variété donnée par un idéal I est donnée par l'idéal IA_p. En particulier, la transformée totale du centre, c'est-à-dire le diviseur exceptionnel, est donnée par l'idéal JA_p, égal à $(x'_1 x_p, \ldots, x'_{p-1} x_p, x_p)$, qui n'est autre que (x_p).

Donc la transformée stricte d'une sous-variété V(I) est donnée par l'idéal

$$IA_p : (x_p)^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in A_p \,\middle|\, \exists k \geqslant 0 : x_p^k f \in IA_p \right\}.$$

Cet exemple est en fait tout à fait général du calcul local de l'éclatement d'un espace lisse en un centre lisse.

11. Les surfaces de ce mémoire sont produites avec l'excellent *surf*, `surf.sourceforge.net`.

Exemple 10. Prenons l'exemple encore plus spécifique de la figure 3. Notons f l'équation $z^3 - x^2yz - x^4$ de la surface que l'on notera X.

Le lieu singulier de X est donné par l'idéal I — ou plutôt son radical — engendré par f et ses dérivées partielles. Comme $\partial_y f$ égale $-x^2y$ et que $x\partial_x f$ égale $-2x^2yz - 4x^4$, on en conclut que I contient x^4 et donc que $\sqrt{I}$ contient x. Comme $\sqrt{I}$ contient f, il contient aussi z. Ainsi $\operatorname{Sing} X$ égale $V(x,z)$. Éclatons cette droite.

Il y a deux cartes : U_x et U_z. Dans la carte U_z l'équation de la transformée totale est donnée par $z^3 - (zx')^2yz - (zx')^4$, qui se factorise en $z^3(1 - x'^2y - zx'^4)$: le produit d'une puissance du diviseur exceptionnel et de la transformée stricte de X. L'exposant 3 du diviseur exceptionnel est une conséquence de ce que le centre de l'éclatement est inclus dans le lieu d'ordre 3 de f. On notera que cette carte n'est pas d'intérêt pour l'étude de la singularité à l'origine de X car l'image réciproque de l'origine est donnée par (z,y) et ne croise donc par la transformée stricte de X dans cette carte.

Dans la carte U_x l'équation de la transformée totale est $x^3(z'^3 - yz - x)$.

2 Quelques idées sur la résolution

2.1 Le problème

De nombreuses méthodes — comme le théorème des fonctions implicites —, de nombreuses théories relatives aux variétés algébriques — comme la théorie de Mori — ne s'appliquent que sur des objets lisses. Un problème naturel est donc de chercher à modifier une variété singulière en une variété lisse, de la manière la plus controlée possible pour espérer transférer des résultats. D'un point de vue de l'étude des singularités pour elles-mêmes — description, classification —, une résolution est un outil naturel et important.

Le problème de la résolution des singularités peut se poser de différentes manières, plus ou moins exigeantes (cf. Kollár, 2007).

Résolution faible — Étant donnée une variété X, trouver une variété propre [12] X′ lisse et birationnellement équivalente à X.

Résolution — Étant donné une variété X, trouver une variété X′ lisse munie d'un morphisme birationnel propre $X' \to X$.

Résolution forte — Étant donné une variété X, trouver une variété X′ lisse munie d'un morphisme birationnel propre $\varphi : X' \to X$ tel que :
- φ soit un isomorphisme au-dessus des points lisses de X ;
- $\varphi^{-1}(\operatorname{Sing} X)$ soit un diviseur à croisements normaux [13].

Résolution fonctorielle — Trouver une procédure de résolution, la plus forte possible, qui soit fonctorielle par rapport aux morphismes lisses.

C'est-à-dire qu'un morphisme lisse entre deux variétés singulières doit pouvoir se relever en un morphisme entre les deux résolutions. L'utilité est, par

12. On pourra entendre « projective ». Sans cela, il suffit de prendre l'ouvert de lissité, qui est bien birationnellement équivalent à la variété de départ.
13. Voir 4.1

exemple, de pouvoir relever une action de groupe.

Résolution plongée par éclatements lisses — Soit X une sous-variété d'une variété lisse W. Trouver une suite d'éclatements à centres lisses

$$W = W_0 \leftarrow \cdots \leftarrow W_p$$

telle que la transformée stricte de X dans W_p soit lisse, et la transformée totale à croisements normaux.

Ce n'est que dans ce cadre que l'on peut faire des calculs explicites.

2.2 Mythologie

Le problème est ancien, il se pose tout d'abord pour les courbes. Soit φ un polynôme de $k[x,y]$, avec $\varphi(0,0) = 0$. On se demande comment, sous la condition $\varphi(x,y) = 0$, exprimer y en fonction de x. Quand $\partial\varphi/\partial y$ n'est pas nul, la méthode de Newton — ou méthode des tangentes — nous permet de trouver une série formelle $f(x)$, et même une série convergente si l'on est sur $\mathbb{C}$, telle que $\varphi(f(x),x)$ soit nul. L'hypothèse sur la dérivée de φ n'est autre chose que la lissité en l'origine de la courbe définie par φ avec la condition supplémentaire que la tangente ne soit pas l'axe $(0y)$. Qu'en est-il si φ est singulier en l'origine ?

Isaac Newton montra comment résoudre tout de même l'équation à l'aide de séries à exposants fractionnaires (Newton, 1736), désormais nommées *série de Puiseux*. En corollaire de la méthode, on obtient une méthode effective pour le problème de la résolution forte pour les courbes, en caractéristique nulle.

Le problème fut ensuite résolu de bien des manières, la plus simple étant sans doute de prendre la normalisation qui donne immédiatement une résolution. Kollár (2007) en recense une bonne vingtaine.

Le cas des surfaces, en caractéristique nulle, fut résolu au début du XXe siècle, de plusieurs manières aussi. La première preuve réputée complète de la résolution forte des surfaces est due à Walker (1935). Oscar Zariski s'intéressa au problème et résolut, en caractéristique nulle, la question de la résolution forte des surfaces (Zariski, 1939), une version locale de la résolution faible en toute dimension [14] (Zariski, 1940) et enfin réussit à l'appliquer au cas de la dimension 3 (Zariski, 1944).

Vingt ans plus tard, la résolution forte, en toute dimension et en caractéristique nulle, fut résolu par (Hironaka, 1964), par des méthodes tout à fait différentes de celles de Zariski, et au terme d'une preuve longue et difficile. Le théorème fut dès lors très utilisé mais peu lurent la preuve, une poignée la comprit. Le travail de recherche qui suivit se concentra alors sur la compréhension des idées d'Hironaka. Plusieurs nouvelles méthodes apparurent (cf. Kollár, 2007, p. 117) simplifiant et clarifiant la preuve originale, et renforçant le résultat, notamment sur la fonctorialité, absente du résultat d'Hironaka.

Nous nous intéresserons à la méthode de Bierstone et Milman (1997, 2008), et nous montrerons comment l'utiliser pour approcher le problème des singularités minimales.

Le premier à avoir proposé une méthode entièrement algorithmique est Villamayor (1989). Une implémentation à été faite par Bodnár et Schicho (2000), mais ne peut traiter en temps raisonnable que de petits problèmes.

14. C'est l'*uniformisation locale*.

Enfin, le principal objectif depuis 1964 est la résolution en caractéristique positive, mais les obstructions sont nombreuses et difficiles. Les résultats les plus aboutis sont d'une part une version très faible de la désingularisation montrée par de Jong (1996) et d'autre part la résolution faible en dimension 3 démontrée par Cossart et Piltant (2008, 2009). Le premier des obstacles est l'absence de contact maximal, l'outil qui permet une récurrence sur la dimension en caractéristique nulle — cf. paragraphe 3.3.

2.3 Exemples et cas particuliers

Étudions quelques cas particuliers de résolution par éclatements lisses.

2.3.1 Courbes

La procédure à suivre pour la résolution des courbes est assez simple : il suffit d'éclater à chaque étape le lieu singulier, qui est un nombre fini de points, jusqu'à que lissité s'ensuive. Montrons le théorème dans le cas d'une courbe plongée dans une surface lisse.

Théorème 3. *Soit* C_0 *une courbe algébrique, contenue dans une surface* S_0. *On pose* E_0 *le diviseur vide sur* S_0.

On construit S_{i+1} *comme l'éclatement de* S_i *de centre* $\operatorname{Sing} C_i$ *; puis* C_{i+1} *comme la transformée stricte de* C_i *dans* S_{i+1} *; et* E_{i+1} *la transformée totale de* $E_i \cup \operatorname{Sing} C_i$.

Alors pour tout i, *le diviseur* E_i *est à croisements normaux, et il existe un* p *tel que* C_p *soit lisse.*

Démonstration. Étudions un point singulier de C_0. On peut supposer [15] qu'un voisinage de ce point dans S_0 est isomorphe à $\mathbb{A}^2 k$, et que ce point est l'origine.

L'équation de C_0 est alors un polynôme f dans $k[x, y]$. Soit m l'ordre de f en l'origine, avec $m > 1$.

Écrivons f sous la forme [16] $F_m(x, y) + (x, y)^{m+1}$, où $F_m(x, y)$ est un polynôme homogène d'ordre m en x et y. Considérons maintenant l'éclatement de l'origine et regardons les singularités apparaissant au dessus de celle-ci.

Dans la carte $(x, \frac{y}{x})$, l'équation de la transformée stricte de C_0 est $F_m(1, y) + (x)$. En particulier, au-dessus de l'origine, c'est-à-dire le long du diviseur exceptionnel $x = 0$, un point d'ordre m correspond à une racine d'ordre m du polynôme univarié $F_m(1, y)$.

Supposons que $F_m(1, y)$ ne soit pas une puissance m^e. Alors C_1 ne contient pas de points d'ordre m au-dessus de l'origine.

Supposons maintenant que $F_m(1, y)$ soit une puissance m^e, par exemple y^m après changement de variables, et étudions le diagramme de Newton [17] de f (fig. 4).

Comme f est d'ordre 1 sur C_0 en dehors d'un nombre fini de points, le monôme y^m ne divise pas f, ce qui implique que l'angle α est inférieur strictement à $\pi/2$. Comme $F_m(x, y)$ est exactement y^m, l'angle α est strictement supérieur à $\pi/4$.

15. Ce n'est pas tout à fait exact, mais tout marche comme si ça l'était en prenant des coordonnées régulières de S_0.

16. L'écriture « $\cdots + (x, y)^{m+1}$ » signifie « plus des termes d'ordre $m + 1$ en x et y.

17. Le *diagramme de Newton* de f est l'enveloppe convexe de l'union des quarts de plan translatés $(i, j) + \mathbb{R}_+^2$, où (i, j) est un monôme de f.

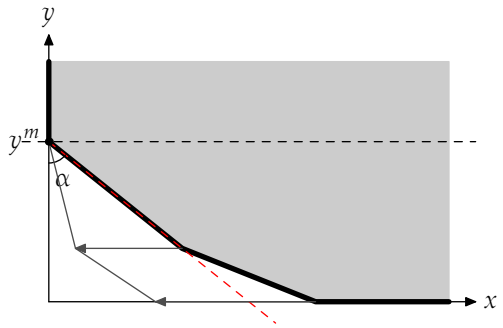


Figure 4 – Diagramme de Newton de f

L'éclatement correspond sur les monômes à la transformation $x^i y^j \mapsto x^{i+j-m} y^j$. Il est facile de voir que cette transformation fait décroitre α.

Par descente infinie, on arrive nécessairement à une baisse de l'ordre, et, par suite, à la lissité. □

2.3.2 Surfaces

Là encore plusieurs méthodes existent mais la situation est bien moins simple que pour les courbes. On peut déjà mettre en évidence quelques difficultés.

Exemple 11. Prenons — voir figure 5 — la surface X de $\mathbb{A}^3 k$ définie par l'équation $x^2 - z^2 y^2$. L'ensemble singulier est une union de deux droites définie par $x = yz = 0$.

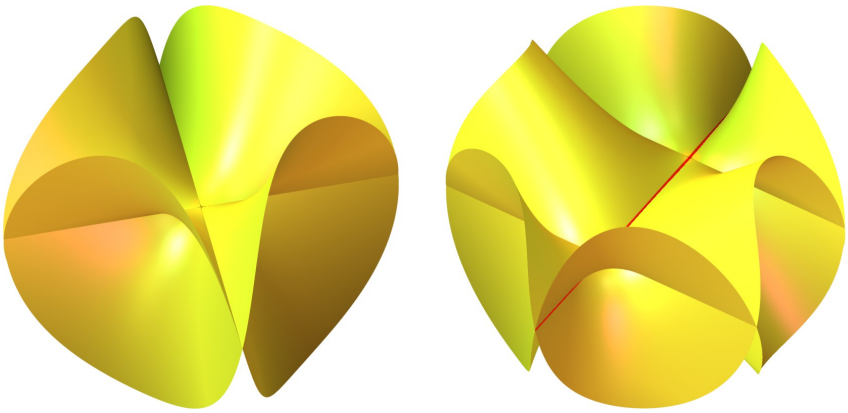
Mettons que nous voulions résoudre X avec une composée d'éclatements à centres lisses. Une procédure valable est d'éclater la droite $x = y = 0$ puis la droite $x = z = 0$ — ou plutôt sa transformée stricte. Si nous voulons désormais une procédure fonctorielle, que pouvons-nous éclater ? Certainement pas l'une des deux droites puisqu'elle ne sont pas distinguables : l'automorphisme $x \mapsto z$ les échange. Il faut donc éclater l'origine. Dans la carte x, l'équation de la transformée stricte de X est $1 - x^2 y^2 z^2$. Cette carte ne coupe pas le diviseur exceptionnel sur X. Dans la carte y, l'équation de la transformée stricte est $x^2 - y^2 z^2$. C'est-à-dire la même singularité. Dans la carte z, l'équation de la transformée stricte est encore $x^2 - y^2 z^2$. On obtient une seconde fois la singularité originelle — et on peut vérifier que ce n'est pas la même singularité vue dans deux cartes différentes. Ainsi, éclater l'origine duplique la situation.

La morale de cet exemple est qu'un algorithme fonctoriel — et donc local — doit nécessairement avoir une mémoire des éclatements précédents ou est condamné à faire apparaitre toujours plus de singularités sur cet exemple.

Donnons néanmoins un algorithme capable de contourner ces difficultés dans le cas des hypersurfaces [18].

Théorème 4. *Soit* X_0 *une surface qui est une hypersurface d'un espace lisse* W_0. *Notons* Y_0 *le lieu d'ordre au moins* d *de* X_0, *où* d *est le plus grand entier tel que* Y_0 *ne soit pas vide. Si* μ *égale* 1 *alors* X_0 *est lisse.*

18. Dans le cas des hypersurfaces, l'ordre suffit à caractériser les points singuliers, ce qui n'est pas le cas en codimension supérieure.



(a) La singularité originelle $x^2 - (y^2 - z^2)^2$ (b) La singularité dédoublée

Figure 5 – Dédoublement d'une singularité par éclatement de l'origine

On définit :
- Z_i *comme* $\operatorname{Sing} Y_i$ *ou bien, si ce dernier est vide, comme une composante quelconque du lieu d'ordre* d *de* X_i *;*
- W_{i+1} *comme l'éclaté de* W_i *en* Z_i *;*
- X_{i+1} *comme la tranformée stricte de* X_i *dans* W_{i+1} *;*
- Y_{i+1} *comme la transformée stricte de* Y_i *intersectée avec le lieu d'ordre* d *de* X_{i+1}.

Alors :

(i) pour tout i *le fermé* Z_i *est lisse et inclus dans le lieu singulier de* X_i *;*

(ii) pour un certain i *le lieu d'ordre* d *de* X_i *est vide.*

Par récurrence sur l'ordre, cet algorithme aboutit à une résolution des surfaces. On notera que cet algorithme n'est pas fonctoriel, faute d'un choix canonique quand plusieurs composantes conviennent au choix du centre.

Exemple 12. La figure 6 présente le résultat de cet algorithme de résolution sur la surface $z^2 - (x^2 - y^2 - y^3)^2 = 0$. Ici l'ordre maximal est 2. Le lieu d'ordre 2 — c'est-à-dire le lieu singulier — présente une singularité qu'il faut résoudre. C'est le premier éclatement.

Une nouvelle composante apparait dans le lieu singulier, mais celle-ci est lisse, comme le prévoit le théorème. Il reste à éclater chacune des deux composantes du lieu singulier.

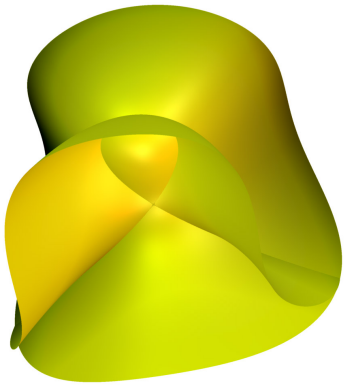
2.4 Uniformisation locale

2.4.1 Définition

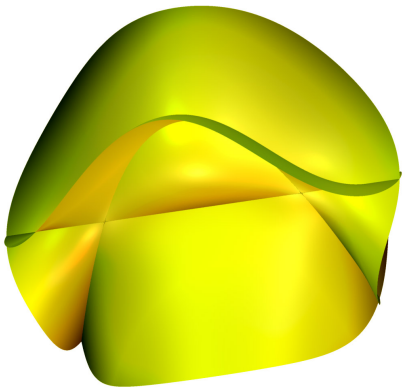
Prenons une variété X et un point a de X. Considérons alors le jeu suivant entre Alice et Bob :

Tour de jeu :

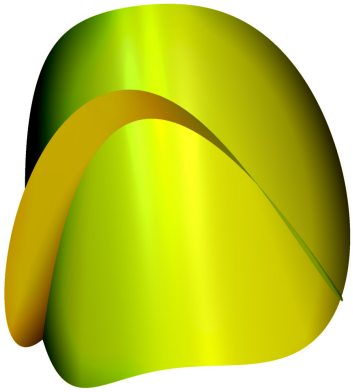
1. Alice éclate X en un fermé passant par a et lisse en a ;
2. Bob choisit un point a' au-dessus de a dans l'éclaté X' ;



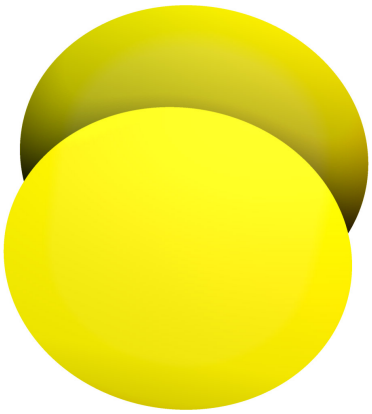
(a) La surface originelle $z^2 - (x^2 - y^2 - y^3)^2$



(b) Éclatement de la singularité du lieu singulier



(c) Éclatement d'une des composantes du lieu singulier



(d) Éclatement de l'autre composante du lieu singulier et baisse de l'ordre

Figure 6 – Illustration de l'algorithme du théorème 4

3. Les nouveaux X' et a' remplacent respectivement X et a.

Alice gagne si Bob choisit un point lisse.

Théorème 5 (Uniformisation locale). *Quels que soient* X *et* a*, il existe une stratégie gagnante pour Alice.*

Remarque. Supposons fixée une stratégie pour Alice. Nous utiliserons dans la suite les notations suivantes :
- $V_X(\varnothing)$ est X ;
- $Z_X(a_0, \ldots, a_{n+1})$, ou $Z_X(\mathbf{a}, a_{n+1})$, est le fermé de $V_X\mathbf{a}$ joué par Alice si Bob joue a_{n+1} ;
- $V_X(\mathbf{a}, a_{n+1})$ est l'éclaté de $V_X\mathbf{a}$ de centre $Z_X(\mathbf{a}, a_{n+1})$.

On notera qu'une résolution globale par éclatements lisses donne une stratégie gagnante à Alice et même une stratégie indépendante des choix de Bob.

Ce théorème d'uniformisation locale a été montrée sous une forme un peu plus faible — avec plus que des éclatements lisses — par Zariski (1940). La méthode du contact maximal — cf. paragraphe 3.3 — permet de démontrer ce théorème.

L'uniformisation locale donne une multitude de résolution partielles de X mais recouvrant X. Il est possible de montrer que l'on peut se ramener à une multitude finie. Dès lors la difficulté est de recoller des résolutions pour obtenir une résolution globale. Zariski (1944) est parvenu à le faire jusqu'en dimension 3 en caractéristique nulle, et Cossart et Piltant (2008, 2009) ont réussi à étendre la méthode en caractéristique positive.

2.4.2 De l'importance de la fonctorialité

Fixons une stratégie pour Alice. Supposons de plus que cette stratégie — pas nécessairement gagnante — puisse être définie par des fonctions

$$\begin{aligned} \omega_X(\mathbf{a}, \bullet) : V_X\mathbf{a} &\longrightarrow (\text{ordinaux}) \\ b &\longmapsto \omega_X(\mathbf{a}, b) \end{aligned}$$

en posant

$$Z_X(\mathbf{a}, b) = \{x \in V_X\mathbf{a} \mid \omega_X(\mathbf{a}, x) \geqslant \omega_X(\mathbf{a}, b)\}.$$

Supposons enfin que ces fonctions vérifient

Semi-continuité supérieure Les ensembles de la forme $\{\omega_X(\mathbf{a}, \bullet) \geqslant \lambda\}$ sont des fermés de $V_X\mathbf{a}$.

Dégressivité $\omega_X(\mathbf{a}, b) < \omega_X(\mathbf{a})$ quels que soient X, $\mathbf{a}$ et b au-dessus de $\mathbf{a}$.

Localité Si $b \notin Z_X(\mathbf{a}, a_{n+1})$ alors $\omega_X(\mathbf{a}, b) = \omega_X(\mathbf{a}, a_{n+1}, b)$.

Fonctorialité Si $\varphi : M \to N$ est un morphisme lisse de variétés lisses et Y une sous-variété de N, alors $\omega_{\varphi^*Y}(\mathbf{a})$ égale $\omega_Y(\varphi\mathbf{a})$ [19].

Alors la stratégie est *gagnante*. D'autre part en considérant à chaque étape le lieu où $\omega_X\mathbf{a}$ atteint son maximum — c'est un fermé lisse — il est possible de trouver des résolutions globales par éclatements à centres lisses.

Théorème 6 (Bierstone et Milman 2008). *Il existe de telles fonctions* ω *vérifiant la semi-continuité supérieure, la dégressivité, la localité et la fonctorialité.*

19. La suite de points $\varphi\mathbf{a}$ est définie en prenant les images de la suite de points $\mathbf{a}$ par les relevés de φ aux éclatés successifs de N par les Z_Y et de M par les φ^*Z_Y.

3 Résolution selon Bierstone & Milman

3.1 Principes

Plusieurs idées clefs ont permis la démonstration du théorème d'Hironaka et sont toujours à la base des démonstrations ultérieures.

Idéaux marqués — Le premier point technique est de reformuler la résolution des variétés en termes de résolution d'idéaux marqués. Le but est d'avoir un cadre un peu plus large que les variétés permettant d'exprimer convenablement les idées suivantes. Un idéal marqué est la donné d'un idéal de l'anneau de la variété ambiante — ou d'un faisceau d'idéaux si la variété ambiante n'est pas affine —, d'une multiplicité, et de quelques éléments techniques. Une résolution d'un idéal marqué est une suite de transformations qui aboutit à une baisse de l'ordre de l'idéal en deçà de la multiplicité initiale.

Éclatement admissible — On cherche une résolution des idéaux marqués par éclatements successifs. Pour garantir tout au long de la résolution certaines propriétés, on impose des contraintes aux centres des éclatements : ils doivent être lisses et inclus dans le lieu d'ordre maximal de l'idéal. Ainsi, la lissité de l'espace ambiant est toujours préservée et les points déjà résolus ne sont pas modifiés.

Selon les démonstrations, la notion d'éclatement admissible peut varier légèrement. De telles variations sur des détails techniques peuvent suffire à simplifier grandement une preuve.

Contact maximal — Un contact maximal est une hypersurface lisse qui contient, au moins au voisinage d'un point, le lieu d'ordre maximal de l'idéal à résoudre, et qui le contient encore après toute séquence d'éclatement admissible. Ainsi, un contact maximal permet de diminuer la dimension du problème, permettant une récurrence sur la dimension. Cependant les contacts maximaux n'existent que localement et ne sont pas uniques ; le problème est donc le recollement des résolutions locales, ou encore la globalisation des centres : comment définir localement le centre du prochain éclatement tout en assurant une cohérence globale des choix locaux ?

Équivalence d'idéaux marqués — La solution se trouve dans la fonctorialité de la résolution par rapport aux morphismes lisses. En particulier la définition des centres commute à la restriction à un ouvert. Ainsi le centre défini sur deux ouverts coïncidera sur l'intersection, quels que soient les choix effectués pour les contacts maximaux.

3.2 Résolution des idéaux

La résolution des singularités des variétés plongées peut se formuler en terme de résolution d'idéaux. Soient W une variété lisse et $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux sur W — ou simplement un idéal de $\mathcal{O}(W)$ si W est affine. Soit enfin d un entier strictement positif. Le lieu d'ordre au moins d de $\mathcal{I}$ est noté $\mathrm{cosupp}(\mathcal{I}, d)$, suivant ainsi Bierstone et Milman (2008). Rappelons que l'ordre de f à l'origine est le moindre des degrés des monômes de f. De même l'ordre d'un idéal à

l'origine est le moindre des ordres des éléments de l'idéal. On vérifie que le lieu d'ordre d de f est le lieu d'annulation de toutes ses dérivées partielles d'ordre au plus $d-1$.

Soit Z une sous-variété lisse de $\operatorname{cosupp}(\mathcal{I}, d)$. Considérons l'éclatement de centre Z noté $\pi : W_1 \to W$. Un tel éclatement est appelé *admissible* pour la paire $(\mathcal{I}, d)$.

Notons $\pi^*\mathcal{I}$ la transformée totale [20] de $\mathcal{I}$. Cet idéal se factorise en le produit $(\text{div. exc.})^{-m} \cdot \widetilde{\mathcal{I}}$, où $\widetilde{\mathcal{I}}$ est la transformée stricte de $\mathcal{I}$. L'exposant m est au moins égal à d car Z est inclus dans le lieu d'ordre au moins d de $\mathcal{I}$. On définit alors la transformée faible de $(\mathcal{I}, d)$ comme $(\mathcal{I}_1, d)$, où

$$\mathcal{I}_1 \overset{\text{def}}{=} (\text{div. exc.})^{-d} \cdot \pi^*\mathcal{I} \quad \left(= (\text{div. exc.})^{m-d} \cdot \widetilde{\mathcal{I}} \right)$$

Une résolution de $(\mathcal{I}, d)$ est une suite d'éclatements

$$W = W_0 \xleftarrow{\pi_0} W_1 \xleftarrow{\pi_1} \cdots \xleftarrow{\pi_{m-1}} W_m$$

telle que :

(i) π_i soit un éclatement admissible pour $(\mathcal{I}_i, d)$;

(ii) l'idéal $(\mathcal{I}_{i+1}, d)$ soit la transformée faible de $(\mathcal{I}_i, d)$;

(iii) $\operatorname{cosupp}(\mathcal{C}_m, d)$ soit vide.

Une telle résolution existe systématiquement.

Théorème 7 (voir Bierstone et Milman 2008). *Soit* W *une variété lisse. Pour tout faisceau d'idéaux* $\mathcal{I}$ *sur* W *et tout entier* d *strictement positif il existe une résolution de la paire* $(\mathcal{I}, d)$.

La procédure est de plus fonctorielle en les morphismes lisses.

On peut en déduire le théorème de résolution des hypersurfaces. La réduction à la résolution des idéaux de la résolution des variétés en codimension supérieure est plus délicate. Cependant le principe est équivalent, la fonction de Hilbert–Samuel remplaçant l'ordre.

Théorème 8 (voir Bierstone et Milman 2008). *Soit* W *une variété lisse et* X *une hypersurface de* W. *Il existe une suite d'éclatements*

$$W = W_0 \xleftarrow{\pi_0} W_1 \xleftarrow{\pi_1} \cdots \xleftarrow{\pi_{m-1}} W_m$$

telle que — où X_i *est la transformée stricte de* X *dans* W_i *— :*

(i) le centre de l'éclatement π_i *soit lisse et inclus* $\operatorname{Sing} X_i$ *;*

(ii) X_m *soit lisse.*

Démonstration. Pour simplifier, supposons que W est affine et égal à $\operatorname{Spec} A$. L'hypersurface X est alors donnée par une équation f de A.

Soit d l'ordre maximal de X, supposé supérieur à 2, sinon X est déjà lisse. Considérons une résolution de $(I(X), d)$ donnée par le théorème 7.

$$\begin{array}{ccccccccccl}
W & = & W_0 & \xleftarrow{\pi_0} & W_1 & \xleftarrow{\pi_1} & \cdots & \xleftarrow{\pi_{m-1}} & W_m & & \\
I(X) & = & \mathcal{I}_0 & & \mathcal{I}_1 & & & & \mathcal{I}_m & & \text{(transformées faibles)} \\
X & = & X_0 & & X_1 & & & & X_m & & \text{(transformées strictes)}
\end{array}$$

20. Voir l'exemple 7 pour la définition de l'image réciproque.

Comme d est l'ordre maximal de I(X), les transformées faibles coïncident avec les transformées strictes, c'est-à-dire que $\mathcal{I}_i = \mathrm{I}(\mathrm{X}_i)$. Comme $\mathrm{cosupp}(\mathcal{I}_m, d)$ est vide, l'ordre maximal de X_m est inférieur à d. L'ordre a baissé.

Par récurrence, l'ordre diminue jusqu'à 1, montrant ainsi la lissité de la transformée stricte de X. □

La manipulation des idéaux — où plutôt des paires $(\mathcal{I}, d)$ — et des transformées faibles est plus souple et simple que la manipulation des variétés et des transformées strictes. On peut, par exemple, exprimer plus aisément l'équivalence que représente un contact maximal.

3.3 Contact maximal

Soit X une hypersurface de $\mathbb{A}^n k$ définie par une équation $f \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}, z]$. Supposons que l'ordre de f à l'origine soit $d > 1$. Montrons comment trouver une résolution de X, au sens du théorème 8.

On peut écrire f sous la forme $z^d + a_1(\mathbf{x})z^{d-1} + \cdots + a_d(\mathbf{x})$, où les a_i sont des séries formelles en les $x_1, \ldots, x_{n-1}$, c'est le théorème de préparation de Weierstrass (voir Zariski et Samuel, 1960, th. 5, p. 139). Quitte à changer z en $z - a_1/d$, on peut supposer que a_1 est nul — ceci est parfois appelé forme de Tschirhnausen.

Quel est le lieu d'ordre d de f ? C'est le lieu d'ordre $d - i$ des dérivées partielles $\partial_z^i f$. Et l'on se convainc rapidement que $\mathrm{cosupp}(f, d)$ est l'intersection de $\mathrm{V}(z)$ et de tous les $\mathrm{cosupp}(a_i, i)$.

Soit $\mathcal{C}$ l'idéal de $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ engendré par les $a_i^{d!/i}$, idéal que l'on appellera *idéal des coefficients*. Il est clair que $a_i^{d!/i}$ est d'ordre au moins $d!$ si et seulement si a_i est d'ordre au moins i. Donc $\mathrm{cosupp}(\mathcal{C}, d!)$ égale l'intersection des $\mathrm{cosupp}(a_i, i)$. En résumé

$$\mathrm{cosupp}(f, d) = \mathrm{V}(z) \cap \mathrm{cosupp}(\mathcal{C}, d!).$$

Quelle est la situation après un éclatement d'un centre lisse inclus dans la sous-variété $\mathrm{cosupp}(f, d)$? Avec un changement de coordonnées, on peut supposer que le centre à éclater est donné par $(z, x_1, \ldots, x_p)$. L'hypothèse que V(I) est inclus dans $\mathrm{cosupp}(f, d)$ signifie $a_i \in (x_1, \ldots, x_p)^i$. Calculons la transformée stricte de f. La carte z n'a pas d'intérêt car la transformée stricte de $\mathrm{V}(z)$, contenant $\mathrm{cosupp}(f, d)$, ne coupe pas cette carte. Et toutes les cartes x_i jouant bien sûr le même rôle, il nous suffit donc de regarder la carte x_1.

L'équation de la transformée totale dans cette carte est donc

$$(x_1 z')^d + \sum_{i=2}^{d} a_i (x_1 z')^{d-1}.$$

L'appartenance $a_i \in (x_1, \ldots, x_p)^i$ se traduit en $a_i \in (x_1, x_1 x_2', \ldots, x_1 x_p')^i = (x_i)^i$. Donc on peut factoriser a_i en $x_i^i a_i'$ donnant l'équation factorisée faisant apparaitre le diviseur exceptionnel avec la multiplicité d et la transformée stricte.

$$x_1^d \left(z'^d + \sum_{i=2}^{d} a_i' z'^{d-1} \right).$$

L'équation obtenue est toujours sous forme de Weierstrass. Ainsi $\mathrm{cosupp}(f', d)$ est égal à l'intersection de $\mathrm{V}(z')$ avec chacun des $\mathrm{cosupp}(a'_i, i)$.

On peut de nouveau définir un idéal des coefficients $\mathcal{C}'$ comme engendré par les $a_i'^{d!/i}$. D'un autre côté, il y a la transformée faible de $(\mathcal{C}, d!)$, notée $\mathcal{C}_1$. Les deux coïncident.

Bien sûr, on peut encore continuer avec un éclatement admissible.

Définissons un *idéal marqué* comme un quadruplet $(\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathcal{I}, d)$, où N est une sous-variété de W, où $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux sur N, et d un entier strictement positif. Un éclatement admissible pour un idéal marqué $\underline{\mathcal{I}} = (\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathcal{I}, d)$ est un éclatement $\pi : \mathrm{W}' \to \mathrm{W}$ dont le centre est lisse et inclus dans $\mathrm{cosupp}(\mathcal{I}, d)$. La *transformée faible* de $\underline{\mathcal{I}}$ comme $(\mathrm{W}', \mathrm{N}', \mathcal{I}', d)$, où N′ est la transformée stricte de N dans W′, et $\mathcal{I}'$, faisceau d'idéaux sur N′, est la transformée faible au sens précédent.

Dans notre situation, nous avons les deux idéaux marqués $\underline{\mathcal{I}} = (\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n, \mathrm{I}(\mathrm{X}), d)$ et $\underline{\mathcal{C}} = (\mathbb{A}^n, \mathrm{V}(z), \mathcal{C}, d!)$. La discussion précédente est une démonstration de la propriété suivante.

Proposition 9. *Les idéaux marqués $\underline{\mathcal{I}}$ et $\underline{\mathcal{C}}$ ont les mêmes suites d'éclatements admissibles, au sens récursif suivant :*

> *Les sous-variétés* $\mathrm{cosupp}\,\underline{\mathcal{I}}$ *et* $\mathrm{cosupp}\,\underline{\mathcal{C}}$ *sont égales. De plus, après un éclatement admissible, les transformées faibles $\underline{\mathcal{I}}_1$ et $\underline{\mathcal{C}}_1$ ont les mêmes suites d'éclatements admissibles.*

En conséquence de la proposition 9, une résolution de $\underline{\mathcal{I}}$ équivaut à une résolution de $\underline{\mathcal{C}}$. Cependant $\dim \mathrm{N}$ égale $\dim \mathrm{W} - 1$, ce qui permet une récurrence sur la dimension. C'est néanmoins un peu trop simple.

Nous n'avons pas évoqué le fait que $\mathcal{C}$ n'est pas principal, alors que nous avons traité le cas de $\mathrm{I}(\mathrm{X})$, qui l'est. La difficulté n'est pas très importante. Notons aussi que, par définition, l'ordre maximal de $\mathrm{I}(\mathrm{X})$ est d alors que l'ordre maximal de $\mathcal{C}$ n'a pas de raison d'être $d!$. Nous n'avons pas non plus évoqué le rôle du diviseur exceptionnel qu'il est obligatoire de prendre en compte pour éviter le type de problème décrit au paragraphe 2.3.2. La difficulté est d'ordre combinatoire uniquement. Il reste enfin le problème de la localité du contact maximal. Si la forme de Weierstrass est quelque chose de très général, il n'est possible de l'obtenir que sur un voisinage d'un point donné. Il existe bien d'autres manières pour définir un contact maximal vérifiant la proposition 9, mais il est parfois impossible d'en définir un globalement. Dès lors, la récurrence sur la dimension ne peut que définir des centres localement. Comment s'assurer du bon recollement de ces définitions locales pour obtenir une résolution globale ?

3.4 Invariants des idéaux marqués

En l'état la méthode du contact maximal ne permet pas beaucoup plus que l'uniformisation locale de Zariski. La solution au problème du recollement réside en la fonctorialité de la procédure — par rapport aux morphismes lisses en général, mais la fonctorialité par rapport aux restrictions à des ouverts est suffisante pour le recollement —, ou encore l'invariance par équivalence d'idéaux marqués.

La propriété « admettre les mêmes suites d'éclatements » est une relation d'équivalence sur les idéaux marqués. Ainsi la propriété 9 affirme qu'un idéal marqué et son contact maximal sont dans la même classe d'équivalence. En particulier deux contacts maximaux sont équivalents entre eux puisqu'ils sont équivalents à l'idéal marqué originel. Aussi peu importent les choix particuliers de coordonnées, de voisinages ou d'idéaux des coefficients, la descente en dimension ne perd pas la classe d'équivalence de l'idéal marqué initial.

Lors de la descente en dimension par contact maximal, on obtient donc une totale conservation du problème au sens où les résolutions possibles sont les mêmes.

Il ne reste qu'à exprimer le centre à éclater comme un invariant de cette classe d'équivalence, commutant à la restriction à un ouvert, et la globalisation des centres sera immédiate.

Théorème 10 (Bierstone et Milman 2008). *Soit* $\underline{\mathcal{I}} = (\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathcal{I}, d)$ *et* $\underline{\mathcal{I}}'(\mathrm{W}, \mathrm{N}', \mathcal{I}', d')$ *deux idéaux marqués. Supposons qu'ils soient équivalents. Alors en particulier* $\operatorname{cosupp} \underline{\mathcal{I}}$ *égale* $\operatorname{cosupp} \underline{\mathcal{I}}'$. *Si de plus* $\dim \mathrm{N}$ *égale* $\dim \mathrm{N}'$ *alors pour tout* a *dans* $\operatorname{cosupp} \underline{\mathcal{I}}$ *le rationnel* $\operatorname{ord}_a \mathcal{I}/d$ *égale* $\operatorname{ord}_a \mathcal{I}'/d'$.

De cet invariant on peut construire un cas particulier de l'invariant de Bierstone et Milman, celui qui permet de trouver le premier éclatement à effectuer pour résoudre un idéal.

Soit $\underline{\mathcal{I}} = (\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathcal{I}, d)$ un idéal marqué. Soit a un point de W. Posons $\mathcal{I}'$ l'idéal marqué $\underline{\mathcal{I}}' = (\mathrm{W}, \mathrm{N}, \mathcal{I}, \operatorname{ord}_a \mathcal{I})$. Cet idéal atteint son ordre en a, donc il admet un contact maximal $\underline{\mathcal{C}} = (\mathrm{U}, \mathrm{M}, \mathcal{C}, e)$, sur U un voisinage de a dans W.

Définissons alors $\operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{I}}}$ sur $\operatorname{cosupp} \underline{\mathcal{I}}$ par récurrence comme

$$\operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{I}}} a = \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{ord}_a \mathcal{I}}{d}, \operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{C}}} a \right) & \text{si } \mathcal{I} \text{ n'est pas nul ;} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $\operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{I}}}$ est donc à valeur dans les suites finies de rationnels positifs avec ∞ comme symbole terminal. Cet ensemble est ordonné par l'ordre lexicographique. En raffinant un peu, il est possible de borner les dénominateurs et donc de montrer que l'ensemble des valeurs possibles de l'invariant est *bien* ordonné par cet ordre [21].

Le premier centre à éclater est le lieu où $\operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{I}}}$ atteint son maximum.

Les centres suivants s'obtiennent de manière similaire mais en complétant un peu la définition de l'invariant de sorte à prendre en compte le diviseur exceptionnel.

L'invariant est une fonction semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski, c'est-à-dire que tout ensemble de la forme $\{\operatorname{inv}_{\underline{\mathcal{I}}} \geqslant \iota\}$ est un fermé de Zariski.

Exemple 13. Considérons le parapluie de Whitney — voir figure 7 — d'équation $x^2 - yz^2 = 0$, et plus précisément l'idéal marqué associé avec multiplicité 1. Le lieu singulier est la droite (x, z). La valeur de l'invariant en l'origine est $(2, 3/2, 1, \infty)$, tandis que la valeur de l'invariant le long de la droite est $(2, 1, \infty)$. Aux points lisses, la valeur de l'invariant est $(1, \infty)$. Il faut donc éclater l'origine.

21. C'est-à-dire que toute suite décroissante stationne.

4 Singularités minimales

On suppose désormais que k est algébriquement clos.

4.1 Singularité de type croisement normal

Une singularité de type *croisement normal simple d'ordre p*, abrégé cns$p$ est une singularité qui peut s'écrire $x_1 \cdots x_p = 0$ après changement de variables algébrique. En particulier, il y a exactement p composantes algébriques lisses passant par cette singularité. L'union de deux droites est à l'intersection un cns2.

Une singularité de type *croisement normal d'ordre p*, abrégé cn$p$ est une singularité qui peut s'écrire $x_1 \cdots x_p = 0$ après changement de variables *analytique*. Par exemple, la cubique de Tschirnhausen — d'équation $x^2 - y^3 - y^2$, voir figure 2 — est un cn2 à l'origine sans être un cns2. On a en effet la factorisation $x^2 - y^3 - y^2 = (x - y\sqrt{1+y})(x + y\sqrt{1+y})$ valable analytiquement ou formellement, mais pas algébriquement : la cubique de Tschirnhausen est irréductible.

L'invariant d'une singularité cn$p$ ou cn$p$ — avant tout éclatement du moins, car nous n'avons défini que cela, mais cette valeur est la même à toutes les étapes de la résolution — est $(p, 1, \ldots, 1, \infty)$, avec $p-1$ fois le nombre 1. Notons ι_p cette valeur.

Si X est une variété, on notera X^{cn} (resp. X^{cns}) l'ouvert de X des points lisses ou de type cn (resp. cns). Le problème que l'on se pose est celui de la résolution partielle des singularités des variétés.

Question 11. Soit X une variété. Peut-on trouver un morphisme σ birationnel et propre d'une variété X′ sur X tel que :

(i) X′ n'ait que des singularités de type croisement normal (resp. croisement normal simple) ;

(ii) σ soit un isomorphisme au dessus de X^{cn} (resp. X^{cns}) ?

Cette question a été soulevée récemment par Kollár (2008).

4.2 Croisements normaux simples

Théorème 12 (Bierstone et Milman 2011). *La réponse à la question 11 est positive concernant les croisements normaux simples.*

Principes de la démonstration. Nous allons résoudre X sans éclater aucun point de croisement normal de X.

On commence par se ramener au cas où X est une hypersurface d'une variété lisse W. Notons n la dimension de W. On suit alors la procédure de résolution donnée par l'invariant — paragraphe 3.4, ce qui donne une suite d'éclatements admissibles

$$X = X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_m,$$

avec X_m lisse.

Cependant il ne faut pas aller jusqu'à X_m car on aura alors éclaté les croisements normaux. Arrêtons-nous déjà sur le premier X_p tel que la valeur maximale de l'invariant sur X_p soit ι_n. Pour tous les X_i précédents, la valeur maximale

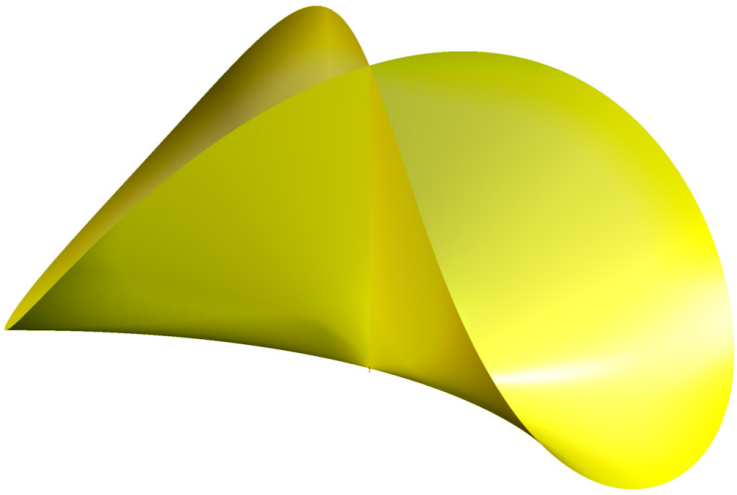


Figure 7 – Le parapluie de Whitney, ou point pince, d'équation $x^2 - yz^2 = 0$

de l'invariant est supérieure à ι_n puisque ce maximum est strictement décroissant au long de la procédure. En particulier l'invariant des centres éclatés avant la p^e étape n'est pas l'invariant d'un croisement normal. Donc aucun croisement normal n'a été éclaté.

Notons Y le lieu de X_p où l'invariant atteint sont maximum. C'est bien sûr un centre admissible, lisse en particulier.

Les composantes de Y sont de deux types : celles qui ne contiennent aucun point de croisement normal ; celles dont presque tous[22] les points sont des croisements normaux.

Les premières peuvent être éclatées pour faire baisser l'invariant. Il faut étudier les singularités des secondes. La forme particulière de ι_n permet de donner une équation explicite et de traiter tout aussi explicitement la résolution sans toucher aux croisements normaux. □

4.3 Croisements normaux généraux

La réponse à la question 11 est quant à elle négative pour les croisements normaux généraux.

Exemple 14. Considérons encore une fois X le parapluie de Whitney — voir figure 7 — d'équation $x^2 - yz^2$. Cette variété est un croisement normal le long de l'axe (x, z) sauf en l'origine. Et on ne peut pas résoudre cette singularité, ni la réduire à un croisement normal sans toucher aux autres points. Cette singularité est appelée *point pince*, abrégé pp.

Dès lors la question soulevée est la suivante.

Question 13. Soit n un entier. Donner un ensemble $\mathcal{S}$ de singularités — ou plutôt de classes de singularités à isomorphisme près — contenant les croisements normaux, minimal pour l'inclusion et tel que pour toute variété X de dimension n on puisse trouver un morphisme σ birationnel et propre d'une variété X′ sur X tel que :

22. C'est-à-dire « tous en dehors d'un ouvert dense ».

(i) X' n'ait que des singularités dans $\mathcal{S}$;

(ii) σ soit un isomorphisme au dessus de X^{cn} ?

Cette question se traite de la même manière que le théorème 12. On se ramène à l'étude des singularités se trouvant sur une composante génériquement croisement normal sur laquelle l'invariant est constant. Il y a deux difficultés supplémentaires : d'une part il faut exhiber des singularités qui ne sont pas des croisements normaux ; d'autre part il faut montrer la minimalité des singularités obtenues.

En dimension 2 l'ajout du point pince aux croisements normaux suffit à obtenir les résolutions souhaitées.

Théorème 14 (Bierstone et Milman 2011). *L'ensemble* $\{nc2, nc3, pp\}$ *convient à la question 13 pour* $n = 2$.

En dimension 3 l'affaire est plus compliquée. L'étude des limites de croisements normaux triples fait apparaitre de nouvelles singularités.

Théorème 15 (Bierstone, Lairez, et Milman 2011). *Soit* X *une hypersurface d'une variété* W *lisse et de dimension* 4, *définie par une équation* f, *et soit* a *un point de* X. *Supposons qu'il existe des coordonnées* (w, x, y, z) *de* W *en* a *telles que :*

(i) w *soit l'équation du diviseur exceptionnel s'il* y *en a un ;*

(ii) presque tout point de X *appartenant à l'axe* w *soit un croisement normal triple ;*

(iii) $\mathrm{inv}_X p$ *égale* ι_3.

Alors après éclatements à centres inclus dans le diviseur exceptionnel la singularité en p *est isomorphe à l'une des singularités suivantes :*

- *un croisement normal triple ;*
- *une singularité produit* $z(x^2 - wy^2)$, *abrégé prod ;*
- *une singularité cyclique* $x^3 + wy^3 + w^2z^3 - 3wxyz$, *abrégé sc3.*

Ces singularités limites de nc3 ne peuvent être enlevées. De plus une dernière singularité apparait au voisinage des singularités cs3 : le point pince dégénéré d'équation $z^2 + (y + 2x^2)(y - x^2)^2$, abrégé ppd.

Théorème 16 (Bierstone, Lairez, et Milman 2011). *L'ensemble*

$$\{cn2, cn3, cn4, sc3, pp, ppd\}$$

est une solution à la question 13 pour $n = 3$.

Références

Edward Bierstone, Pierre Lairez et Pierre D. Milman : Resolution except for minimal singularities II. The case of four variables. 07 2011. URL http://arxiv.org/abs/1107.5598.

Edward Bierstone et Pierre D. Milman : A simple constructive proof of canonical resolution of singularities. *In Effective methods in algebraic geometry (Castiglioncello, 1990)*, volume 94 de *Progr. Math.*, pages 11–30. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

Edward Bierstone et Pierre D. Milman : Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Invent. Math.*, 128(2):207–302, 1997. ISSN 0020-9910. URL http://dx.doi.org/10.1007/s002220050141.

Edward Bierstone et Pierre D. Milman : Functoriality in resolution of singularities. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44(2):609–639, 2008. ISSN 0034-5318. URL http://dx.doi.org/10.2977/prims/1210167338.

Edward Bierstone et Pierre D. Milman : Resolution except for minimal singularities I. À paraitre, 2011.

Gábor Bodnár et Josef Schicho : A computer program for the resolution of singularities. *In Resolution of singularities (Obergurgl, 1997)*, volume 181 de *Progr. Math.*, pages 231–238. Birkhäuser, Basel, 2000.

Vincent Cossart et Olivier Piltant : Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings. *J. Algebra*, 320(3):1051–1082, 2008. ISSN 0021-8693. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.03.032.

Vincent Cossart et Olivier Piltant : Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II. *J. Algebra*, 321(7):1836–1976, 2009. ISSN 0021-8693. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.11.030.

Aise Johan de Jong : Smoothness, semi-stability and alterations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (83):51–93, 1996. ISSN 0073-8301. URL http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1996__83__51_0.

David Eisenbud et Joe Harris : *The geometry of schemes*, volume 197 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. ISBN 0-387-98638-3 ; 0-387-98637-5.

Robin Hartshorne : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. ISBN 0-387-90244-9. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

Heisuke Hironaka : Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2)*, 79:205–326, 1964. ISSN 0003-486X.

János Kollár : *Lectures on resolution of singularities*, volume 166 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. ISBN 978-0-691-12923-5 ; 0-691-12923-1.

János Kollár : Semi log resolutions. arXiv :0812.3592v1, 2008.

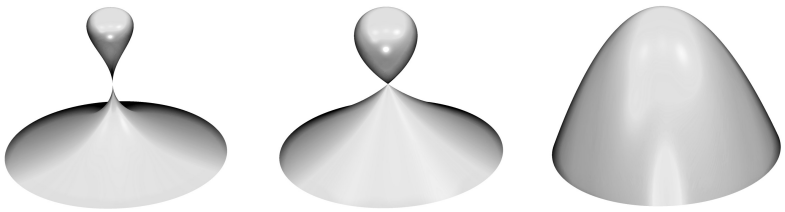
Isaac Newton : *The method of fluxions and infinite series : with its application to the geometry of curve-lines*. printed by Henry Woodfall ; and sold by John Nourse, 1736. URL http://books.google.com/books?id=WyQOAAAAQAAJ. Publication posthume.

Orlando Villamayor : Constructiveness of Hironaka's resolution. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(1):1–32, 1989. ISSN 0012-9593.

Robert J. Walker : Reduction of the singularities of an algebraic surface. *Ann. of Math. (2)*, 36(2):336–365, 1935. ISSN 0003-486X. URL http://dx.doi.org/10.2307/1968575.

Oscar Zariski : The reduction of the singularities of an algebraic surface. *Ann. of Math. (2)*, 40:639–689, 1939. ISSN 0003-486X.

Oscar Zariski : Local uniformization on algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 41:852–896, 1940. ISSN 0003-486X.

Oscar Zariski : Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties. *Ann. of Math. (2)*, 45:472–542, 1944. ISSN 0003-486X.

Oscar Zariski et Pierre Samuel : *Commutative algebra. Vol. II.* The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York, 1960.