# Loi de Weyl et ergodicité quantique sur le tore

Thibault LANGLAIS, Basile MORANDO
Sous la direction de Laurent CHARLES

18 juin 2018

Mémoire de première année

### Remerciements

Nous tenons à remercier Laurent Charles pour son temps, sa disponibilité et ses conseils. Nous avons pris grand plaisir à découvrir avec lui une nouvelle branche des mathématiques.

## Avant-propos

L'analyse semi-classique s'intéresse aux liens entre les deux grandes théories non relativistes qui régissent la mécanique. La mécanique classique décrit de manière satisfaisante l'évolution des systèmes macroscopiques. Néanmoins, elle ne permet pas de résoudre certains problèmes, comme par exemple le spectre d'émission discret des atomes. Ces problèmes ont été résolus par l'introduction de la mécanique quantique au début du XXe siècle, depuis la quantification de l'énergie par M. Planck en 1900 jusqu'au formalisme actuel élaboré notamment par P. Dirac et E. Schrödinger dans les années 1920. Cette théorie fait apparaître une nouvelle constante fondamentale, la constante de Planck $\hbar$. D'un point de vue mathématique, on peut voir $\hbar$ comme un paramètre que l'on peut faire tendre vers 0 : on parle de limite semi-classique. On peut justifier l'étude de cette limite de deux manières. Tout d'abord, on s'attend à ce que le comportement des objets quantiques s'approche de celui des objets classiques lorsque $\hbar$ tend vers 0. En effet, dans de nombreux cas, les effets quantiques disparaissent lorsque les grandeurs caractéristiques du système considéré deviennent grandes devant $\hbar$. Ensuite, l'étude des propriétés quantiques à $\hbar$ fixé s'avère souvent très difficile, alors qu'il est plus simple d'obtenir des résultats asymptotiques.

Dans les années 1930, Hermann Weyl introduit la quantification qui porte son nom. La quantification désigne le principe de construction des opérateurs quantiques associés aux opérateurs classiques définis sur l'espace des phases. Cet exposé s'intéresse aux propriétés de cette quantification lorsque l'espace des phases est le tore $\mathbf{T}^2$. Nous montrons notamment deux résultats marquants dans ce modèle. Le premier est la *Loi de Weyl* qui affirme que les résultats de mesures quantiques se répartissent comme ceux des mesures classiques dans la limite semi-classique. Le second est le *théorème de Schnirelmann*, qui stipule que presque tous les états propres d'un opérateur quantique dont l'analogue classique est ergodique sont équidistribués dans la limite semi-classique.

## Résultats majeurs

Après une brève approche qualitative, nous construisons la quantification de Weyl sur le tore :

**Théorème.** *Il existe une suite d'applications* $\mathrm{Op}_N : \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^N)$ *qui satisfait les propriétés suivantes :*

*(i)* $\mathrm{Op}_N(1) = id_{\boldsymbol{C}^N}$ *et* $\mathrm{Op}_N$ *est* $\boldsymbol{C}$*-linéaire*

*(ii)* $\mathrm{Op}_N(\overline{a}) = \mathrm{Op}_N(a)^\dagger$ *pour tout* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$

*(iii)* *pour toutes fonctions* $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, $\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) = \mathrm{Op}_N(ab) + r_N(a,b)$ *avec* $\|r_N(a,b)\| \longrightarrow 0$ *quand* $N$ *tend vers l'infini.*

*(iv)* *pour* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, *on a* $\frac{1}{N}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_N(a)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\boldsymbol{T}^2} a \,\mathrm{d}\mu$

Dans la suite de notre mémoire, nous nous intéressons aux propriétés d'ergodicité quantique. Nous démontrons tout d'abord que nous pouvons quantifier l'action du sous-groupe $G$ de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $ab \equiv cd \equiv 0$ [2].

**Théorème.** *Il existe une représentation unitaire* $\mathrm{U}_N$ *de* $G$ *sur* $\boldsymbol{C}^N$ *telle que pour tout* $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ *et pour tout* $g \in G$ *on a :*

$$\mathrm{U}_N(g)\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(g)^\dagger = \mathrm{Op}_N(f \circ g^{-1})$$

Nous caractérisons ensuite les éléments dont l'action sur le tore est classiquement ergodique. Le dernier grand résultat que nous présentons est le théorème de Schnirelmann, que nous démontrons dans le cas particulier du tore :

**Théorème.** *Soit* $\varphi$ *un élément ergodique de* $G$, *et considérons pour tout* $N$ *une base propre* $(\psi_j^N)$ *de* $\mathrm{U}_N(\varphi)$. *Alors il existe une suite d'ensembles* $E(N) \subset \{1, ..., N\}$ *telle que :*

*(i)* $\frac{\#E(N)}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$

*(ii)* *pour toute suite* $(j_N)$ *telle que* $j_N \in E(N)$, *pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, *on a :*

$$\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_{j_N}^N | \psi_{j_N}^N \rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\boldsymbol{T}^2} f \mathrm{d}\mu$$

# Table des matières

# Introduction

Notre mémoire étudie certaines propriétés des objets mathématiques présents en mécanique quantique, il semble donc utile de rappeler comment cette théorie est formulée mathématiquement.

En mécanique analytique (mécanique classique), l'état d'un système est représenté par un point de l'espace des phases de coordonnées $(q_i, p_i)$, qui correspondent aux positions et aux impulsions des particules composant le système à un instant donné. L'évolution du système est régie par le principe de moindre action, qui implique en particulier l'existence d'une fonction $H$, appelée hamiltonien du système, telle que les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

En général le hamiltonien d'un système correspond à son énergie. Toutes les grandeur physiques liées au système (énergie cinétique, énergie potentielle, moment cinétique, etc.) sont des fonctions des variables $(q_i, p_i)$. On parlera d'*observables classiques*.

En mécanique quantique, l'état d'un système est représenté par un vecteur $\psi$ normalisé d'un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$. Pour toute grandeur physique A liée au système, il existe un opérateur hermitien $A$ sur $\mathcal{H}$, appelé *observable quantique* de la grandeur A, tel que la valeur moyenne des mesures de la grandeur A sur le système dans l'état $\psi$ est donnée par $\langle A \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle$. De plus, l'évolution du système est régie par l'équation de Schrödinger $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$, où $H$ est le hamiltonien quantique du sytème, c'est-à-dire l'observable qui correspond au hamiltonien classique. Si la valeur de $\hbar$ est fixée pour la physique, rien n'empêche de la voir comme un paramètre que l'on peut faire varier d'un point de vue mathématique.

Ainsi, une grandeur physique A est représentée en mécanique classique par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur l'espace des phases, et en mécanique quantique par un opérateur hermitien $A_\hbar$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\hbar$, pour une certaine valeur de $\hbar$. L'idée est d'étudier le lien entre les opérateurs quantiques $A_\hbar$ et la fonction $a$ dans la *limite semi-classique*, i.e. lorsque l'on fait tendre $\hbar$ vers 0.

Dans notre mémoire, nous étudierons donc la limite semi-classique dans le cadre d'un *toy-model* qui est le tore $\mathbf{T}^2$, pour éviter les nombreuses difficultés techniques qui apparaissent lorsque l'espace des phases classiques est $\mathbf{R}^{2d}$. De plus, le paramètre considéré ne sera pas $\hbar$ mais un entier $N$ tel que $\hbar = \frac{1}{N}$. Ce sera aussi la dimension de l'espace de Hilbert considéré : la limite semi-classique sera alors obtenue pour $N$ tendant vers l'infini. Ce choix est justifié par des considérations théoriques que l'on peut trouver dans [DEG03]. Enfin, cette correspondance entre les fonctions classiques (position, énergie...) sur l'espace des phases, et les observables quantiques associés (qui sont donc des endomorphismes de $\mathbf{C}^N$) sera naturellement étudié sous l'angle d'une suite d'applications $\mathrm{Op}_N : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{C}^N)$. On imposera à cette application de vérifier un certain nombre de règles qui sont indispensables à la cohérence du modèle, nous construirons une telle suite d'opérateurs, avant d'étudier les propriétés de tels objets. Une telle suite d'opérateurs sera nommée *quantification*. Il n'y a pas unicité de la quantification, mais toutes les quantifications coïncident dans la limite semi-classique.

### Quelques notations

Dans tout le mémoire, les couples seront notés en gras : on aura par exemple $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$.

La transconjuguée de $M$ sera notée $M^\dagger$, la conjuguée $\overline{M}$.

Remarquons que $\mathbf{C}^N$ peut être vu comme l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$. Cette vision de $\mathbf{C}^N$ en tant qu'ensemble de fonctions périodiques nous incite à introduire les transformées de Fourier discrètes. On pose donc $\mathcal{F}_N : \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}^N$, $\mathcal{F}_N\psi(q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \psi(k) e^{\frac{-2i\pi kq}{N}}$ la transformée de Fourier discrète, et $\mathcal{F}_N^{-1}\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^N \psi(q) e^{\frac{2i\pi kq}{N}}$ la transformée inverse.

Enfin, on notera $\mu$ la mesure de Lebesgue sur le tore.

# 1 Approche qualitative

## 1.1 Particule ponctuelle 1D

Dans cette partie, nous allons observer comment se construit l'espace de modélisation quantique dans le cas d'une particule 1D. L'espace des phases est alors $\mathbf{R}^2$, et l'espace de hilbert $L^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Nous chercherons à repérer dans le cas du tore quelques éléments de la première construction, et à justifier ainsi l'importance de certaines observables dont on se servira par la suite. Notons cependant ceci : si l'approche de la physique quantique pour un espace des phases $\mathbf{R}^2$ peut s'appuyer sur des considérations physiques, l'exemple du tore quantique est essentiellement formel, et ne décrit aucun objet physique. En effet, si l'on peut raisonnablement périodiser la position (particule sur un cercle), il est plus compliqué de faire de même avec l'impulsion.

Prenons donc l'exemple d'une particule ponctuelle 1D. En mécanique classique, l'état d'une particule est déterminé par sa position $x$ et son impulsion $p$. En mécanique quantique, il doit donc exister sur $\mathcal{H}_\hbar$ deux observables (rappelons que ce sont des opérateurs linéaires hermitiens) $X$ et $P$, telles que pour tout état quantique $\psi \in \mathcal{H}_\hbar$, la position moyenne de la particule dans l'état $\psi$ est donnée par $\langle X\psi|\psi\rangle$ et son impulsion moyenne par $\langle P\psi|\psi\rangle$. Par ailleurs, la position et l'impulsion de la particule sont les seuls paramètres qui déterminent le système, donc la donnée des opérateurs $X$ et $P$ doit déterminer entièrement la modélisation quantique du système. En particulier, les conditions imposées à $X$ et $P$ déterminent $\mathcal{H}_\hbar$. Par des considérations qualitatives, on peut montrer que la condition imposée est $[X, P] = i\hbar$. Il se trouve que l'espace le plus simple sur lequel des opérateurs $X$ et $P$ existent et vérifient cette relation de commutation est $\mathcal{H}_\hbar = L^2(\mathbf{R})$ muni des opérateurs $X$ et $P$ définis par $X\psi(x) = x\psi(x)$ et $P\psi(x) = -i\hbar\psi'(x)$. Il faut toutefois faire attention au domaine de définition des opérateurs car beaucoup de difficultés techniques importantes apparaissent dans le cas de la particule ponctuelle, mais nous allons voir que dans le cas du tore, l'espace $\mathcal{H}_\hbar$ est de dimension finie et les opérateurs considérés sont partout bien définis.

## 1.2 Tore quantique

Passons maintenant au tore quantique et essayons d'appliquer le même type de raisonnement. Rappelons que les valeurs de $\hbar$ possibles sont discrètes et proportionnelles à l'inverse des entiers, et donc l'espace de modélisation quantique est indexé par un entier $N$, la limite semi-classique consistant à faire tendre $N$ vers l'infini. On admet aussi que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_N$ peut être pris égal à $\mathbf{C}^N$.

Posons alors deux observables fondamentales sur $\mathbf{C}^N$, qui joueront un rôle crucial dans la suite des constructions. Ils sont au tore ce que $X$ et $P$ sont à la particule 1D.

**Définition 1.1.** Pour tout $\psi \in \mathbf{C}^N$ (vu comme l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$), on pose $t_1\psi(q) = e^{\frac{2i\pi q}{N}}\psi(q)$ et $t_2\psi(q) = \psi(q-1)$.

**Propriété.** *Les opérateurs $t_1$ et $t_2$ vérifient les propriétés suivantes :*

1. *$t_1$ et $t_2$ sont linéaires et unitaires*
2. *On a clairement $t_1^N = t_2^N = 1$*
3. *$t_2t_1\psi(q) = t_1\psi(q-1) = e^{\frac{2i\pi(q-1)}{N}}\psi(q-1)$, et $t_1t_2\psi(q) = e^{\frac{2i\pi q}{N}}t_2\psi(q) = e^{\frac{2i\pi q}{N}}\psi(q-1) = e^{\frac{2i\pi}{N}}t_2t_1\psi(q)$ce qui donne la relation $[t_1, t_2] = e^{\frac{2i\pi}{N}}$*
4. *Il vient par récurrence $[t_1^{m_1}, t_2^{m_2}] = e^{\frac{2i\pi m_1 m_2}{N}}$*

On peut construire toute une famille d'observables à partir de $t_1$ et $t_2$, en les multipliant entre eux. On définit une famille privilégiée de telles observables :

**Définition 1.2.** On pose $T_N(\boldsymbol{m}) = e^{-\frac{i\pi m_1 m_2}{N}}t_1^{m_1}t_2^{m_2}$

*Remarque.* On aurait pu faire un autre choix de phase, mais celui ci est le plus symétrique : on « coupe la poire - et le commutateur - en deux »...

**Lemme 1.1.** *$T_N(\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{n}) = e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{N}}T_N(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, où $\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = m_1n_2 - m_2n_1$.*

Cette relation s'obtient directement en calculant avec les relations de commutation des $t_i$. Cette propriété de multiplication n'est pas anodine. Développons un peu : si on prend $\alpha$ et $\beta$ deux entiers, on aura :

$$(e^{\frac{i\pi\alpha}{N}}T_N(\boldsymbol{m}))\cdot(e^{\frac{i\pi\beta}{N}}T_N(\boldsymbol{n})) = e^{\frac{i\pi(\alpha+\beta+\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}))}{N}}T_N(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$$

On remarque que les calculs restent vrai pour $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbf{Z}/2N\mathbf{Z}$, et $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ dans $(\mathbf{Z}/2N\mathbf{Z})^2$. On vient en fait de définir une représentation irréductible du groupe de Heisenberg $\mathbf{H}(N)$.

**Définition 1.3.** On définit pour tout $N$ le groupe $\mathbf{H}(N) = (\mathbf{Z}/2N\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z}/2N\mathbf{Z}$ muni de la loi de groupe $(\boldsymbol{m},\alpha)(\boldsymbol{n},\beta) = (\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}, \alpha+\beta+\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}))$, où $\omega$ désigne la forme symplectique $\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = m_1n_2 - m_2n_1$.

Il est clair par le lemme 1.1 que $\varrho_1 : (\boldsymbol{m},\alpha) \longmapsto e^{\frac{i\pi\alpha}{N}}T_N(\boldsymbol{m})$ est une représentation. Cette représentation est irréductible puisque $t_1$ admet comme base propre la base canonique de $\mathbf{C}^N$ et que $t_2$ agit cycliquement sur les éléments de cette base.

**Théorème 1.1.** *$\varrho_1$ est l'unique représentation irréductible de $\boldsymbol{H}(N)$ telle que $(N,0,0)$ et $(0,N,0)$ agissent trivialement et $(0,0,1)$ agit par $e^{\frac{i\pi}{N}}$.*

*Démonstration.* Considérons une telle représentation. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A = \varrho_1(1,0,0)$, et $\psi$ un vecteur propre associé. $\lambda$ est une racine $N$-ième de l'unité puisque par hypothèse $A^N = 1$. Notons $B = \varrho_1(0,1,0)$. Le commutateur de $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ est $(0,0,2)$ qui agit par $e^{\frac{2i\pi}{N}}$ et donc $AB\psi = e^{\frac{2i\pi}{N}}BA\psi$ donc $AB\psi = e^{\frac{2i\pi}{N}}\lambda B\psi$. Ainsi $B\psi$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $e^{\frac{2i\pi}{N}}\lambda$, et donc $B^k\psi$ est une vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $e^{\frac{2i\pi k}{N}}\lambda$, et quitte à changer les notations, on peut choisir $\lambda = 1$. Ainsi en l'espace vectoriel engendré par les $B^k\psi$ pour $0 \leqslant k \leqslant N-1$ est stable par l'action de $\mathbf{H}(N)$ (on utilise ici le fait que $B^N = 1$). La représentation étant irréductible, cette famille forme donc une base de l'espace. L'action de $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ sur cette base est déterminée, et puisque ces éléments engendrent le groupe $\mathbf{H}(N)$, on obtient bien l'unicité de la représentation. □

*Remarque.* En fait, on aurait pu construire les éléments $t_1$ et $t_2$ simplement en s'intéressant aux représentation irréductibles de $\mathbf{H}(N)$, et donc construire notre espace uniquement en supposant l'existence de deux opérateurs qui sont d'ordre $N$ et dont le commutateur vaut $e^{\frac{2i\pi}{N}}$. Une approche similaire est présentée dans [DEG03], et justifie au passage la discrétisation de $\hbar$. On fait ici le lien avec le cas $\mathbf{R}^2$ : l'espace de Hilbert est avant tout déterminé par deux observables particulières qui ne commutent pas, et par leur commutateur.

# 2 Quantification de Weyl sur le tore

## 2.1 Principes de quantification

Maintenant que nous avons construit $\mathcal{H}_N$, essayons de fixer un certain nombre de règles qui permettront de définir une quantification $\mathrm{Op}_N : \mathbf{T}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{C}^N)$.

La propriété qui définit les observables quantiques est que, si $A$ est une observable associée à un grandeur physique A, la moyenne de la grandeur A mesurée dans un état physique $\psi$ est donnée par la formule $\langle A\rangle = \langle A\psi|\psi\rangle$. Cette propriété est essentiellement linéaire. Il est donc naturel de demander que $\mathrm{Op}_N$ soit linéaire. Par ailleurs, la même considération nous pousse à imposer $\mathrm{Op}_N(1) = id_{\mathbf{C}^N}$. D'autre part, puisque on va considérer des fonctions qui prennent des valeurs complexes, on va aussi étudier le lien avec la conjugaison. Si A est une grandeur physique complexe, dans un état $\psi$ la moyenne de $A$ vaut $\langle A\rangle = \langle A\psi|\psi\rangle$. Il semble naturel de demander $\langle \overline{A}\rangle = \overline{\langle A\rangle}$ ce qui vaut aussi $\langle A^\dagger\psi|\psi\rangle$. On imposera donc $\mathrm{Op}_N(\overline{a}) = \mathrm{Op}_N(a)^\dagger$. Intéressons nous maintenant aux liens entre produits (d'observables ou de fonctions) et $\mathrm{Op}_N$ : que demander à $\mathrm{Op}_N(ab)$ ? Il n'est pas raisonnable de vouloir $\mathrm{Op}_N(ab) = \mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b)$, car cela impliquerait que pour toutes fonctions $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2), \mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) = \mathrm{Op}_N(b)\mathrm{Op}_N(a)$. Or le produit des matrices n'est pas commutatif contrairement à celui des fonctions, ce qui pose problème dans la définition des observables. Par ailleurs, il est bien connu qu'en physique quantique, les observables ne commutent pas toujours : on a par exemple considéré les observables $t_1$ et $t_2$ dans la section 1.1. Toutefois, on impose que dans la limite semi-classique, le commutateur de deux observables tende vers 0. En effet, en physique quantique, le commutateur de deux grandeurs est souvent multiple de $\hbar$, et il est clair qu'en physique classique, le produit de fonctions est commutatif. On demande donc $\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) = \mathrm{Op}_N(ab) + r_N(a,b)$ avec $\|r_N\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Définition 2.1.** Une quantification sur le tore est une suite d'applications $\mathrm{Op}_N$ : $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{C}^N)$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\mathrm{Op}_N(1) = id_{\mathbf{C}^N}$ et $\mathrm{Op}_N$ est $\mathbf{C}$-linéaire

(ii) $\mathrm{Op}_N(\overline{a}) = \mathrm{Op}_N(a)^\dagger$ pour tout $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$

(iii) pour toutes fonctions $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$, $\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) = \mathrm{Op}_N(ab) + r_N(a,b)$ avec $\|r_N(a,b)\| \longrightarrow 0$ quand $N$ tend vers l'infini.

## 2.2 Une quantification du tore

Avant de passer à l'énoncé du résultat principal de cette section, on énonce un lemme classique de décroissance des coefficients de Fourier :

**Lemme 2.1.** *Pour tout $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{C})$ et pour tout entier $k \in \boldsymbol{N}$, il existe une constante $C_k \in \boldsymbol{R}$ telle que pour tout $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^2$, on a $|\widehat{a}(\boldsymbol{m})| \leq C_k \left(1 + \sqrt{m_1^2 + m_2^2}\right)^{-k}$.*

*Démonstration.* On a

$$|\widehat{a}(\boldsymbol{m})| = |\int_0^1 e^{-2i\pi m_2 x_2} \int_0^1 a(x_1, x_2) e^{-2i\pi m_1 x_1} dx_1 dx_2 \,|$$

Si $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ :

$$I = \int_0^1 a(x_1,x_2)e^{-2i\pi m_1 x_1} dx_1 = \left[\frac{a(x_1,x_2)e^{-2i\pi m_1 x_1}}{-2i\pi m_1}\right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi m_1}\int_0^1 \partial_1 a(x_1,x_2)e^{-2i\pi m_1 x_1} dx_1$$

Par périodicité de $a$, le premier terme est nul, et en itérant $k$ fois, on obtient :

$$I = \frac{1}{(2i\pi m_1)^k}\int_0^1 \partial_1^k a(x_1,x_2) e^{-2i\pi m_1 x_1} dx_1$$

d'où :

$$\begin{aligned}
|\widehat{a}(\boldsymbol{m})| &= \frac{1}{(2\pi m_1)^k} \,|\int_0^1 e^{-2i\pi m_1 x_1}\int_0^1 \partial_1^k a(x_1,x_2)e^{-2i\pi m_2 x_2} dx_2 dx_1 \,| \\
&= \frac{1}{(4\pi m_1 m_2)^k} \,|\int_{\mathbf{T}^2} \partial_2^k \partial_1^k a(\boldsymbol{x}) \overline{\chi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi m_1 m_2)^k} \int_{\mathbf{T}^2} |\, \partial_2^k \partial_1^k a(\boldsymbol{x}) \,|\, d\boldsymbol{x} \\
&\leq \frac{1}{(4\pi m_1 m_2)^k} C_k \\
&\leq \frac{1}{1 + \sqrt{m_1^2 + m_2^2}^k} C_k
\end{aligned}$$

où $C_k = \|\partial_2^k \partial_1^k a(\boldsymbol{x})\|_\infty$. Les cas $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$ se traitent de la même manière $\square$

Nous allons maintenant construire une quantification, dite quantification Weyl, à partir des opérateurs $t_1$ et $t_2$ et grâce à la transformée de Fourier sur le tore. En effet, les opérateurs recherchés étant linéaires, on peut commencer par définir la quantification sur une base de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{C})$ que l'on munit du produit scalaire usuel. Posons, pour $\boldsymbol{m} \in \mathbf{Z}^2$, $\chi_{\boldsymbol{m}} : \boldsymbol{x} \in \mathbf{T}^2 \longmapsto e^{2i\pi \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}} = e^{2i\pi(x_1 m_1 + x_2 m_2)}$, qui est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{C})$.

**Lemme 2.2.** $\{\chi_{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^2\}$*est une base hilbertienne de* $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{C})$.

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du théorème de Stone-Weierstrass appliqué à l'espace engendré par les $\chi_{\boldsymbol{m}}$. □

Ainsi, en posant $\widehat{a}(\boldsymbol{m}) = \int_{\mathbf{T}^2} a(\boldsymbol{x})\overline{\chi_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$, on a pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{C})$ l'identité $a = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a}(\boldsymbol{m})\chi_{\boldsymbol{m}}$. Il nous reste à définir $\mathrm{Op}_N(\chi_{\boldsymbol{m}})$, et à vérifier que la suite d'applications obtenue en prolongeant par Fourier vérifie les principes de quantification.

On se rappelle alors la construction des observables $t_1$ et $t_2$ dans la partie 1.1. On pose $t_1 = \mathrm{Op}_N(\chi(1,0))$ et $t_2 = \mathrm{Op}_N(\chi(0,1))$. C'est naturel : si l'on voit $\mathbf{T}^2$ comme $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, alors $\chi(1,0)$ et $\chi(0,1)$ correspondent aux projections sur les premières et les secondes coordonnées. $t_1$ et $t_2$ jouant le même rôle que $X$ et $P$ dans le cas $L^2$, ce choix est donc logique. On pose plus généralement $\mathrm{Op}_N(\chi(m_1,m_2)) = T_N(m_1,m_2)$, où $T_N$ a été défini en 1.2.

**Théorème 2.1** (Quantification Weyl)**.** *La suite d'applications de* $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{C})$ *dans* $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}^N)$ *qui à* $\chi_{\boldsymbol{m}}$ *associe* $T_N(\boldsymbol{m})$ *prolongée par linéarité en*

$$\mathrm{Op}_N(a) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^2} \widehat{a}(\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{m})$$

*est une quantification sur le tore, appelée* quantification de Weyl.

Afin d'établir ce théorème, il nous faut montrer un lemme préliminaire.

**Lemme 2.3.** *Pour* $a_1, a_2 \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ *on a :*

$$\|\mathrm{Op}_N(a_1)\mathrm{Op}_N(a_2) - \mathrm{Op}_N(a_1a_2)\| \leq \frac{\pi}{N}\left(\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^2}\|\boldsymbol{m}\|\|\widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\|\right)\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^2}\|\boldsymbol{n}\|\|\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})\|\right)$$

*Démonstration.* On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}_N(a_1)\mathrm{Op}_N(a_2) &= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})T_N(\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{n}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{N}}\widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})T_N(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^2} e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{k})}{N}}\widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

où $\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = m_1n_2 - m_2n_1$ provient de la commutation des $T_N$.
De plus,

$$\mathrm{Op}_N(a_1a_2) = \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{k})$$

Cela revient à montrer que $\widehat{a_1a_2}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})$.
Or, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{a_1a_2}(\boldsymbol{k}) &= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})\widehat{\chi_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{k}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})\int_{\mathbf{T}^2}\chi_{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\widehat{a_2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m})
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\mathrm{Op}_N(a_1)\mathrm{Op}_N(a_2) - \mathrm{Op}_N(a_1a_2)\| \leq \sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \mid e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{N}} - 1 \mid\mid \widehat{a_1}(\boldsymbol{m}) \mid\mid \widehat{a_2}(\boldsymbol{n}) \mid$$

Le lemme suit alors de

$$\mid e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}{N}} - 1 \mid \leq \mid \frac{\pi}{N}\omega(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) \mid \leq \frac{\pi}{N}\|\boldsymbol{m}\|\|\boldsymbol{n}\|$$

□

*Démonstration du théorème 2.1.* Remarquons tout d'abord que la bonne définition de $\mathrm{Op}_N$ est assurée par le lemme 2.1.

Montrons maintenant que la quantification Weyl vérifie les quatres propriétés du théorème 2.1.

(i) Si $a = 1$, $\widehat{a}(\boldsymbol{m}) = \delta_{\boldsymbol{m}=(0,0)}$, d'où $\mathrm{Op}_N(1) = T_N(0) = Id_{\mathbf{C}^N}$. Par ailleurs, la $\mathbf{C}$-linéarité est assurée par la $C$-linéarité de la transformée de Fourier.

(ii) $\mathrm{Op}_N(\overline{a}) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{\overline{a}}(\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{m})$. Or, $\widehat{\overline{a}} = \int_{\mathbf{T}^2} \overline{a}(\boldsymbol{m})\chi_{\boldsymbol{m}}d\boldsymbol{x} = \overline{\widehat{a}(-m)}$, d'où $\mathrm{Op}_N(\overline{a} = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2} \overline{\widehat{a}(\boldsymbol{m})}T_N(-\boldsymbol{m})$. Or, $t_i^{-m_i} = (t_i^{m_i})^\dagger (i = 1, 2)$, d'où $T_N(\boldsymbol{m})^\dagger = T_N(-\boldsymbol{m})$, ce qui donne bien $\mathrm{Op}_N\overline{a} = \mathrm{Op}_N(a)^\dagger$.

(iii) C'est une conséquence directe du lemme 2.3 : $\|\mathrm{Op}_N(a_1)\mathrm{Op}_N(a_2) - \mathrm{Op}_N(a_1a_2)\| \leq \frac{\pi}{N}\left(\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\|\boldsymbol{m}\|\|\widehat{a_1}(\boldsymbol{m})\|\right)\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2}\|\boldsymbol{n}\|\|\widehat{a_2}(\boldsymbol{n})\|\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

□

Dans la suite de notre exposé $\mathrm{Op}_N$ désignera toujours la quantification Weyl en l'absence de précision. Ce n'est pas la seule quantification du tore possible, et plusieurs résultats du mémoire peuvent être obtenus uniquement à partir des principes de quantification.

# 3 Loi de Weyl

## 3.1 Introduction

Nous allons montrer dans cette partie des propriétés sur la répartition des valeurs propres de $\mathrm{Op}_N(a)$ pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$. La restriction aux fonctions à valeurs réelles a notamment pour conséquence que $\mathrm{Op}_N(a)$ est hermitienne. Si on considère une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $M$ une matrice hermitienne, on peut alors définir $f(M)$ :

**Définition 3.1.** Soit $M \in \mathcal{L}(C^N)$ et $f$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Par le théorème spectral, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{R}$ et des projecteurs orthogonaux $\Pi_1, ..., \Pi_k$ tels que $M = \sum \lambda_i\Pi_i$. On pose alors $f(M) = \sum f(\lambda_i)\Pi_i$.

*Remarque.* Cette construction ne s'applique pas aux endomorphismes auto-adjoints d'espaces vectoriels de dimension infinie. Mais une telle construction n'est pas nécessaire dans notre mémoire : on se contente de faire tendre la dimension de notre espace vers l'infini.

La définition 3.1 nous incite à nous demander ce que l'on peut dire de $f(\mathrm{Op}_N(a))$ si $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. On est bien sur tenté de relier cette grandeur à $\mathrm{Op}_N(f \circ a)$ : la proposition 3.1 établit un résultat de de type. Pour pouvoir l'établir, montrons tout d'abord un lemme qui relie asymptotiquement les normes des valeurs propres de $\mathrm{Op}_N(a)$ à la norme infinie de $a$.

**Lemme 3.1.** *Soit* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{C})$*.Alors* $\limsup_{N\to\infty} \|\mathrm{Op}_N(a)\| \leq \sup_{x\in \boldsymbol{T}^2} |a(x)|$

*Remarque.* Cette inégalité est vraie pour toutes les quantifications. Pour la quantification de Weyl, on a égalité, ce qui sera une conséquance de la loi de Weyl.

*Démonstration.* Soit $M > \sup_{x\in\mathbf{T}^2}|a(x)|$. On a $M^2 - a^2 > 0$, donc il existe $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$ tel que $M^2 - a^2 = b^2$. En passant dans $\mathcal{L}(\mathbf{C}^N)$, $M^2 - \mathrm{Op}_N(a)^\dagger \mathrm{Op}_N(a) = \mathrm{Op}_N(b)^2 + r_N$, avec $r_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $u \in \mathbf{C}^N$. Alors $0 \leq \langle \mathrm{Op}_N(b)^2 u|u\rangle = M^2\|u\|^2 - \|\mathrm{Op}_N(a)u\|^2 - \langle r_N u|u\rangle$ Or, $|\langle r_N u|u\rangle| \leq \|r_N\|\|u\|^2$, d'où $\|\mathrm{Op}_N(a)u\|^2 \leq (M^2 + \|r_N\|)\|u\|^2$. Finalement, $\|\mathrm{Op}_N(a)\| \leq \sqrt{M^2 + \|r_N\|}$ qui donne bien $\limsup \|\mathrm{Op}_N(a)\| \leq M$.

□

**Proposition 3.1.** *Pour toutes fonctions* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{R})$ *et* $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$*, on a* $\mathrm{Op}_N(f\circ a) = f(\mathrm{Op}_N(a)) + r_N(f,a)$ *avec* $r_N(f,a) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*Démonstration.* Soit $M$ une matrice hermitienne. $\|f(M)\| = \sup_{\lambda\in Sp(M)}|f(\lambda)|$, et $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$. D'après le lemme 3.1, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\|\mathrm{Op}_N(a)\| \leq C$ et $|a| \leq C$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme $P$ tel que $\|P - f\|_{\infty,[-c,c]}$. Posons alors $A = f(\mathrm{Op}_N(a))$, $B = P(\mathrm{Op}_N(a))$, $C = \mathrm{Op}_N(P\circ a)$, $D = \mathrm{Op}_N(f\circ a)$.

— $\|A - B\| \leq \varepsilon$ est clair par calcul sur les valeurs propres.

— $\|B - C\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par les propriétés (i) et (iii) de la définition 2.1.

— $\limsup \|C - D\| \leq \varepsilon$ d'après le lemme 3.1.

Par inégalité triangulaire, on a donc $\limsup \|A - D\| \leq 2\varepsilon$. On conclut en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0. □

## 3.2 Loi de Weyl

**Théorème 3.1.** *(Loi de Weyl) Soit* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{R})$ *et* $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$*. Alors :*

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(f(\mathrm{Op}_N(a))) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\boldsymbol{T}^2} (f\circ a)\mathrm{d}\mu$$

Ce résultat découle de la section précédente, ainsi que de la propriété suivante vérifiée par la quantification de Weyl :

**Propriété.** *Pour* $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$,

(iv) $$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_N(a)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\boldsymbol{T}^2} a\,\mathrm{d}\mu$$

*Démonstration.* On a en fait pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$ et $R > 1$, $\frac{1}{N}\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_N(a)) = \int_{\mathbf{T}^2} a d\mu + \mathrm{O}_{a,R}(\frac{1}{N^R})$ En effet, $\frac{1}{N}\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_N(a)) = \frac{1}{N}\mathrm{tr}(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^2}\widehat{a}(\boldsymbol{k})T_N(\boldsymbol{k})) = \frac{1}{N}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^2}\widehat{a}(\boldsymbol{k})\,\mathrm{tr}(T_N(\boldsymbol{k})) = (\star)$. Or,

$$\mathrm{tr}(T_N(\boldsymbol{m}) = \begin{cases} Ne^{\frac{i\pi m_1 m_2}{N}} & \text{si } m \equiv 0\left[N\mathbf{Z}^2\right] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est clair en regardant les expressions de $t_1$ et $t_2$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^N$. En effet, la diagonale est nulle si $m_2 \not\equiv 0\,[N]$, et si $m_2 \equiv 0\,[N]\,, m_1 \not\equiv 0\,[N]$, alors la trace est nulle comme somme des racines de l'unité. Ainsi, pour tout $R > 1$, il existe une constante $C_R > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{N} \operatorname{tr}(\mathrm{Op}_N(a)) - \widehat{a}(0,0) \right| &= \left| \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in N\mathbf{Z}^2 \\ \boldsymbol{k}\neq(0,0)}} \widehat{a}(\boldsymbol{k}) e^{\frac{i\pi m_1 m_2}{N}} \right| \leq \sum_{\boldsymbol{k}\in N\mathbf{Z}^2} | \widehat{a}(\boldsymbol{k}) | \\
&\leq \sum_{\boldsymbol{k}\in N\mathbf{Z}^2} C_R (1+\|\boldsymbol{k}\|)^{-R} \qquad \text{(d'après le lemme 2.1)} \\
&\leq 4\left(\frac{1}{N}\right)^R C_R \sum_{\boldsymbol{k}\in \mathbf{N}^{*2}} \|\boldsymbol{k}\|^{-R}
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}^{*2}} \|\boldsymbol{k}\|^{-R}$ converge pour $R > 2$ par produit de Cauchy. On obtient le résultat voulu car

$$\widehat{a}(0,0) = \int_{\mathbf{T}^2} a d\mu$$

$\square$

Démontrons maintenant la loi de Weyl. D'après la propriété 3.2 et le lemme 3.1,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \operatorname{tr}(f(\mathrm{Op}_N(a))) &= \frac{1}{N} \operatorname{tr}(\mathrm{Op}_N(f \circ a) + r_N(f,a)) \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\mathbf{T}^2} f \circ a d\mu
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Avant d'en voir une conséquence à la section suivante, remarquons que ce résultat est en fait valable pour n'importe quelle quantification qui vérifie la propriété (iv). On trouve d'ailleurs parfois cette propriété comme quatrième principe qui caractérise une quantification. D'autre part, on peut obtenir une version légèrement plus forte de la loi de Weyl, en supposant $f$ seulement continue.

**Proposition 3.2.** *Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2, \boldsymbol{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$. Alors :*

$$\frac{1}{N} \operatorname{tr}(f(\mathrm{Op}_N(a))) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\boldsymbol{T}^2} (f \circ a) \mathrm{d}\mu$$

*Démonstration.* Soit $C > 0$ tel que $\|\mathrm{Op}_N(a)\| < C$ et $|a| < C$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $|P - f|(x) \leq \varepsilon$ sur $[-c, c]$. Ainsi que précédemment, posons $A = \frac{1}{N}\operatorname{tr}(f(\mathrm{Op}_N(a)))$, $B = \frac{1}{N}\operatorname{tr}(P(\mathrm{Op}_N(a)))$, $C = \int_{\mathbf{T}^2} P \circ a d\mu$ et $D = \int_{\mathbf{T}^2} f \circ a d\mu$. En se ramenant aux valeurs propres, on a $\|A - B\| \leq \varepsilon$. D'après la loi de Weyl $\mathcal{C}^\infty$, on a $\|B - C\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Enfin, il est clair que $|C - D| \leq 2\varepsilon$. On conclut par inégalité triangulaire. $\square$

*Remarque.* On peut reformuler la loi de Weyl avec le vocabulaire de la théorie de la mesure. En effet, on peut considérer les mesures $\nu_a$ et $\nu_N$ sur $\mathbf{R}$ définies par $\nu_a(A) = \mu \circ a^{-1}(A)$ et $\nu_N(A) = \frac{1}{N}\sum_{\lambda\in Sp(\mathrm{Op}_N(a))\cap A} g(\lambda)\lambda$ où $g(\lambda)$ est la multiplicité de $\lambda$ comme valeur propre de $\mathrm{Op}_N(a)$. La loi de Weyl se reformule alors simplement en $\nu_N$ converge en loi vers $\nu_a$.

### 3.3 Interprétation

**Corollaire 3.1.** $\frac{1}{N}\#Sp(\mathrm{Op}_N(a)) \cap [\alpha,\beta] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mu(a^{-1}([\alpha,\beta]))$ *sauf pour un nombre au plus dénombrable de* $\alpha, \beta$.

*Démonstration.* C'est un résultat classique de théorie de la mesure : si $\nu_N$ converge en loi vers $\nu_A$, alors pour toute fonction $f$ borélienne bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que $\nu_a(\mathcal{C}(f)) = \nu_a(\mathbf{R})$, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{E}(f(\nu_N)) = \mathbb{E}(f(\nu_a))$. Le résultat est obtenu en prenant $f = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}$, si $(\alpha,\beta)$ n'est pas point de discontinuité de $g : (\alpha,\beta) \longrightarrow \nu_a([\alpha,\beta])$. □

*Remarque.* En physique quantique, les résultats de mesure sont précisément les valeurs propres des observables. La loi de Weyl tisse donc un lien entre les résultats de mesures classiques et ceux de mesures quantiques dans la limite semi-classique. On voit que ces derniers se répartissent en suivant la pondération donnée par $a$ : on peut en effet définir une mesure image $a_*\mu$ positive sur $\mathbf{R}$. La loi de Weyl se réécrit alors ainsi : dans la limite semi-classique, la moyenne de $f$ sur les valeurs propres de $2\mathrm{Op}_N(a)$ est égale à la valeur moyenne de $f$ pour la mesure image $a_*\mu$.

## 4 Quantum maps

### 4.1 Opérateurs d'évolution

Dans la première partie nous avons construit les observables quantiques, qui correspondent aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur le tore (grandeurs physiques). Dans cette partie, nous allons construire un autre type d'opérateurs quantiques. Considérons une transformation d'un système physique (une évolution temporelle où une symétrie par exemple). Classiquement, une telle transformation est représentée par une fonction du tore dans lui même. Dans le cas d'une évolution temporelle, cette fonction est le flot de l'équation de Hamilton (présentée en introduction). C'est un difféomorphisme de l'espace des phases, et lorsque ce dernier est $\mathbf{R}^{2n}$, le champ hamiltonien est à divergence nulle, et il préserve donc la mesure de Lebesgue. Ainsi la fonction qui représente une transformation du système dans le monde classique est un difféomorphisme préservant la mesure. On peut maintenant se demander quel est l'opérateur qui réalise la transformation dans le monde quantique. Puisque les vecteurs représentant des états quantiques sont les vecteurs de norme 1, cet opérateur doit préserver la norme hermitienne. Par des considérations qualitatives, on peut même montrer que l'opérateur doit conserver le module du produit scalaire entre deux vecteurs, et donc l'opérateur d'évolution doit être un opérateur unitaire linéaire ou anti-linéaire. On se contentera ici de la linéarité (en physique, les transformations anti-linéaires interviennent lorsqu'il y a renversement du temps, mais ce n'est pas notre propos ici).

Considérons donc un difféomorphisme $\phi$ de $\mathbf{T}^2$ qui préserve la mesure de Lebesgue. On cherche à construire un opérateur unitaire $\mathrm{U}_N(\phi)$ sur $\mathbf{C}^N$ qui représente la transformation dans l'espace quantique. Si $\psi$ est un vecteur normé, pour $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$, la moyenne de $a$ dans l'état $\psi$ est donnée par $\langle a\rangle = \langle \mathrm{Op}_N(a)\psi|\psi\rangle$, la moyenne de $a\circ\phi$ par $\langle a\circ\phi\rangle = \langle \mathrm{Op}_N(a\circ\phi)\psi|\psi\rangle$ et la moyenne de $a$ dans l'état après transformation du système par $\phi$ est donnée par

$$\langle \mathrm{Op}_N(a)\mathrm{U}_N(\phi)\psi|\mathrm{U}_N(\phi)\psi\rangle = \langle \mathrm{U}_N(\phi)^\dagger \mathrm{Op}_N(a)\mathrm{U}_N(\phi)\psi|\psi\rangle$$

On veut que les deux dernières quantités coïncident dans la limite semi-classique, c'est-à-dire que :

$$\|\mathrm{U}_N(\phi)^\dagger \mathrm{Op}_N(a)\mathrm{U}_N(\phi) - \mathrm{Op}_N(a\circ\phi)\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dans la pratique, on considère rarement une transformation seule, mais l'action d'un groupe de transformation sur un système (par exemple les rotations, les translations, ou le flot du champ hamiltonien). Dans le cas du tore, on va s'intéresser aux propriétés de l'action de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$.

## 4.2 Action de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur le tore

**Théorème 4.1.** *On suppose que $N$ est pair. Alors il existe une représentation unitaire $\mathrm{U}_N$ de $\boldsymbol{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ sur $\boldsymbol{C}^N$ telle que pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ et pour tout $g\in\boldsymbol{SL}(2,\boldsymbol{Z})$ on a :*

$$\mathrm{U}_N(g)\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(g)^\dagger = \mathrm{Op}_N(f\circ g^{-1})$$

Ce résultat est plus fort que celui demandé : on a une égalité et pas simplement une propriété asymptotique. Mais ce n'est valable que pour $N$ pair ; on peut même démontrer que c'est faux dans le cas où $N$ est impair. Par ailleurs, ce n'est pas vrai dans le cas général avec des difféomorphismes quelconques ; mais par contre le résultat semi-classique $\|\mathrm{U}_N(\phi)^\dagger\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{U}_N(\phi)-\mathrm{Op}_N(a\circ\phi)\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ est vérifié, ce qui est connu sous le nom de théorème d'Egorov. On a donc ici un cas particulier d'exactitude dans le théorème d'Egorov.

*Démonstration.* Notons $\varrho_1$ la représentation unitaire de $\mathbf{H}(N)$ décrite dans la première partie. Le groupe $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ agit sur $\mathbf{H}(N)$ par $g\cdot(\boldsymbol{m},\alpha)=(g\boldsymbol{m},\alpha)$, l'action préservant la structure de groupe. Mais on peut aussi faire agir $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ par $g*(\boldsymbol{m},\alpha)=(g^{-1})^T\cdot(\boldsymbol{m},\alpha)$, qui préserve également la structure de groupe, car on compose le morphisme $\varrho_1$ par l'automorphisme de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ qui envoie $g$ sur $(g^{-1})^T$. Notons alors, pour tout $g\in\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$, $\varrho_g$ la représentation de $\mathbf{H}(N)$ définie par $\varrho_g(\boldsymbol{m},\alpha)=\varrho_1(g*(\boldsymbol{m},\alpha))$. C'est encore une représentation unitaire de $\mathbf{H}(N)$ sur $\mathbf{C}^N$, et l'action de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur l'élément $(\mathbf{0},1)$ étant triviale, $\varrho_g(\mathbf{0},1)=\varrho_1(\mathbf{0},1)=e^{\frac{i\pi}{N}}$.

Soit $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, et montrons que $\varrho_g(1,0,0)^N=\varrho_g(0,1,0)^N=1$. On a $g*(N,0,0)=(aN,cN,0)$ et $g*(0,N,0)=(bN,dN,0)$. Donc $\varrho_g(1,0,0)^N=\varrho_1(aN,cN,0)=e^{\frac{i\pi acN^2}{N}}=(-1)^{Nab}$. De même $\varrho_g(0,1,0)^N=(-1)^{Nbd}$. Ainsi pour $N$ pair on a bien $\varrho_g(1,0,0)^N=\varrho_g(0,1,0)^N=1$, alors que si $N$ est impair il faut se restreindre aux matrices telles que $ac\equiv bd\equiv 0$ [2].

Par le théorème 1.1, $\varrho_g$ et $\varrho_1$ sont donc équivalentes, et l'on dispose d'un opérateur d'entrelacement $u_g:\mathbf{C}^N\longrightarrow\mathbf{C}^N$ tel que pour tout $(\boldsymbol{m},\alpha)\in\mathbf{H}(N)$ on a $\varrho_1(g*(\boldsymbol{m},\alpha))\circ u_g=u_g\circ\varrho_1(\boldsymbol{m},\alpha)$. Notons que par lemme de Shur, $u_g$ n'est pas défini de manière unique mais à une constante multiplicative près. Par ailleurs, on vérifie aisément que si $u_g$ et $u_h$ sont des opérateurs d'entrelacements associés à $g$ et $h$ dans $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$, alors $u_gu_h$ est un opérateur d'entrelacement associé à $gh$. Cela laisse espérer que l'on puisse choisir les $u_g$ de sorte à obtenir une représentation de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{C}^N$, mais ce n'est pas évident, puisqu'il faut faire un choix de constante.

Supposons pour le moment que l'on puisse faire un choix d'opérateurs d'entrelacements qui fournissent une représentation unitaire $\mathrm{U}_N : \mathbf{SL}(2,\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathbf{C}^N)$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_N(g)\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(g)^\dagger &= \mathrm{U}_N(g) \ \sum_{\boldsymbol{m}} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) T_N(\boldsymbol{m}) \ \mathrm{U}_N(g)^\dagger \\
&= \sum_{\boldsymbol{m}} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) \mathrm{U}_N(g) T_N(\boldsymbol{m}) \mathrm{U}_N(g)^\dagger \\
&= \sum_{\boldsymbol{m}} \widehat{f}(\boldsymbol{m}) T_N((g^{-1})^T \boldsymbol{m}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m}} \widehat{f}(g^T \boldsymbol{m}) T_N(\boldsymbol{m})
\end{aligned}$$

Le résultat souhaité suit simplement d'un changement de variable dans l'intégrale :

$$\widehat{f}(g^T \boldsymbol{m}) = \int_{\mathbf{T}^2} f(\boldsymbol{x}) e^{i(g^T \boldsymbol{m})\cdot \boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbf{T}^2} f(\boldsymbol{x}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot g\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbf{T}^2} f(g^{-1}\boldsymbol{x}) e^{i\boldsymbol{m}\cdot \boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Ici, on utilise le fait que le déterminant de $g$ est 1, que donc $g$ préserve la mesure de Lebesgue sur le tore. On reconnaît les coefficients de Fourier de $f \circ g^{-1}$. Ainsi on obtient bien $\mathrm{U}_N(g)\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(g)^\dagger = \mathrm{Op}_N(f \circ g^{-1})$ comme on voulait. Il nous reste donc à montrer que l'on peut faire un bon choix pour les opérateurs d'entrelacement.

Le plus simple est de faire le calcul explicite des opérateurs via des générateurs de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$. En effet, $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ est engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les relations $S^4 = 1$ et $(ST)^3 = S^2$ (ce n'est pas évident, on pourra en trouver une démonstration dans [DV]). Il s'agit donc de trouver des opérateurs $\mathrm{U}(S)$ et $\mathrm{U}(T)$ associés à $S$ et $T$ qui sont unitaires et vérifient les mêmes relations. $\mathrm{U}(S)$ est définit par les relation $\mathrm{U}(S)^{-1} T_N(\boldsymbol{m}) \mathrm{U}(S) = T_N(S^T \boldsymbol{m})$, et il suffit de le vérifier pour $\boldsymbol{m} = (1,0,0)$ et $\boldsymbol{m} = (0,1,0)$. On obtient donc les relations $\mathrm{U}(S)^{-1} t_2 \mathrm{U}(S) = t_1$ et $\mathrm{U}(S)^{-1} t_1 \mathrm{U}(S) = t_2^{-1}$. Ainsi, à un scalaire près, l'opérateur recherché est la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N$.

Le cas de l'opérateur $\mathrm{U}(T)$ demande plus de calcul. En effet, les relations s'écrivent $\mathrm{U}(S)^{-1} t_2 \mathrm{U}(S) = t_2$ et $\mathrm{U}(S)^{-1} t_1 \mathrm{U}(S) = e^{\frac{i\pi}{N}} t_2 t_1$. Par la première relation, $\mathrm{U}(T)$ et $t_2$ sont codiagonalisables, et donc il existe des scalaires $\lambda_k$ tels que $\mathrm{U}(T)\phi_k = \lambda_k \phi_k$. La deuxième relation donne donc $\lambda_k \lambda_{k-1}^{-1} = e^{\frac{i\pi(2k-1)}{N}}$. On obtient $\lambda_k = \lambda_0 e^{\frac{i\pi k^2}{N}}$. Notons que pour $N$ impair, on aurait $\lambda_N = -\lambda_0$ et donc on ne peut pas construire de représentation comme cela. Montrons que l'on peut faire un choix de $\lambda_0$, que l'on note simplement $\lambda$ dans la suite, qui donne une représentation de $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{C}^N$.

Il s'agit de vérifier les relations $\mathrm{U}(S)^4 = \mathcal{F}_N^4 = 1$ et $(\mathcal{F}_N \mathrm{U}(T))^3 = \mathcal{F}_N^2$. La première égalité provient d'un simple calcul :

$$\mathcal{F}_N^2 \psi(q) = \sum_l e^{-\frac{2i\pi}{N} lq} \mathcal{F}_N \psi(l) = \sum_{k,l} e^{-\frac{2i\pi}{N} l(q+k)} \psi(k) = \psi(-q)$$

et ainsi on a bien $\mathcal{F}_N^4 = 1$.

Notons $D$ la matrice diagonale de coefficients $\lambda, e^{\frac{2i\pi}{N}}\lambda, ..., e^{\frac{2i\pi(N-1)}{N}}\lambda$. Par changement de base, on a en notant $\mathrm{U} = \mathrm{U}(T)$ l'égalité $\mathrm{U} = \mathcal{F}_N D \mathcal{F}_N^{-1}$. Pour simplifier le calcul on a les équivalences suivantes :

$$\mathcal{F}_N \mathrm{U} \mathcal{F}_N \mathrm{U} \mathcal{F}_N \mathrm{U} = \mathcal{F}_N \mathcal{F}_N \Leftrightarrow \mathcal{F}_N^{-1} \mathrm{U} \mathcal{F}_N \mathrm{U} \mathcal{F}_N \mathrm{U} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{U} \mathcal{F}_N \mathrm{U} = D^{-1} \Leftrightarrow D\mathrm{U} = \mathcal{F}_N^{-1} D$$

Calculons maintenant les coefficients de $D^{-1}\mathcal{F}_N D^{-1}$.

$$(D^{-1}\mathcal{F}_N D^{-1})_{\alpha,\beta} = N^{-1/2} e^{-\frac{i\pi}{N}(\alpha^2+\beta^2)} e^{\frac{2i\pi}{N}\alpha\beta} \lambda^{-2} = N^{-1/2} e^{-\frac{i\pi}{N}(\alpha-\beta)^2} \lambda^{-2}$$

Par ailleurs $\mathrm{U} = \mathcal{F}_N D \mathcal{F}_N^{-1}$ ce qui permet de calculer les coefficients de U :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{U})_{\alpha,\beta} &= \frac{\lambda}{N} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} e^{\frac{2i\pi}{N}(\beta-\alpha)\gamma} e^{\frac{i\pi}{N}\gamma^2} \\
&= \frac{\lambda}{N} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} e^{-\frac{i\pi}{N}(\alpha-\beta)^2} e^{\frac{i\pi}{N}(\gamma+\beta-\alpha)^2} \\
&= \frac{\lambda}{N} e^{-\frac{i\pi}{N}(\alpha-\beta)^2} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} e^{\frac{i\pi}{N}\gamma^2}
\end{aligned}$$

Ainsi on a l'identité voulue si et seulement si $\lambda$ vérifie :

$$\lambda^3 N^{-1/2} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} e^{\frac{i\pi}{N}\gamma^2} = 1$$

Or l'opérateur U est inversible et donc en particulier ses coefficients sont non nuls, ainsi la somme des $e^{\frac{i\pi}{N}\gamma^2}$ est non nulle. Ainsi on peut choisir un tel $\lambda$, qui sera automatiquement de module 1 puisque un produit de matrices unitaires reste unitaire. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

*Remarque.* On obtient par le calcul effectué que le module de $\sum_{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} e^{\frac{i\pi}{N}\gamma^2}$ est $N^{1/2}$ lorsque $N$ est pair, ce qui n'est pas une évidence a priori.

Il est frustrant de devoir se restreindre au cas où $N$ est pair, alors que toutes les autres constructions sont vraies pour $N$ quelconques. Pour contourner cette difficulté, il faut accepter de faire agir un groupe moins gros, précisément le groupe des $g \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ tels que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on a $\varrho_g(N, 0, 0) = \varrho_g(0, N, 0) = 1$. Le calcul effectué plus haut montre que $G$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ telles que $ab \equiv cd \equiv 0$ [2]. De la même manière on obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 4.2.** *Il existe une représentation unitaire $\mathrm{U}_N$ de $G$ sur $\boldsymbol{C}^N$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ et pour tout $g \in G$ on a :*

$$\mathrm{U}_N(g)\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(g)^\dagger = \mathrm{Op}_N(f \circ g^{-1})$$

La preuve de ce fait ne découle pas directement de la démonstration précédente puisque l'on a utilisé des générateurs particuliers de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$. On trouvera un argument complet dans [DEG03]. Notons que le groupe $G$ considéré est suffisamment gros pour que le résultat soit intéressant. Par ailleurs, comme on le verra dans la section suivante, il contient des éléments ergodiques. Cela permettra de faire le lien avec la partie suivante qui étudie les propriétés d'ergodicité quantique.

## 4.3 Propriétés ergodiques de l'action de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$

Dans cette section on va introduire quelques éléments de théorie ergodique qui seront utiles par la suite. La plupart des résultats sont tirés de [LC].

**Définition 4.1.** Un *système dynamique mesuré* est un quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ où $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré et $T : X \longrightarrow X$ une application mesurable qui conserve la mesure au sens suivant : pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Dans le cas qui nous intéresse, l'espace mesuré considéré est le tore $\mathbf{T}^2$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, et on prendra comme application $T$ les éléments de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$.

Si on considère un système dynamique mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, alors pour toute fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ on peut définir $f \circ T$ et si $f$ est nulle presque partout, comme $\mu(T^{-1}(f^{-1}(\mathbf{C}^*))) = \mu(f^{-1}(\mathbf{C}^*)) = 0$, $f \circ T$ est nulle presque partout. Cela permet donc en quotientant par la relation « être égale à presque partout » de définir $f \circ T$ pour $f \in L^p(\mu)$ de manière indépendante de la fonction choisie pour représenter la classe d'équivalence. La formule de transfert donne $\int_X f \circ T \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ en utilisant l'invariance de la mesure par $T$. Dans le cas où $p = 2$ on définit donc un opérateur linéaire unitaire $\Theta$ sur $L^2(\mu)$ par $\Theta(f) = f \circ T$. Dans de nombreux cas, on s'intéresse aux propriétés des moyennes de Birkhoff de la suite, c'est-à-dire des sommes $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$, et à leurs propriétés asymptotiques. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 4.3** (Von Neumann)**.** *Soit $p$ la projection orthogonale de $L^2(\mu)$ sur l'ensemble des fonctions invariantes par $T$, $\ker(\Theta - Id)$. Alors pour tout $f \in L^2(\mu)$, les moyennes de Birkhoff $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ convergent vers $p(f)$ en norme $L^2$.*

*Démonstration.* Notons que puisque $\Theta$ est continue, $\ker(\Theta - Id)$ est fermé et donc la projection est bien définie. Montrons que $\ker(\Theta - Id) = (\mathrm{im}(\Theta - Id))^\perp$, ce qui implique $(\ker(\Theta - Id))^\perp = \overline{\mathrm{im}(\Theta - Id)}$. On sait que $(\mathrm{im}(\Theta - Id))^\perp = \ker(\Theta^* - Id)$, où $\Theta^*$ désigne l'opérateur adjoint de $\Theta$, et il faut donc montrer que $\ker(\Theta - Id) = \ker(\Theta^* - Id)$. On a $\|\Theta^*\| = \|\Theta\| = 1$ et donc si $f \in \ker(\Theta - Id)$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_X |\Theta^*(f) - f|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X |\Theta^*(f)|^2 \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \Theta^*(f) \, \mathrm{d}\mu - \int_X \Theta^*(f) f \, \mathrm{d}\mu + \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu - \int_X \Theta(f) f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \Theta(f) \, \mathrm{d}\mu + \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_X |\Theta(f)|^2 \, \mathrm{d}\mu - \int_X \Theta(f) f \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \Theta(f) \, \mathrm{d}\mu + \int_X |f|^2 \, \mathrm{d}\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

et donc $f \in \ker(\Theta^* - Id)$. Par symétrie, on a l'inclusion réciproque.

Or si $f$ est invariante par $T$, les moyennes de Birkhoff de $f$ sont égales à $f$ et donc ces dernières convergent bien en norme $L^2$ vers $f = p(f)$. Par ailleurs si $f = \Theta(g) - g = g \circ T - g$ pour une fonction $g \in L^2$, alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (g \circ T^{k+1} - g \circ T^k) = \frac{1}{n}(g \circ T^n - g)$$

et comme la norme $L^2$ de $g \circ T^n$ est égale à celle de $g$, les moyennes de Birkhoff de $f$ convergent en norme $L^2$ vers $0 = p(f)$. Par densité, le résultat est vrai pour toute fonction $f \in \overline{\mathrm{im}(\Theta - Id)}$, ce qui achève la preuve du théorème de Von Neumann. $\square$

Avant de passer à l'ergodicité, on énonce sans démonstration le théorème ergodique de Birkhoff, qui concerne la convergence presque sûre :

**Théorème 4.4** (Birkhoff)**.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré et $f \in L^1(\mu)$. Alors il existe une unique fonction $f^* \in L^1(\mu)$ invariante par $T$ telle que :*

1. *pour presque tout $x \in X$ on a $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^*(x)$*
2. *$\|f^*\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$*
3. *si $X$ est de mesure finie, alors les moyennes de Birkhoff de $f$ convergent vers $f^*$ dans $L^1$ et donc $\|f^*\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ et $\int_X f^* \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$*
4. *si $T$ est inversible, pour presque tout $x \in X$ on a $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{-k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^*(x)$*

On va maintenant définir la notion qui nous intéressera dans la suite :

**Définition 4.2.** Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $A \in \mathcal{B}$, si $T^{-1}(A) = A$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \backslash A) = 0$

(ii) toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ invariante par $T$ est constante presque partout

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que le système dynamique est *ergodique*.

*Démonstration.* Supposons (i). Soit $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ invariante par $T$. Pour tout borélien $B$ de $\mathbf{C}$, $A = f^{-1}(B)$ vérifie $T^{-1}(A) = A$, et donc $A$ est de mesure nulle ou pleine. Pour $n \in \mathbf{N}$ on partitionne le plan complexe en carrés de côté $2^{-n}$. Alors un seul de ces carrés est de mesure pleine d'après ce qui précède. On construit donc une suite décroissante de carrés $C_n$ de côté $2^{-n}$. Soit $a \in \mathbf{C}$ l'unique complexe tel que $\{a\} = \cap_n C_n$. Alors $T$ est presque partout égale à $a$.

Réciproquement si on suppose (ii), alors pour tout partie $A$ telle que $T^{-1}(A) = A$, l'indicatrice de $A$ est invariante par $T$, donc elle est constante presque partout, et donc $A$ est de mesure nulle ou pleine. $\square$

Dans la pratique, on considère souvent des fonctions définies à un ensemble de mesure près (fonctions $L^p$ par exemple), et on a alors un critère d'ergodicité plus utile :

**Proposition 4.1.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, tel que $\mu(X) < \infty$ et $T$ inversible. Alors le système est ergodique si et seulement si toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbf{C}$ invariante par $T$ presque partout, i.e. telle que pour presque tout $x \in X$, $f \circ T(x) = f(x)$, est constante presque partout.*

*Démonstration.* La condition énoncée est clairement suffisante puisque en particulier les fonctions invariantes par $T$ sont constantes presque partout. Réciproquement, considérons une telle fonction $f$, on va se ramener au critère précédent en construisant un fonction $g$ invariante par $T$ telle que $f = g$ presque partout. Par hypothèse, il existe un ensemble $E \subset X$ mesurable, de mesure pleine, tel que $f \circ T = f$ sur $E$. Supposons d'abord que $T^{-1}(E) = E$ ce qui implique $T(E) \subset E$ et $T(X \backslash E) \subset X \backslash E$.

Alors on peut considérer la fonction $g$ définie par $g = f$ sur $E$ et $g = 0$ sur le complémentaire de $E$. $g$ est mesurable et presque partout égale à $f$. De plus si $x \in E$, alors $T(x) \in E$ et donc $g \circ T(x) = f \circ T(x) = f(x) = g(x)$ et si $x \in X \backslash E$, $T(x) \in X \backslash E$ et donc $g \circ T(x) = 0 = g(x)$. Donc si le système est ergodique, $g$ est constante presque partout, et donc $f$ est constante presque partout.

Il reste donc à construire un tel ensemble $E$. Posons $F = \{x \in X, f \circ T(x) = f(x)\}$. $F$ est un ensemble mesurable de mesure pleine. On pose alors $E = \cap_{n \in \mathbf{Z}} T^n(F)$. On a $E \subset F$ donc $f \circ T = f$ sur $E$, et $T^{-1}(E) = \cap_{n \in \mathbf{Z}} T^{-1}(T^n(F)) = \cap_{n \in \mathbf{Z}} T^{n-1}(F) = E$ (ici on utilise le fait que $T$ est inversible). Enfin, $E$ est une intersection dénombrable d'ensembles de mesure pleine, et comme la mesure de $X$ est finie, on en déduit que $E$ est encore de mesure pleine, ce qui conclut la preuve. □

Dans les conditions du théorème précédent, puisque les indicatrices d'ensembles mesurables sont dans $L^p(\mu)$, on a encore une dernière caractérisation de l'ergodicité :

**Proposition 4.2.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, tel que $\mu(X) < \infty$ et $T$ est inversible. Alors le système est ergodique si et seulement si toute fonction $f \in L^p(\mu)$ invariante par $T$ est constante.*

Qualitativement, si un système est ergodique, pour presque tout point $x \in X$, la suite des points $T^k x$ recouvre uniformément $X$. L'hypothèse d'ergodicité est très importante en physique statistique, puisqu'elle permet de dire que la moyenne spatiale d'une quantité est égale à sa moyenne temporelle. L'énoncé précis de ce fait est le suivant :

**Proposition 4.3.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique, et $f \in L^1(\mu)$. Alors pour presque tout $x \in X$,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

*avec la convention que la moyenne de $f$ est nulle si $\mu(X) = \infty$.*

*Démonstration.* Considérons la fonction $f^*$ invariante par $T$ fournie par le théorème de Birkhoff. Puisque $T$ est ergdique, $f^*$ est constante. Si $X$ est de mesure infinie, alors $f^* = 0$ puisque la seule fonction constante de $L^1(\mu)$ est la fonction nulle. Si $X$ est de mesure finie, on a $\int_X f^* \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ et donc $f^* = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. □

On a un résultat analogue pour les fonctions de $L^2(\mu)$ :

**Proposition 4.4.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique, et $f \in L^2(\mu)$. Alors la somme $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ converge en norme $L^2$ vers la moyenne de $f$. En particulier elle tend vers $0$ si $\mu(X) = \infty$.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Von Neumann, les moyennes de Birkhoff de $f$ convergent en norme $L^2$ vers la projection de $f$ sur l'ensemble des fonctions de $L^2(\mu)$ invariantes par $T$. Comme le système est ergodique, la limite est donc une fonction presque partout constante, disons égale à $\alpha$. Si $\mu(X) = \infty$, alors la seule fonction constante de $L^2(\mu)$ est la fonction nulle et donc les sommes convergent vers

0. Si $X$ est de mesure finie, alors $L^2(\mu) \subset L^1(\mu)$ et la convergence $L^2$ implique la convergence $L^1$. En particulier on a :

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X \alpha \,\mathrm{d}\mu = \mu(X)\alpha$$

ce qui donne bien le résultat voulu. □

Maintenant que les éléments de base de théorie ergodique sont posés, on va pouvoir passer à la caractérisation des éléments $A \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ dont l'action sur le tore est ergodique.

**Proposition 4.5.** *Soit $A \in \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$. Alors l'action de $A$ sur $\boldsymbol{T}^2$ est ergodique si et seulement si aucune de valeurs propres complexes de $A$ n'est une racine de l'unité.*

On a donc un critère simple à utiliser en pratique.

*Démonstration.* Considérons une fonction $f \in L^2(\mu)$ et décomposons la dans la base hilbertienne des fonctions $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ : $f(x) = \sum c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$. Alors on obtient $f \circ A(x) = \sum c_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(A\boldsymbol{x})} = \sum c_{\boldsymbol{k}} e^{i(A^T\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}$. $f$ est invariante par $A$ si et seulement si pour tout $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^2$ on a $c_{A^T\boldsymbol{k}} = c_{\boldsymbol{k}}$.

Supposons qu'aucune des valeurs propres de A (qui sont les valeurs propres de $A^T$) n'est une racine de l'unité, et que $f$ est invariante par $A$. Pour tout $n \in N^*$, $(A^T)^n - Id$ est inversible et donc si $\boldsymbol{k}$ est non nul, les $(A^T)^n\boldsymbol{k}$ sont deux à deux distincts. Or $\sum |c_{\boldsymbol{k}}|^2 < \infty$ et donc $c_{\boldsymbol{k}} = 0$ pour $\boldsymbol{k}$ non nul. Ainsi $f$ est constante.

Si l'une des valeurs propres de $A$ est une racine de l'unité, en particulier il existe un entier $n$ non nul tel que $(A^T)^n - Id$ n'est pas un isomorphisme de $\mathbf{C}^2$. Son déterminant sur $\mathbf{C}$ est donc nul, et comme le déterminant est un invariant de corps, $(A^T)^n - Id$ n'est pas un isomorphisme de $\mathbf{Q}^2$. Ainsi il existe un élément $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Q}^2$ tel que $(A^T)^n\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$ et quitte à multiplier par un bon entier, on peut choisir $\boldsymbol{k}$ dans $\mathbf{Z}^2$. Alors la fonction $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(A^T)^j\cdot\boldsymbol{x}}$ est une fonction $L^2$ non constante et invariante par $A$. □

*Remarque.* En particulier, si $tr(A) > 2$, alors $A$ est ergodique sur le tore. En effet $A$ est trigonalisable sur $\mathbf{C}$, et en notant $\lambda$ et $\mu$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité, on a $\lambda\mu = 1$. L'une d'entre elle est de module strictement supérieur à 1 par la condition $tr(A) > 2$ et l'inégalité triangulaire, et donc l'autre est de module strictement inférieur à 1. Aucune n'est une racine de l'unité donc par la proposition, l'action de $A$ sur $\mathbf{T}^2$ est ergodique.

# 5 Ergodicité quantique

## 5.1 Mesures semi-classiques

Les résultats que l'on va énoncer dans cette partie concernent ce que l'on peut interpréter comme la localisation des états quantiques dans l'espace des phases classique, toujours dans la limite semi-classique. Considérons un état quantique $\psi \in \mathbf{C}^N$. On peut définir une distribution $\nu$ sur $\mathbf{T}^2$ en posant :

$$\forall a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2),\ \nu(a) = \langle \mathrm{Op}_N(a)\psi|\psi\rangle$$

On vérifie facilement que c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$. Une telle distribution est appelée *distribution microlocale*. En général, ce n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathbf{T}^2$, et donc $\nu$ ne peut pas s'interpréter de manière simple comme une répartition du système dans l'espace des phases (on aurait par exemple pu espérer que la distribution $\nu$ représente la densité de probabilité de présence du système dans l'espace des phases). Néanmoins, on peut définir une loi de probabilité pour les fonctions dépendant d'une seule variable. En effet si $a$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ ne dépendant que de la variable $x_1$, périodique, on peut écrire :

$$\nu(a) = \langle \mathrm{Op}_N(a)\psi|\psi\rangle = \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2} \widehat{a}(\boldsymbol{m})\langle T_N(\boldsymbol{m})\psi|\psi\rangle = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \widehat{a}(m)\langle t_1^m\psi|\psi\rangle$$

où $\widehat{a}(m)$ désignent les coefficients de Fourier en tant que fonction d'une seule variable. Or $\langle t_1^m\psi|\psi\rangle = \sum_q e^{\frac{2i\pi mq}{N}}|\psi(q)|^2$ et donc on obtient :

$$\nu(a) = \sum_{q\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}\sum_m \widehat{a}(m)e^{\frac{2i\pi mq}{N}}|\psi(q)|^2 = \sum_{q\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} a(\frac{q}{N})|\psi(q)|^2$$

Ainsi on peut interpréter $|\psi(q)|^2$ comme la probabilité de trouver l'état en position $e^{\frac{2i\pi q}{N}}$ : l'état $\psi$ décrit donc la répartition spatiale (*i.e.* en terme de position) du système. Ce résultat est à lier à l'interprétation consensuelle de la fonction d'onde $\psi$ décrivant l'état d'un système lorsque l'espace des phases est $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ (particule ponctuelle) : $|\psi(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ décrit la densité de probabilité de présence de la particule au point $\boldsymbol{x}$.

Les propriétés des distributions microlocales pour un état $\psi$ fixé sont très difficiles à décrire. En général on considère des suites d'états $\psi_N$ (souvent, les états sont des modes propres d'observables ou d'opérateurs d'évolutions), avec $\psi_N \in \mathbf{C}^N$, et la suite de distributions microlocales $(\nu_N)$ associée. On peut étudier le comportement des distributions dans la limite semi-classique $N \longrightarrow \infty$. On dit alors qu'une distribution $\nu$ est une *mesure semi-classique* associée à la suite d'états $\psi_N$ s'il existe une suite extraite $(N_k)_k$ telle que pour tout $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$, $\nu_{N_k}(a) \xrightarrow[k\to\infty]{} \nu(a)$ (on reconnaît la notion de convergence au sens des distributions, convergence qui est associée à la topologie produit). La section suivante s'intéresse au théorème de Shnirelmann, qui stipule que lorsque la suite $\psi_N$ est une suite d'états propres d'un opérateur d'évolution qui est classiquement ergodique, dans la plupart des cas elle converge vers la mesure uniforme sur le tore.

## 5.2 Le théorème de Shnirelmann

**Théorème 5.1** (Schnirelmann). *Soit $\varphi$ un élément ergodique de $G$, et considérons pour tout $N$ une base propre $(\psi_j^N)$ de $\mathrm{U}_N(\varphi)$. Alors il existe une suite d'ensembles $E(N) \subset \{1, ..., N\}$ telle que :*

*(i)* $\frac{\#E(N)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$

*(ii) pour toute suite $(j_N)$ telle que $j_N \in E(N)$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, on a :*

$$\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_{j_N}^N|\psi_{j_N}^N\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_{\boldsymbol{T}^2} f\mathrm{d}\mu$$

*Démonstration.* Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$ on pose $Var_N(f) = \frac{1}{N}\sum_j |\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle|^2$. Quitte à translater $f$, on peut supposer que $f$ est de moyenne nulle. Montrons que $Var_N(f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En utilisant le fait que $(\psi_j)$ est une base de $\mathrm{U}_N(\varphi)$ puis le théorème d'Egorov exact, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle &= \langle \mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(\varphi)\psi_j|\mathrm{U}_N(\varphi)\psi_j\rangle \\ &= \langle \mathrm{U}_N(\varphi)^\dagger\mathrm{Op}_N(f)\mathrm{U}_N(\varphi)\psi_j|\psi_j\rangle \\ &= \langle \mathrm{Op}_N(f\circ\varphi)\psi_j|\psi_j\rangle\end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier $k$ on a $\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle = \langle \mathrm{Op}_N(f\circ\varphi^k)\psi_j|\psi_j\rangle$. En posant $F_k = \frac{1}{k}\sum_k f\circ\varphi^k$ on a $\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle = \langle \mathrm{Op}_N(F_k)\psi_j|\psi_j\rangle$ et il vient donc :

$$\begin{aligned}Var_N(f) &= \frac{1}{N}\sum_j |\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_j |\langle \mathrm{Op}_N(F_k)\psi_j|\psi_j\rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_j \|\mathrm{Op}_N(F_k)\psi_j\|^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_j \langle \mathrm{Op}_N(F_k)^\dagger\mathrm{Op}_N(F_k)\psi_j|\psi_j\rangle\end{aligned}$$

Par ailleurs $\mathrm{Op}_N(F_k)^\dagger\mathrm{Op}_N(F_k) = \mathrm{Op}_N(|F_k|^2) + \mathrm{O}(N^{-1})$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}Var_N(f) &= \frac{1}{N}\sum_j \langle \mathrm{Op}_N(|F_k|^2)\psi_j|\psi_j\rangle + \mathrm{O}(N^{-1}) \\ &= \frac{1}{N}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_N(|F_k|^2)) + \mathrm{O}(N^{-1})\end{aligned}$$

et donc $\limsup Var_N(f) \leq \int_{\mathbf{T}^2} |F_k|^2\,\mathrm{d}\mu$ d'après propriété (iv), et ainsi le théorème de Von Neumann permet de conclure que $Var_N(f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose alors $a_N = Var_N(f)$ et on considère les ensembles :

$$E(N) = \{j \in \{1,...,N\}, |\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle|^2 \leq a_N^{1/2}\}$$

Il est évident que pour toute suite $\psi_{j_N}$ telle que $j_N \in E(N)$, $\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour montrer que la suite d'ensembles $E(N)$ est de densité 1, on applique l'inégalité de Markov. On munit l'ensemble $\{1,...,N\}$ de la probabilité uniforme et on considère la variable aléatoire $X$ définie par $X(j) = |\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_j|\psi_j\rangle|^2$. Alors la probabilité que $X$ soit plus grand que $a_N^{1/2}$ est plus petite que $a_N/a_N^{1/2} = a_N^{1/2}$ qui tend vers 0, et donc la suite $E(N)$ est bien de densité 1. Ainsi, si $f$ est une fonction donnée, on peut construire une suite d'ensembles $E(N)$ vérifiant les propriétés demandées. Le problème à ce stade est que la suite $E(N)$ n'est a priori pas indépendante de la fonction $f$.

Pour résoudre ce problème, on numérote $\mathbf{Z}^2 = \{\boldsymbol{m}_k, k \in \mathbf{N}\}$ et on considère pour tout entier $k$ la suite des ensembles $E_k(N)$ construits à partir des fonctions $e^{i\boldsymbol{m}_k\cdot\boldsymbol{x}}$ qui forment une base hilbertienne de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$. Supposons tout d'abord que l'on dispose d'une suite d'ensembles $E(N)$ vérifiant les propriétés demandées indépendamment de $k$. Alors la suite $E(N)$ vérifie les propriétés demandées pour toute fonction $f$ : en effet dans ce cas, $\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_{j_N}|\psi_{j_N}\rangle = \sum_{\boldsymbol{m}} \widehat{f}(\boldsymbol{m})\langle T_N(\boldsymbol{m})\psi_{j_N}|\psi_{j_N}\rangle$ et pour $\boldsymbol{m}$ non nul, $\langle T_N(\boldsymbol{m})\psi_{j_N}|\psi_{j_N}\rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme la série des coefficients de Fourier converge absolument, on peut intervertir sommation et passage à la limite ce qui donne :

$$\langle \mathrm{Op}_N(f)\psi_{j_N}|\psi_{j_N}\rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbf{T}^2} f \mathrm{d}\mu$$

Pour construire une telle suite $E(N)$, on dispose donc des suites $E_k(N)$ pour tout entier $k$. On peut de plus, quitte à faire des intersections finies qui conservent la densité 1 des suites, supposer que l'on a les inclusions $E_{k+1}(N) \subset E_k(N)$. On construit ensuite une suite $(N_k)_k$ comme suit : $N_0 = 0$, et si $N_0 < N_1 < \ldots < N_{k-1}$ sont construits, on choisit un entier $N_k > N_{k-1}$ tel que pour tout $N \geq N_k$ on ait $\frac{\#E_k(N)}{N} \geq 1 - 2^{-k}$ (ce qui est possible car la suite est de densité 1). On pose alors $E(N) = E_k(N)$ si $N_k \leq N < N_{k+1}$. Il est clair par construction que la suite $E(N)$ est de densité 1. De plus si $j_N \in E(N)$ pour tout entier $N$, alors pour tout entier $k$, à partir d'un certain rang $j_N \in E_k(N)$ et donc $\langle T_N(\boldsymbol{m}_k)\psi_{j_N}|\psi_{j_N}\rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \delta_{\mathbf{0},\boldsymbol{m}_k}$, ce qui achève la démonstration du théorème de Shnirelmann. □

**Ergodicité quantique unique** Le théorème de Shnirelmann montre ainsi que, dans la limite semi-classique, presque tous les les états propres de la transformation ergodique $\varphi$ tendent à être répartis uniformément sur le tore. C'est un résultat très général : premièrement, il ne dépend pas de la quantification choisie puisqu'elles coïncident dans la limite semi-classique. Ensuite, ce résultat est valable sur d'autres espaces que le tore, par exemple lorsque l'espace des phases considéré est une variété riemannienne et le difféomorphisme considéré le flot géodésique lorsque ce dernier est ergodique, ce qui est toujours le cas lorsque la courbure est négative [Non09]. On peut aussi alors se poser la question de l'existence de suites d'états propres $(\psi_N)$ qui auraient des mesures semi-classiques associées différentes de la mesure de Lebesgue. La fait qu'il n'existe pas de telles suites est une propriété appelée ergodicité quantique unique. On connaît des contre-exemples à l'ergodicité quantique unique [FNDB03], mais en se restreignant à certains types d'états propres, on peu démontrer sa validité [KR99]. On la conjecture aussi vraie lorsque l'espace des phases est une variété de courbure négative et la transformation considérée le flot géodésique [RS94].

## 5.3 Autres résultats de localisation de modes propres

On rassemble dans cette partie deux résultats liés à la localisation des états propres d'observables, qui montre que le résultat d'équirépartition du théorème de Shnirelmann n'est pas valable pour n'importe quel type d'états propres.

**Proposition 5.1.** *Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, et $(\psi_N)$ une famille de vecteurs normés tels que $\mathrm{Op}_N(f)\psi_N = 0$. Alors si $g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ est nulle au voisinage de $f^{-1}(0)$, $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-1})$.*

En d'autres termes plus qualitatifs, si $(\psi_N)$ est une suite d'états propres pour une observable $f$ associés à la valeur propre 0, le support des distributions associées se concentre autour de $f^{-1}(0)$. En particulier, si $\nu$ est une mesure semi-classique associée à la suite, son support est contenu dans $f^{-1}(0)$.

*Démonstration.* Par hypothèse, $f$ ne s'annule pas sur le support de $g$ qui est compact (c'est un fermé du tore qui est compact), et donc $|f|$ admet un minimum sur le support de $g$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|f(\boldsymbol{x})| \leq \varepsilon$ alors $g(\boldsymbol{x}) = 0$.

Considérons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, telle que $\chi(t) = 1$ si $t \geq \varepsilon$ et $\chi(t) = 0$ si $t \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{T}^2$, $h(\boldsymbol{x}) = \frac{\chi(|f(\boldsymbol{x})|)}{f(\boldsymbol{x})}$. La fonction $h$ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'annule lorsque $|f(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs elle vérifie $f(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) = \chi(|f(\boldsymbol{x})|) = 1$ lorsque $|f(\boldsymbol{x})| \geq \varepsilon$, et donc en particulier sur le support de $g$. Nous avons donc pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{T}^2$ l'identité $g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$. Par construction des observables quantiques on a donc :

$$\mathrm{Op}_N(g)\mathrm{Op}_N(h)\mathrm{Op}_N(f) = \mathrm{Op}_N(g) + r_N$$

avec $\|r_N\| = \mathrm{O}(N^{-1})$ quand $N$ tend vers l'infini. En appliquant cette égalité au vecteur $\psi_N$ il vient donc $0 = \mathrm{Op}_N(g)\psi_N + r_N\psi_N$ et donc $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \|r_N\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-1})$. □

En fait, le contrôle asymptotique de $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\|$ est beaucoup plus fort que cela :

**Proposition 5.2.** *Dans les mêmes hypothèses que précédemment, on a :*

$$\forall A \in \boldsymbol{R}_+,\ \|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-A})$$

*On notera dans la suite* $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-\infty})$

*Démonstration.* On aura besoin de revenir à la construction des observables quantiques en affinant le résultat concernant le produit d'observables :

**Lemme 5.1.** *Soient* $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$. *Alors* $\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) = \mathrm{Op}_N(ab) + r_N(a,b)$ *et le reste est de la forme*

$$r_N(a,b) = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Op}_N\left(\frac{\rho_k}{N^k}\right) + R_{N,K}(a,b)$$

*avec* $R_{N,K}(a,b) = \mathrm{O}(N^{-K-1})$ *et les* $\rho_k \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ *sont des fonctions dont le support est contenu dans l'intersection des supports de* $a$ *et de* $b$.

*Démonstration.* Fixons un entier $K$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |e^{ix} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(ix)^k}{k!}| \leq C|x|^{K+1}$$

En effet, cette inégalité est valable au voisinage de 0 par le développement de l'exponentielle à l'ordre $K$, disons sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Par ailleurs le membre de gauche est dominé par $|x|^K$ en l'infini, donc quitte à modifier la constante $C$, l'inégalité est aussi valable pour $|x| \geq A$ avec $A$ assez grand. Enfin l'inégalité est vraie sur tout $\mathbf{R}$ par compacité de $[-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$.

On prend alors nos fonctions $a$ et $b$ et on écrit (voir le lemme 2.3) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) - \mathrm{Op}_N(ab) &= \sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} (e^{\frac{i\pi\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{N}} - 1)\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})T_N(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \sum_{k=1}^{K} (\frac{i\pi}{N})^k \frac{\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k}{k!}\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})T_N(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) \\
&+ \sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \frac{C(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}{N^{K+1}}\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^{K+1}\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})T_N(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

où les $C(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ sont des constantes sans intérêt mais uniformément bornées par la constante $C > 0$ fournie par la remarque précédente. Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})| \leq \|\boldsymbol{p}\|\|\boldsymbol{q}\|$ et donc les coefficients de la forme $\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})$ sont à décroissance rapide. Ainsi on peut faire toutes les interversions et les regroupements souhaités dans les sommes infinies manipulées. Par ailleurs les coefficients $d(\boldsymbol{m}) = \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}} \omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})$ sont à décroissance rapide par rapport à $\boldsymbol{m}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})T_N(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) &= \sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}} \omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})T_N(\boldsymbol{m}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{m}} d(\boldsymbol{m})T_N(\boldsymbol{m})
\end{aligned}$$

On pose alors $\rho_k(\boldsymbol{x}) = \frac{(i\pi)^k}{k!}\sum_{\boldsymbol{m}} d(\boldsymbol{m})e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$, ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{T}^2$. De la même manière, les coefficients $c(\boldsymbol{m}) = \sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} C(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})$ sont à décroissance rapide par rapport à $\boldsymbol{m}$, et donc $\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{m}} c(\boldsymbol{m})e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{T}^2$. Donc $\mathrm{Op}_N(\rho)$ est un opérateur borné indépendamment de $N$. En posant $R_{N,K} = N^{-K-1}\mathrm{Op}_N(\rho)$ on a bien :

$$\mathrm{Op}_N(a)\mathrm{Op}_N(b) - \mathrm{Op}_N(ab) = \mathrm{Op}_N(\sum_{k=1}^{K} \frac{\rho_k}{N^k}) + R_{N,K}$$

avec $\rho_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}^2)$ et $\|R_{N,K}\| = \mathrm{O}(N^{-K-1})$. Il reste encore à montrer que le support des $\rho_k$ est contenu dans l'intersection de ceux de $a$ et $b$. La preuve de ce fait repose sur le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\rho_k(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}} \frac{(i\pi)^k}{k!}\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \frac{1}{2^k k!}\sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}} (2i\pi)^k\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \frac{1}{(4i\pi)^k k!}\sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{m}} (2i\pi)^{2k}\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k\widehat{a}(\boldsymbol{p})\widehat{b}(\boldsymbol{q})e^{i\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

De plus le facteur $(2i\pi)^{2k}\omega(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^k$ s'écrit comme une somme de monômes de la forme $(2i\pi)^{2k}p_1^{k_1}p_2^{k_2}q_1^{l_2}q_2^{l_2}$ avec $l_1 + l_2 = k_1 + k_2 = k$. Or on a un lien entre dérivation d'une fonction et multiplication des coefficients de Fourier par des monomes de cette forme, et donc la fonction $\rho_k$ s'écrit comme somme et différence de termes de la forme $\partial^{k_1}\partial^{k_2}a \cdot \partial^{l_1}\partial^{l_2}b$ (à une constante multiplicative près). Le fait que ces termes sont tous nuls en-dehors de l'intersection des supports de $a$ et $b$ achève la preuve du lemme. $\square$

Montrons que l'on peut contrôler la vitesse de décroissance en $\mathrm{O}(N^{-2})$. En posant $e = hf$ on a d'après le lemme précédent $\mathrm{Op}_N(h)\mathrm{Op}_N(f) = \mathrm{Op}_N(e + \frac{\rho}{N}) + \mathrm{O}(N^{-2})$ et le support de $\rho$ est contenu dans celui de $h$. On peut donc définir $l = -\frac{\rho}{f}$ puisque $\rho$ est nulle au voisinage de $f^{-1}(0)$. Toujours par le lemme précédent on obtient :

$$\mathrm{Op}_N(h+N^{-1}l)\mathrm{Op}_N(f) = \mathrm{Op}_N(e+N^{-1}(\rho+lf))+\mathrm{O}(N^{-2}) = \mathrm{Op}_N(e)+\mathrm{O}(N^{-2})$$

En multipliant par $\mathrm{Op}_N(g)$ à gauche dans l'égalité il vient donc $\mathrm{Op}_N(g)\mathrm{Op}_N(h + N^{-1}l)\mathrm{Op}_N(f) = \mathrm{Op}_N(g + N^{-1}\rho') + \mathrm{O}(N^{-2})$ et le support de $\rho'$ est contenu dans celui de $g$, et donc en particulier $\rho'$ est nulle au voisinage du support de $f$, ce qui permet d'appliquer ce que l'on a déjà fait précédemment :

$$0 = \mathrm{Op}_N(g)\psi_N + N^{-1}\mathrm{Op}_N(\rho')\psi_N + \mathrm{O}(N^{-2}) = \mathrm{Op}_N(g)\psi_N + \mathrm{O}(N^{-2})$$

car on sait que $\|\mathrm{Op}_N(\rho')\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-1})$. on obtient donc $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-2})$. Pour montrer que $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-M})$ pour tout $M \in \mathbf{N}^*$, on procède par récurrence en généralisant ce procédé. □

Nous avons donc obtenu un résultat assez intuitif sur la localisation des modes propres d'observables dans la limite semi-classique, qui permet aussi de contraindre le support des mesures semi-classiques associées à une suite d'états. Malheureusement, les hypothèses de la proposition 5.1 sont dans la pratique rarement vérifiées : même si une fonction $a$ prend la valeur $\lambda$ en un certain point, il n'y a aucune raison a priori qu'une des observables $\mathrm{Op}_N(a)$ ait pour valeur propre $\lambda$, et il est donc encore moins probable que l'on dispose d'une telle suite de modes propres. Par contre, la loi de Weyl assure que si $a$ prend la valeur $\lambda$, alors il existe une suite $\lambda_N$ de valeurs propres de $\mathrm{Op}_N(a)$ qui converge vers $\lambda$. En fait de façon remarquable le résultat démontré reste valable :

**Proposition 5.3.** *Soient $a \leq b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ et $\psi_N$ une suite de vecteurs normés tels que $\mathrm{Op}_N(f)\psi_N = \lambda_N\psi_N$ avec $\lambda_N \in [a,b]$. Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$ nulle au voisinage de $f^{-1}([a,b])$. Alors $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-\infty})$.*

En particulier si $\lambda_N$ converge vers $\lambda$ et que l'on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g$ est nulle sur $f^{-1}(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)$, alors on a encore $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\| = \mathrm{O}(N^{-\infty})$.

Là encore, on aura besoin de revenir à la construction des observables quantiques. On va passer par le lemme suivant :

**Lemme 5.2.** *Soient $(a_\lambda)$ et $(b_\mu)$ des familles de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{T}^2)$, où $\lambda$ et $\mu$ sont des paramètres prenant leurs valeurs dans des compacts $L$ et $M$. On suppose que les $a_\lambda$ et $b_\mu$ ainsi que toutes leurs dérivées dépendent continument des paramètres. Alors $\mathrm{Op}_N(a_\lambda)\mathrm{Op}_N(b_\mu) - \mathrm{Op}_N(a_\lambda b_\mu) = r_N(a_\lambda, b_\mu)$ et $\|r_N(a_\lambda, b_\mu)\| \leq \frac{C}{N}$ où la constante $C$ est indépendante de $\lambda$ et $\mu$.*

*Démonstration.* D'après le lemme 2.3, on a l'inégalité suivante :

$$\|\mathrm{Op}_N(a_\lambda)\mathrm{Op}_N(b_\mu) - \mathrm{Op}_N(a_\lambda b_\mu)\| \leq \frac{\pi}{N}\left(\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2} \|\boldsymbol{m}\|\|\widehat{a_\lambda}(\boldsymbol{m})\|\right)\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2} \|\boldsymbol{n}\|\|\widehat{b_\mu}(\boldsymbol{n})\|\right)$$

Or par la relation entre dérivation des fonctions et multiplication des coefficients de Fourier par des facteurs $2i\pi m_k$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\|\boldsymbol{m}\|\|\widehat{a_\lambda}(\boldsymbol{m})\| &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\frac{\|\boldsymbol{m}\|}{(1+\|\boldsymbol{m}\|^2)^2}\|\widehat{\partial_1^2\partial_2^2\cdot a_\lambda}(\boldsymbol{m})\| \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\frac{\|\boldsymbol{m}\|}{(1+\|\boldsymbol{m}\|^2)^2}\|\partial_1^2\partial_2^2\cdot a_\lambda\|_\infty\end{aligned}$$

Or l'application $(\lambda,\boldsymbol{x})\in L\times\mathbf{T}^2\longmapsto\partial_1^2\partial_2^2\cdot a_\lambda(\boldsymbol{x})$ est continue sur le compact $L\times\mathbf{T}^2$ donc elle est bornée. Ainsi la somme $\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^2}\|\boldsymbol{m}\|\|\widehat{a_\lambda}(\boldsymbol{m})\|$ est majorée indépendamment de $\lambda$. Il en va de même pour $\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbf{Z}^2}\|\boldsymbol{n}\|\|\widehat{b_\mu}(\boldsymbol{n})\|$ ce qui conclut la preuve du lemme. □

On peut donc passer à la preuve de la dernière proposition.

*Démonstration.* Il existe par compacité un $\varepsilon>0$ tel que si $f(\boldsymbol{x})\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$ alors $g(\boldsymbol{x})=0$. On reprend la fonction $\chi$ de la preuve précédente et on pose, pour $\lambda\in[a,b]$, $h_\lambda=\frac{\chi(|f-\lambda|)}{f-\lambda}$. Alors sur le support de $g$ on a $(f-\lambda)h_\lambda=1$ et donc $g(f-\lambda)h_\lambda=g$ sur $\mathbf{T}^2$. Les fonctions $f-\lambda$ et $h_\lambda$ ainsi que toutes leurs dérivées sont continues en $(\lambda,\boldsymbol{x})$ et on peut appliquer le lemme précédent. Il vient donc :

$$\mathrm{Op}_N(g)\mathrm{Op}_N(h_{\lambda_N})\mathrm{Op}_N(f-\lambda_N)=\mathrm{Op}_N(g)+r_N$$

où $\|r_N\|\leq\frac{C}{N}$. En appliquant cette égalité aux vecteurs $\psi_N$ on obtient $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\|=\mathrm{O}(N^{-1})$. Ensuite, pour obtenir $\|\mathrm{Op}_N(g)\psi_N\|=\mathrm{O}(N^{-M})$ pour tout $M\geq0$, il faut montrer que la formule du lemme 5.1 est valable de manière uniforme si l'on considère des familles de fonctions qui dépendent de manière continue de paramètres prenant leurs valeurs dans des compacts. On ne le fera pas ici, mais la démonstration reprend des techniques que l'on a déjà employées. □

## Références

[DEG03] Mirko Degli Esposti and Sandro Graffi. Mathematical aspects of quantum maps. In *The mathematical aspects of quantum maps*, pages 49–90. Springer, 2003.

[DV] Pierre Dehornoy and Jérôme Valentin. Sur les présentations de $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Z})$ par générateurs et relations.

[FNDB03] Frédéric Faure, Stéphane Nonnenmacher, and Stephan De Bievre. Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods. *Communications in Mathematical Physics*, 239(3) :449–492, 2003.

[KR99] Par Kurlberg and Zeév Rudnick. Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus. *arXiv preprint chao-dyn/9901031*, 1999.

[LC] Patrice Le Calvez. Systèmes dynamiques I.

[Mar09] Jens Marklof. Three lectures on quantum maps, quantum ergodicity and bouncing ball modes. In *LMS-EPSRC Short Course "Quantum Chaos"*, June 2009.

[Non09] Stéphane Nonnenmacher. *Quelques aspects de Chaos Quantique*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Sud - Paris XI, Juillet 2009.

[RS94] Zeév Rudnick and Peter Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 161(1) :195–213, 1994.