Exposés de Maîtrise FIMFA

Hyperbolicité des variétés complexes

Simon HENRY et Bruno LE FLOCH
sous la direction de Joël MERKER

Vendredi 27 juin 2008

L'objectif de ce mémoire est de définir la notion d'hyperbolicité pour les variétés complexes, de donner des exemples de variétés hyperboliques, et de présenter des résultats de base sur l'hyperbolicité, afin de pouvoir énoncer la conjecture d'hyperbolicité de Kobayashi et en expliquer l'origine. Nous nous sommes essentiellement inspirés du livre de Serge Lang [5]. Le mémoire commence par une introduction relativement informelle sur la classification des surfaces de Riemann. Le chapitre 1 introduit et présente les faits basiques sur la métrique de Poincaré, en s'appuyant partiellement sur les résultats de l'introduction. Le deuxième chapitre introduit la métrique de Kobayashi et l'hyperbolicité au sens de Kobayashi qui sont les thèmes essentiels du mémoire. Les chapitres 4 et 5 sont très largement indépendants des précédents.

0. Classification des surfaces de Riemann

Dans l'espoir de rendre naturelles les diverses notions d'hyperbolicité et de les motiver, nous allons commencer par donner une rapide présentation sans vraies preuves de la classification des variétés complexes en dimension 1. Pour plus de détails sur cette théorie on pourra consulter [2] et [3].

Définition. On appelle *surface de Riemann* toute variété analytique complexe connexe de dimension 1.

Le théorème de Riemann concernant les ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ se généralise aux surfaces de Riemann abstraites de la façon suivante :

Théorème. *À biholomorphisme près, il n'y a que trois surfaces de Riemann simplement connexes distinctes deux à deux :*

- *la sphère de Riemann* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *;*
- *le plan complexe* $\mathbb{C}$ *;*
- *le disque unité* $\mathbb{D}$*, qui est aussi biholomorphe au demi-plan de Poincaré* $\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Si on considère maintenant une surface de Riemann quelconque X, on peut construire son revêtement universel[1] $p : \tilde{X} \to X$, et munir $\tilde{X}$ de la[2] structure de surface de Riemann qui rend holomorphe p, ce qui fait de $\tilde{X}$ une surface de Riemann simplement connexe, c'est-à-dire l'une des trois surfaces précédentes.

Définition. On dira qu'une surface de Riemann est *sphérique* si son revêtement universel est biholomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, *euclidienne* si il est isomorphe à $\mathbb{C}$, et *hyperbolique* si il est biholomorphe à $\mathbb{D}$.

De façon générale, une variété X est le quotient de son revêtement universel par le groupe des automorphismes du revêtement[3], qui peut être n'importe quel groupe de difféomorphismes de $\tilde{X}$ qui agit librement et proprement discontinûment — donc qui est discret et dont les éléments autres que l'identité n'ont pas de points fixes.

Dans notre cas, le revêtement étant holomorphe, les automorphismes du revêtement sont automatiquement holomorphes : comme ils vérifient $p \circ f = p$, on a localement "$f = p^{-1} \circ p$", donc par composition f est holomorphe.

Il ne nous reste plus qu'à trouver les groupes d'automorphismes discrets agissant librement sur chacune des trois surfaces de Riemann simplement connexes.

[1] C'est-à-dire l'unique revêtement simplement connexe de X (à isomorphisme près).

[2] Il s'agit de la structure obtenue en restreignant les cartes de X à des ouverts simplement connexes et en les relevant à $\tilde{X}$.

[3] Un automorphisme de revêtement est une application $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ vérifiant $p \circ f = p$. C'est automatiquement un difféomorphisme de $\tilde{X}$.

Lemme. *On a les résultats suivants :*

- *les automorphismes de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *sont les homographies* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ *avec* a,b,c *et* d *des nombres complexes. Toute homographie possède deux points fixes (comptés avec multiplicité) dans* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *;*
- *les automorphismes de* $\mathbb{C}$ *sont les transformations affines, et les seules d'entre elles à ne pas avoir de point fixe sont les translations ;*
- *les automorphismes de* $\mathbb{H}$ *sont les homographies à coefficients réels de déterminant positif.*

Dans le cas de la sphère il n'y a donc aucun sous-groupe non trivial agissant librement, car aucun élément n'agit sans point fixe.

Pour $\mathbb{C}$, un sous-groupe agissant librement est forcément un groupe de translations, et on peut donc l'identifier avec un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$. On sait qu'un tel groupe est soit monogène, soit engendré par deux éléments.

Le cas de $\mathbb{H}$ est plus compliqué. On identifie son groupe d'automorphismes avec $PSL_2(\mathbb{R})$,et de très nombreux sous-groupes conviennent : ce sont exactement les sous-groupes discrets agissant librement, qu'on appelle "groupes fuchiens".

On obtient ainsi la classification des surfaces de Riemann.

Théorème. (H.POINCARÉ) *Toute surface de Riemann est soit sphérique, soit euclidienne, soit hyperbolique. De plus, à biholomorphisme près :*

- *Il n'y a qu'une seule surface de Riemann sphérique,* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- *Toute surface de Riemann euclidienne est le quotient de* $\mathbb{C}$ *par un groupe discret de translations, c'est à dire soit* $\mathbb{C}$, *soit* $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ *qui est isomorphe à* $\mathbb{C}^*$, *soit un tore complexe de la forme* $\mathbb{C}/(a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z})$, *avec* a *et* b *deux nombres complexes* $\mathbb{R}$-*indépendants*[4].
- *Toute surface de Riemann hyperbolique est un quotient de* $\mathbb{H}$ *par un sous-groupe fuchien.*

La famille des surfaces hyperboliques est clairement la plus riche des trois : alors que dans les deux premiers cas il n'y que quelques groupes qui conviennent, les groupes Fuschiens sont très nombreux, et leur classification n'est d'ailleurs toujours pas connue. Le théorème précédent dit essentiellement que la majorité des surfaces de Riemann sont hyperboliques. Il apparaît donc comme primordial d'étudier davantage les propriétés de leur revêtement universel $\mathbb{D} \simeq \mathbb{H}$. Dans le chapitre suivant nous allons justement nous intéresser à un attribut essentiel du disque : sa métrique hyperbolique.

1. La métrique de Poincaré

§ **1.1. Métrique de Poincaré sur** $\mathbb{H}$**.** On commence par faire la remarque suivante : si f est un automorphisme quelconque de $\mathbb{H}$, c'est à dire si f est de la forme $z \to \frac{az+b}{cz+d}$,

[4] Deux tels tores ne sont en général pas biholomorphes.

avec a, b, c et d des réels tels que $ad - cb = 1$, alors on a la relation

$$(*) \qquad \frac{|f'(z)|}{\mathrm{Im}\,(f(z))} = \frac{1}{\mathrm{Im}\,(z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}$. En effet, calculons d'abord la dérivée de f :

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2},$$

et ensuite sa partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(f(z)) &= \frac{\mathrm{Im}\,\big((az+b)(c\overline{z}+d)\big)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\mathrm{Im}\,\big(ac|z|^2 + bd + adz + bc\overline{z}\big)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}\,(z)}{|cz+d|^2} = |f'(z)| \cdot \mathrm{Im}\,(z). \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une relation vérifiée par tous les automorphismes de $\mathbb{H}$ qui va pouvoir s'interpréter comme la conservation d'une métrique infinitésimale.

Définition. Soit X une variété complexe.

• On appellera *métrique infinitésimale sur* X la donnée en chaque point a de X d'une norme sur l'espace tangent :

$$\begin{cases} T_aX \to \mathbb{R} \\ \quad v \quad \mapsto |v|_a, \end{cases}$$

qui est continue sur TX.

• La *longueur* d'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ de classe C^1 (par morceaux) par rapport à une métrique infinitésimale est alors définie par :

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\gamma(t)}\, dt\ ;$$

cette longueur ne dépend pas de la paramétrisation.

• La *distance* entre deux points x et y de X par rapport à une métrique infinitésimale est :

$$d(x,y) = \inf\left\{ l(\gamma) \,\middle|\, \gamma \text{ continu, } C^1 \text{ par morceaux ; } \gamma(0) = x\ ;\ \gamma(1) = y \right\}\ ;$$

on vérifie que ceci donne bien une distance.

Définition. On appelle *métrique de Poincaré sur* $\mathbb{H}$ la métrique infinitésimale sur $\mathbb{H}$ définie par :

$$|v|_z = \frac{|v|_{euc}}{\mathrm{Im}\,(z)},$$

où $|v|_{euc}$ désigne le module d'un vecteur $v \in T_z\mathbb{H}$, vu comme nombre complexe via l'identification canonique $T_z\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}$ induite par l'inclusion $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Dans toute la suite du chapitre, $l(\cdot)$ et $d(\cdot,\cdot)$ désigneront respectivement la longueur d'une courbe et la distance entre deux points pour la métrique de Poincaré sur $\mathbb{H}$.

Il est essentiel d'observer que la relation $(*)$ signifie que tout automorphisme f de $\mathbb{H}$ est une *isométrie* pour la métrique de Poincaré ; en effet, on a $l(\gamma) = l(f(\gamma))$ pour tout chemin γ de classe C^1 par morceaux, puisque :

$$l(f(\gamma)) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \frac{|f'(\gamma(t))|}{\mathrm{Im}\,(f(\gamma(t)))} dt \overset{(*)}{=} \int_0^1 |\gamma'(t)| \frac{1}{\mathrm{Im}\,(\gamma(t))} dt = l(\gamma),$$

d'où il découle immédiatement que $d(x,y) = d(f(x), f(y))$.

Théorème. *Les seules métriques sur $\mathbb{H}$ invariantes par tous les automorphismes de $\mathbb{H}$ sont les multiples de la métrique de Poincaré.*

Cela ce déduit immédiatement du fait que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$, ainsi une métrique invariante est entièrement déterminer par sa valeur en un points de $\mathbb{H}$. Deux métrique invariante sont donc automatiquement multiple l'une de l'autre, et la métrique de Poincaré est bien invariante.

C'est à ce titre que la métrique de Poincaré est une propriété intrinsèque du demi-plan.

§ **1.2. Métrique de Poincaré sur les surfaces de Riemann simplements connexes hyperboliques.** On va donc pouvoir transporter cette métrique par isomorphisme : si U est une autre surface de Riemann, et f un isomorphisme de U dans $\mathbb{H}$, on définit la longueur l_U d'une courbe de U par la formule : $l_U(\gamma) = l(f(\gamma))$. On remarque que l_U ne dépend pas du choix de f : si g est un autre isomorphisme de U dans $\mathbb{H}$, alors $f \circ g^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{H}$, et donc $l(g(\gamma)) = l(f \circ g^{-1} \circ g(\gamma)) = l(f(\gamma))$. On définit aussi $d_U(x,y) = d(f(x), f(y))$, qui correspond bien à la distance associé à la longueur l_U. En terme de métriques infinitésimales, un calcul simple permet de voir que l_U est la longueur associée à la métrique infinitésimale $|v|_z = |f'(z).v|_{f(z)}$.

Définition. Si U est une surface de Riemann hyperbolique simplement connexe (U est donc biholomorphe à $\mathbb{H}$), on appelle *métrique de Poincaré sur U* la métrique définie ci-dessus.

Théorème. *La métrique de Poincaré sur $\mathbb{D}$ est donnée par :*

$$|v|_z = \frac{2|v|_{euc}}{1-|z|^2}.$$

Démonstration. Il s'agit uniquement d'un calcul, en utilisant l'isomorphisme de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{H}$: $f(z) = -i\frac{z+i}{z-i}$. □

On peut aussi généraliser le lemme de Schwartz au cadre des surfaces de Riemann hyperboliques :

Lemme (Schwarz-Pick) *Soient U et V deux surfaces de Riemann hyperboliques simplement connexes, chacune munie de sa métrique de Poincaré, et $f : U \to V$ une application holomorphe. Alors pour tout $z \in U$ et pour tout $v \in T_zU$:*

$$|f'(z)v|_{f(z)} \leqslant |v|_z.$$

De plus, si il existe un point z et un vecteur v non nul pour lesquels il y a égalité, alors f est automatiquement bijective.

Remarque : on sait aussi que si f est bijective, alors on a égalité dans l'inégalité précédente, cela découle immédiatement de la définition de la métrique de Poincaré sur une surface quelconque.

Démonstration. Soient $z \in U$ et $v \in T_zU$ fixés. Considérons un biholomorphisme g de V dans $\mathbb{D}$ qui envoie $f(z)$ sur 0, et de même h un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ dans U qui envoie 0 sur z.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[r, "f"] & V \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{D} \arrow[ur, "h"] \arrow[rrr, dashed, "t = g \circ f \circ h"] & & & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

Posons alors $t = g \circ f \circ h$, de sorte que $t : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une application holomorphe vérifiant $t(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz usuel, $|t'(0)| \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si t (et donc f) est bijective. On peut écrire cette inégalité en terme de la métrique sur $\mathbb{D}$: pour tout vecteur $w \in T_0\mathbb{D}$,

$$|t'(0)w|_{t(0)} \leqslant |w|_0.$$

Grâçe aux relations de conservation de la métrique que vérifie g et h :

$$|g'(a)w|_{g(a)} = |w|_a$$
$$|h'(b)w|_{h(b)} = |w|_b$$

qu'on applique en $a = f(z)$ et $b = 0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} |h'(0)w|_{h(0)} = |w|_0 \geqslant |t'(0)w|_{t(0)} &= \big|[g' \circ f \circ h(0)] \cdot [f' \circ h(0)] \cdot h'(0) \cdot w\big|_{g \circ f \circ h(0)} \\ &= \big|g'(f(z)) \cdot f'(z) \cdot h'(0) \cdot w\big|_{g(f(z))} \\ &= |f'(z) \cdot h'(0) \cdot w|_{f(z)}. \end{aligned}$$

Finalement, comme h est un biholomorphisme, $h'(0) : T_0\mathbb{D} \to T_zU$ est bijective, donc on peut choisir w tel que $h'(0) \cdot w = v$. Avec ce choix, on a $|v|_{h(0)} \geqslant |f'(z)v|_{f(z)}$, soit le résultat voulu. □

§ **1.3. Métrique de Poincaré sur une surface de Riemann hyperbolique quelconque.** Considérons maintenant une courbe γ sur une surface de Riemann hyperbolique X quelconque. En appliquant le théorème de relèvement, on peut la relever en une courbe $\tilde{\gamma}$ sur $\mathbb{D}$, on pose alors $l_X(\gamma) = l_{\mathbb{D}}(\tilde{\gamma})$. Cette définition ne dépend pas du choix du relèvement car les automorphismes du revêtement sont des isométries.

On vérifie facilement que la distance d_X associée à l_X est la distance quotient de la distance de Poincaré sur $\mathbb{D}$ (on peut voir X comme un quotient de $\mathbb{D}$).

On peut aussi montrer qu'il existe une métrique infinitésimale associée à l_X qui est entièrement caractérisée par la propriété :

$$|p'(z).v|_{p(z)} = |v|_z,$$

pour tout $z \in \mathbb{D}$, $v \in T_z\mathbb{D}$. où p désigne le revêtement $\mathbb{D} \to X$.

Cette métrique est explicitement donnée par la construction suivante : soit $x \in X$, et $\tilde{x} \in \mathbb{D}$ un relèvement de x. On sait alors qu'il existe un voisinage U de x, et un voisinage $\tilde{U}$ de $\tilde{x}$ telle que p induise un isomorphisme de $\tilde{U}$ sur U. Notons f la réciproque de cette isomorphisme, on peut alors définir pour $v \in T_xX$: $|v|_x = |f'(x).v|_{f(x)}$.

On vérifie facilement que cette métrique possède bien les propriétés énoncées.

Définition. On appellera encore *métrique de Poincaré* sur X la métrique définie précédemment.

On peut maintenant énoncer une version un peu plus génerale du lemme de Schwarz-Pick, dans laquelle on ne suppose plus que les surfaces de Riemann sont simplement connexes, dont la démonstration est essentiellement la même que pour la version précédente.

Lemme (Schwarz-Pick) *Soient U et V deux surfaces de Riemann hyperboliques munies de leur métrique de Poincaré et soit $f : U \to V$ une application holomorphe. Alors pour tout $z \in U$ et tout $v \in T_zU$:*

$$|f'(z)v|_{f(z)} \leqslant |v|_z.$$

Si il existe un point z et un vecteur v non nul pour lesquels il y à égalité, alors f est automatiquement un revêtement, et il y a égalité pour tous z et v.

§ **1.4. Géodésiques et arcs de géodésiques.**

Théorème - Définition. *Soient U une surface de Riemann hyperbolique simplement connexe, et a et b deux points de U. Alors il existe une unique courbe γ (à reparamétrisation près) allant de a à b telle que $l_U(\gamma) = d_U(a,b)$. Une telle courbe est appelé* arc de géodésique

Démonstration. Quitte à composer par un biholomorphisme bien choisit, on peut supposer que $U = \mathbb{H}$, $a = i$, et b est imaginaire pur. On remarque alors qu'on peut minorer la longueur de toute courbe allant de a à b par la longueur de sa projection sur l'axe imaginaire. Ainsi toute courbe allant de a à b est plus longue que le segment joignant a à b. d'ou le résultat. $\square$

À partir de cela, nous pouvons définir les géodésiques du demi-plan de Poincaré :

Théorème - Définition. *On appelle géodésique de $\mathbb{H}$, les droites orthogonales à l'axe réel, et les demi cercles orthogonaux à l'axe réel. Par deux point a et b distincts il passe une et une seul géodésique, et une courbe γ est un arc de géodésique si et seulement si elle est incluse dans une géodésique.*

La démonstration repose essentiellement sur le fait que l'ensemble des courbes qu'on a nommé géodésiques est exactement l'orbite de la droite imaginaire pure sous l'action de $Aut(\mathbb{H})$. Ainsi, après avoir vérifié géométriquement que par deux points a et b distincts il passe une et une seule géodésique, on peut composer par une homographie qui envoie cette géodésique sur l'axe imaginaire pur et çe ramener au cas de la démonstration précédente.

On appellera aussi géodésique d'une surface de Riemann hyperbolique simplement connexe U les images des géodésiques de $\mathbb{H}$ par des biholomorphismes. Les géodésiques de U vérifient évidemment les même propriétés que les géodésiques de $\mathbb{H}$.

Théorème *Les géodésiques de $\mathbb{D}$ sont les diamètres de $\mathbb{D}$ et les cercles orthogonaux à $\mathbb{D}$.*

Ceci se prouve en regardant explicitement les images des géodésiques de $\mathbb{H}$ par les biholomorphismes de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$

§ **1.5. Petit théorème de Picard.** Donnons tous de suite une application de la notion d'hyperbolicité :

Théorème. *Toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ à valeurs dans une surface de Riemann hyperbolique est constante.*

Démonstration. Si on a une application f de $\mathbb{C}$ vers une surface de Riemann hyperbolique X, alors comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, f peut se relever en une application sur le revêtement universel de X, c'est-à-dire $\mathbb{D}$. Et donc f est constante par le théorème de Liouville. □

Théorème (Picard). *Le plan complexe $\mathbb{C}$ privé de deux points est hyperbolique. Cela signifie que toute application holomorphe non constante de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ prend toute valeur dans $\mathbb{C}$ sauf peut-être une.*

Démonstration. $\mathbb{C}$ privé de deux point n'est isomorphe à aucune des surfaces sphériques ou euclidiennes pour des raisons topologiques : il n'est isomorphe ni à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ni à un tore car il n'est pas compact, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ car il n'est pas simplement connexe et il n'est pas non plus isomorphe à $\mathbb{C}^*$, car il n'ont pas la même cohomologie de de Rham. $\mathbb{C}$ privé de deux points est donc hyperbolique. □

2. L'Hyperbolicité au sens de Kobayashi

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion de métrique hyperbolique à des variétés complexes de dimension plus grande que 1. La technique que nous avons utilisé au chapitre précedent repose essentiellement sur le théorème de classification des surfaces de Riemann. Malheureusement, il n'existe aucun équivalent de ce théorème en dimension supérieure. Il va donc falloir définir la métrique hyperbolique de façon plus intrinsèque.

§ **2.1. Pseudo-distance de Kobayashi.**

Définition. Soit X une varété complexe, et x, y deux point de X. On appelle *chaîne de Kobayashi entre x et y* deux suites finies de points $p_1, \dots, p_n$ et $q_1, \dots, q_n$ de $\mathbb{D}$ et une suite d'applications $f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{D}$ dans X telles que $f_1(p_1) = x$ et $f_n(q_n) = y$ et pour tous $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$.

On peut tout de suite noter que si X est connexe, deux points quelconques peuvent toujours être reliés par une chaîne de Kobayashi. En effet, "être reliès par une chaîne de Kobayashi" est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont ouvertes : si x est un point quelconque de X, on peut trouver un voisinage O de x dans X qui soit biholomorphe à la boule unité de $\mathbb{C}^n$, et pour tout point y de O on peut trouver un disque dans O qui contient à la fois x et y, donc y est dans la même classe déquivalence que x. Il s'en suit que les classes déquivalence de cette relation forment une partition de X par des ouverts, et il ne peut donc y en avoir qu'une seule.

Définition. Si $c = \{(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n), (f_1, \dots, f_n)\}$ est une chaîne de Kobayashi, on définit sa longueur $l(c)$ par :

$$l(c) = \sum_{i=1}^{n} d_{\mathbb{D}}\big(p_i, q_i\big),$$

où $d_{\mathbb{D}}$ désigne la distance de Poincaré sur $\mathbb{D}$.

On peut enfin définir la distance de Kobayashi sur une variété X quelconque.

Définition. Soit X une variété complexe, et soient x, y deux points de X. On définit la *(pseudo-)distance de Kobayashi* entre x et y par :

$$d_X(x, y) = \inf_c l(c)$$

où c parcourt l'ensemble des chaîne de Kobayashi joignant x à y.

La distance de Kobayashi est bien une pseudo-distance : elle est symétrique car une chaîne de Kobayashi de x à y peut être retournée en un chaîne de y à x de même longueur. L'inégalité triangulaire vient du fait qu'on peut concaténer une chaîne de x à z et une chaîne de z à y pour obtenir une chaîne de x à y dont la longueur est la somme des deux précedentes et $d(x, x) = 0$ car la chaîne composée d'un seul point et d'aucun disque est une chaîne de longueur nulle reliant x à lui-même.

En revanche, le fait que $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ n'est pas toujours vérifié : par exemple sur $\mathbb{C}$ on peut facilement voir que d est identiquement nulle, en prennant pour deux point x, y quelconques la chaîne c_R composée uniquement du disque de rayon R suffisamment grand, on alors $l(c_R) \leqslant d_{\mathbb{D}}(0, x/R) + d_{\mathbb{D}}(0, y/R)$, qui tend vers 0, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition. On dira qu'une variété complexe quelconque est *hyperbolique au sens de Kobayashi* ou *Kobayashi hyperbolique* (ou encore tout simplement hyperbolique quand il n'y a pas de confusion possible) quand sa pseudo-distance de Kobayashi est bien une distance.

Remarque. Nous prouverons dans peu de temps que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi et l'hyperbolicité des surfaces de Riemann définie au chapitre précédent sont des notions équivalentes, ainsi il n'y aura pas d'ambiguité sur le terme "hyperbolique".

Théorème (contraction des distances). *Soit f une application holomorphe entre deux variétés complexes U et V. Alors pour tous x, y dans U :*

$$d_U(x,y) \geqslant d_V\big(f(x), f(y)\big).$$

Si f est une bijection, il y a égalité.

La preuve est immédiate : si c est une chaîne de Kobayashi entre x et y, l'image de c par f est un chaîne de Kobayashi entre $f(x)$ et $f(y)$ de même longueur, donc en passant aux bornes $\inf$ on obtient l'inégalité voulue. Si f est une bijection, on applique l'inégalité précédente à f^{-1} pour obtenir l'autre inégalité, et conclure.

§ **2.2. Cas de la dimension 1.** Prouvons maintenant la remarque que nous avions annoncé quelque lignes plus haut.

Théorème. *Pour les surfaces de Riemann, la notion d'hyperbolicité définie au chapitre précedent est équivalente à la notion d'hyperbolicité au sens de Kobayashi. Et pour une surface de Riemann hyperbolique la distance de Poincaré coïncide avec la distance de Kobayashi.*

Remarquons que ce résultat fournit immédiatement une grande classe de variétés hyperboliques (essentiellement, presque toutes les variétés de dimension 1) et surtout fournit un moyen de connaître (plus ou moins explicitement) la métrique de Kobayashi pour celles-ci.

Démonstration. Si X est une surface de Riemann *non* hyperbolique, alors son revêtement universel $\tilde{X}$ est $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}$, et on a une application surjective $p : \tilde{X} \to X$. Comme on l'a vu plus haut, la distance de Kobayashi sur $\mathbb{C}$ est identiquement nulle, et pour les mêmes raisons celle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'est aussi. Si on prend deux points quelconques de X, ils peuvent s'écrire comme $p(x)$ et $p(y)$ pour certains points x, y de $\tilde{X}$, et on peut appliquer la propriété de contraction des distances :

$$d_X(p(x), p(y)) \leqslant d_{\tilde{X}}(x,y) = 0.$$

La pseudo-distance de Kobayashi sur X est donc identiquement nulle, et X n'est donc pas hyperbolique au sens de Kobayashi.

Supposons maintenant que X est un surface de Riemann hyperbolique (au sens du chapitre précédent). Notons d^P la distance de Poincaré sur X et d la pseudo-distance de Kobayashi sur X. Prenons deux points quelconques x, y de X, et considérons la chaîne de Kobayashi entre x et y qui ne contient que deux points et une application, la projection p :

$\mathbb{D} \to X$ du revêtement universel de X. La longueur de cette chaîne est alors exactement la distance de Poincaré entre x et y, donc :

$$d(x,y) \leqslant d^P(x,y).$$

Tâchons maintenant d'obtenir l'autre inégalité : considérons pour cela deux points x, y de X, et c une chaîne de Kobayashi les reliant. On peut relever c en une chaîne $\tilde{c}$ de $\mathbb{D}$ reliant des relèvements $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de x et y, en relevant chacune des applications qui compose c. Il est immédiat que $\tilde{c}$ a la même longueur que c. Notons $\tilde{c} = \{(p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n), (f_1, \ldots, f_n)\}$. D'après le lemme de Schwarz,

$$d^P(f(p_i), f(q_i)) \leqslant d_{\mathbb{D}}(p_i, q_i),$$

où $d_{\mathbb{D}}$ désigne la distance de Poincaré sur $\mathbb{D}$ (on a repris les mêmes notations que dans la définition de longueur de chaîne).

On a alors :

$$l(c) = \sum_{i=1}^{n} d_{\mathbb{D}}(p_i, q_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} d^P(f(p_i), f(q_i)) \geqslant d^P(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

et donc, par passage à la borne $\inf$, on obtient que $d(x,y) \geqslant d^P(x,y)$ et donc que $d = d^P$.

Cela prouve entre autres que d est bien une distance, c'est-à-dire que X est hyperbolique au sens de Kobayashi. $\square$

Nous allons à présent étudier brièvement les propriétés topologiques de la distance de Kobayashi.

§ **2.3. Propriétés topologiques**

Théorème. *Soit X une variété complexe, et d la pseudo-distance de Kobayashi sur X.*

- *La fonction $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue*
- *Si X est kobayashi hyperbolique, alors la distance d définit la topologie de X.*

Démonstration. Commençons par prouver que d est continue.

On sait déjà que d est symétrique, et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire. Il suffit de prouver que si une suite x_n tend vers un point x de X, alors $d(x_n, x)$ tend vers 0. En effet, une fois qu'on aura prouvé ceci, on saura que si deux suites x_n et y_n tendent vers x et y, alors :

$$d(x,y) - d(x,x_n) - d(y_n,y) \leqslant d(x_n,y_n) \leqslant d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n),$$

et donc $d(x_n, y_n)$ tend vers $d(x,y)$.

Considérons donc une suite x_n qui tend vers un point x de X. Soit O un voisinage de x biholomorphe à la boule unité de $\mathbb{C}^n$ (avec un biholomorphisme qui envoie x sur 0). Pour tout point z de O, on note $|z|$ la norme de z vu comme un point de la boule unité de $\mathbb{C}^n$. On peut supposer (quitte à oublier les premiers termes) que x_n est une suite de points de O. $|x_n|$ tend donc vers 0. Or si z est un point de O, en considérant la chaîne de Kobayashi composée d'une unique application : $\mathbb{D} \to O$ qui à u associe $u \cdot \frac{z}{|z|}$, on voit que $d(z,x) \leqslant d(0,|z|)$, et donc comme $|x_n|$ tend vers 0, $d(x_n,x)$ tend vers 0.

Montrons maintenant le deuxième point. Soit X une variété hyperbolique. Nous allons montrer que d définit la même notion de convergence que la topologie de X (ce qui est suffisant, car un point d'une variété admet toujours un système fondamental dénombrable de voisinages).

Nous avons déjà montré que si x_n tend vers x alors $d(x_n, x)$ tend vers 0. Il s'agit maintenant de prouver la réciproque.

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite x_n telle que $d(x_n, x)$ tende vers 0, mais telle que x_n ne converge pas vers x. L'idée de la preuve est alors globalement d'extraire une sous-suite qui converge vers un point x' distinct de x (on peut le faire par exemple si la variété est compacte). Par continuité de d on obtient alors que $d(x_n, x)$ tend vers $d(x, x')$ et donc que $d(x', x) = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'hyperbolicité de X. Le probléme est que la suite x_n n'a aucune raison de rester dans un compact, et qu'on ne peut donc pas toujours extraire directement. Nous allons montrer comment contourner cette difficulté.

Soit z un point de X, et $c = \{(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n), (f_1, \dots, f_n)\}$ une chaîne de Kobayashi reliant z à x. Appelons γ la courbe continue reliant z à x obtenue en concaténant les images par les f_i des géodésiques de $\mathbb{D}$ reliant les points p_i aux points q_i de la chaîne de Kobayashi. Il est immédiat que pour tout point u de γ on a $d(u, x) \leqslant l(c)$.

Plaçons-nous dans une carte au voisinage de x. Il existe une boule de rayon r autour de x, telle que tous les points x_n soient á l'éxtérieur de cette boule. Pour chaque point x_n il existe une chaîne de Kobayashi c entre x_n et x de longueur inférieure à $(1+\varepsilon)d(x_n, x)$. La courbe γ que nous avons constuite précédent à partir de la chaîne c va, dáprès le théorème des valeurs intermédiaires, intersecter la sphère de rayon r et de centre x en au moins un point. Appelons y_n l'un de ces points.

On a alors $d(y_n, x) \leqslant l(c) \leqslant (1 + \varepsilon)d(x_n, x)$, donc $d(y_n, x)$ tend vers 0, et comme la suite y_n est contenue dans un compact, on peut appliquer le raisonnement expliqué ci-dessus pour conclure. □

3. Théorème de Brody

Pour ce chapitre, outre le livre de Lang, nous avons consulté l'article original de Brody [1], ainsi que [4].

§ **3.1. Hyperbolicité au sens de Brody.** Soit X une variété connexe analytique complexe. On remarque que si X est une variété hyperbolique, *i.e.* si d_X est une vraie distance, alors toute fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ à valeurs dans X est nécessairement constante. En effet, la propriété de contraction et l'annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi sur $\mathbb{C}$ donnent :

$$d_X(f(z), f(0)) \leqslant d_{\mathbb{C}}(z, 0) = 0.$$

implique $f(z) = f(0)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ce qui nous amène à donner la définition suivante.

Définition. On dit qu'une variété complexe X est *hyperbolique au sens de Brody* ou *Brody hyperbolique* s'il n'existe pas d'application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans X.

Une surface Kobayashi hyperbolique est ainsi Brody hyperbolique. L'objectif de ce chapitre est de donner une forme de réciproque à ce résultat.

§ **3.2. Un critère d'hyperbolicité.** Dans la suite, on se placera sur une variété complexe connexe X munie d'une métrique infinitésimale N quelconque[5].

Posons alors pour $f : \mathbb{D} \to X$:

$$c_N(f) = \sup_z \|df(z)\|,$$

où $\|df(z)\|$ désigne la norme d'opérateur de $df(z) : T_z\mathbb{D} \to T_{f(z)}X$ muni respectivement de la métrique de poincaré et de N. On pose aussi :

$$c_N(X) = \sup_f c_N(f) = \sup_f \|df(0)\|,$$

où la borne Supérieur est prise sur l'ensemble des application holomorphe $f : \mathbb{D} \to X$. La deuxième égalité vient du fait que pour tous point z de $\mathbb{D}$ et tous application f de $\mathbb{D}$ dans X, on peut en composant par un automorphisme du disque qui envoi z sur 0 construire une application g de $\mathbb{D}$ dans X telle que $\|df(z)\| = \|dg(0)\|$. On a évidement $c_N(f) \leqslant c_N(X)$.

Lemme. *Si $c_N(X)$ est fini, alors X est hyperbolique.*

Remarque : la réciproque est vrai dans le sens ou si X est hyperbolique, alors il existe des métrique N sur X telle que $c_N(X)$ soit finit (par exemple la m{etrique de Kobayashi elle même). En revanche, à moins que X soit en plus compact il existe aussi des métriques telle que $c_N(X)$ soit infinit.

Démonstration. Soit X une variété munie d'une métrique infinitésimal N telle que $c_N(X)$ soit finit. Notons ρ la distance associé à N. Soit x et y deux points de X et $c = \{(p_1, \dots, p_n), (q_1, \dots, q_n), (f_1, \dots, f_n)\}$ une chaine de Kobayashi reliant x à y. Alors si on note γ l'arc de géodésique reliant p_i à q_i, $f_i(\gamma)$ est une courbe reliant $f_i(p_i)$ à $f_i(q_i)$. Donc :

$$\rho(f_i(p_i), f_i(q_i)) \leqslant \int_O^1 N_{\gamma(t)}\big[f_i'\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)\big]dt \leqslant \int_0^1 c_N(f_i).|\gamma'(t)|_{\gamma(t)} \leqslant c_N(X).d_{\mathbb{D}}(p_i, q_i)$$

et donc :

$$l(c) = \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{D}}(p_i, q_i) \geqslant \frac{1}{c_N(X)} \sum_{i=1}^n \rho(f_i(p_i), f_i(q_i) \geqslant \frac{1}{c_N(X)} \rho(x, y).$$

finalement, $d_X(x, y) \geqslant \frac{1}{c_N(X)}\rho(x, y)$ et donc d_X est une vrai distance : X est hyperbolique. □

§ **3.3. Lemme de Brody.**

[5]On peut toujour construire une métrique infinitésimal sur une variété.

Lemme. (BRODY 1976) *Soit X une sous-variété complexe relativement compacte d'une variété complexe Y munie d'une métrique infinitésimale N.*

On suppose que $c_N(X) = \infty$ (c'est par exemple le cas si X n'est pas hyperbolique).

Alors on peut construire une suite d'applications holomorphes f_n à valeurs dans X, définies sur des disques $\mathbb{D}_{R_n}$ dont le rayon R_n tend vers l'infini, satisfaisant $N\big(f_n'(0)\big) = 1$, et telles que la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \overline{X}$ non constante *et satisfaisant $N\big(f'(0)\big) = 1$.*

Démonstration. Puisque $c_N(X) = \sup_f |df(0)| = \infty$ On en déduit qu'il existe une suite de fonctions $g_n : \mathbb{D} \to X$ tellles que $|g_n'(0)| \geqslant n$, c'est à dire $N(g_n'(0)) \geqslant 2n$.

L'objectif est de reparamétriser g_n pour obtenir une suite de fonctions, dont on bornera la dérivée, pour pouvoir appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli et extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f, qui sera non-constante grâce à un contrôle de la dérivée en 0 des fonctions.

Commencons par poser

$$h_n : \begin{cases} \mathbb{D} \to X \\ z \to g_n(z/2). \end{cases}$$

On a toujours $N(h_n'(0)) \geqslant n$ et h_n se prolonge continuement à $\overline{\mathbb{D}}$ qui est compact donc $N(h_n'(z))$ est borné.

Si on note $\|dh_n(z)\|$ la norme d'opérateur de l'application $dh_n(z) : T_z\mathbb{D} \to T_{h_n(z)}X$ relativement à la métrique de Kobayashi sur $\mathbb{D}$ et à la métrique N sur X on a alors :

$$\|dh_n(z)\| = \frac{N(h_n'(z))}{\frac{2}{1-|z|^2}},$$

donc $\|dh_n(z)\| \to 0$ quand $|z| \to 1$, et donc $\|dh_n(z)\|$ atteint un maximum sur $\mathbb{D}$ en z_0.

Soit $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ un automorphisme conforme du disque tel que $\varphi(0) = z_0$, et soit $w_n = g_n \circ \varphi$. Comme φ est une isométrie de $\mathbb{D}$ (pour la métrique de Kobayashi) elle ne change pas la norme d'opérateur, c'est-à-dire : $\|dw_n(z)\| = \|dh_n(\varphi(z))\|$ donc $\|dw_n(z)\|$ est maximal en $z = 0$.

De plus, $N(w_n'(0)) = 2\|dw_n(0)\| = 2\|dh_n(z_0)\| \geqslant 2\|dh_n(0)\| = N(h_n'(0)) \geqslant n$.

Définissons maintenant les rayons $R_n = N(w_n'(0)) \geqslant n$, et

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{D}_{R_n} \to X \\ \quad z \to w_n(z/R_n). \end{cases}$$

On observe que $f_n'(0) = \frac{1}{R_n} w_n'(0)$, donc $N(f_n'(0)) = 1$. De plus, comme $z \to z/R$ est une isométrie de $\mathbb{D} \to \mathbb{D}_R$, $\|df_n(z)\|$ est toujours maximal en 0, d'où :

$$\|df_n(z)\| \leqslant \|df_n(0)\| = \frac{N(f_n'(0))}{\rho_{R_n}(0)} = \frac{R_n}{2}.$$

Enfin, si on fixe maintenant un $R \in \mathbb{R}_+^*$ puis N tel que $\forall n \geqslant N, R_n > R$, alors pour tous $z \in \mathbb{D}_R$,

$$N(f_n'(z)) = \rho_{R_n}(z)\|df_n(z)\| \leqslant \frac{2R_n}{R_n^2 - |z|^2}\frac{R_n}{2} \leqslant \frac{R_n^2}{R_n^2 - R^2} \to 1.$$

Donc $N(f_n'(z))$ est uniformément borné sur tout compact de $\mathbb{C}$ et on peut finalement extraire (Arzela-Ascoli) $f_{\varphi(n)}$ qui converge uniformement sur tout compact vers une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Or $N(f_n'(0)) = 1$, donc par convergence uniforme $N(f'(0)) = 1$, ce qui prouve que f est non constante. $\square$

Donnons tout de suite une application essentielle de ce lemme :

Théorème de Brody. *Soit X une variété compacte Brody-hyperbolique, alors X est Kobayashi-hyperbolique.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et considérons une métrique N quelconque sur X. La variété X n'étant pas hyperbolique, on peut appliquer le lemme en prenant $Y = X$ avec la metrique N sur Y, on obtient une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ non constante à valeurs dans $\overline{X} = X$, ce qui est impossible puisque X est Brody hyperbolique. $\square$

4. Théorie de Nevanlinna

Ce chapitre est indépendant de ce qui précède, et ne servira que pour prouver le théorème principal du chapitre suivant. Bien que la théorie de Nevanlinna soit utile pour obtenir de très nombreux résultats puissants d'analyse complexe, un lecteur ne s'intéressant qu'aux propriétés d'hyperbolicité peut passer directement au chapitre suivant.

Pour mesurer la croissance d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, il est habituel de considérer la quantité

$$M_f(R) = \log \sup_{|z|=R} |f(z)| = \log \|f\|_R.$$

Le principe du maximum appliqué au disque $\mathbb{D}_R$ indique que f est bornée sur $\mathbb{D}_R$ par $e^{M_f(R)}$. Il est clair qu'on ne peut pas exhiber une telle borne pour une fonction méromorphe ayant des pôles dans $\mathbb{D}_R$.

Nevanlinna est cependant parvenu à mesurer la croissance de telles fonctions en introduisant un nouvel outil, qui apparait naturellement dans la formule qu'il a nommée "formule de Poisson-Jensen", obtenue en manipulant la formule usuelle de Poisson.

Dans ce chapitre nous décrivons comment obtenir cette fonction caractéristique, puis nous étudions certaines de ses propriétés, notamment le "théorème sur la dérivée logarithmique", qui contrôle la dérivée logarithmique f'/f d'une fonction méromorphe f par la “fonction caractéristique” T_f de f. Ces résultats nous seront utiles dans le prochain chapitre.

§ **4.1. Formule de Poisson-Jensen.** On dispose du résultat classique suivant.

Théorème (FORMULE DE POISSON). *Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}_R}$. Soit z un point de l'intérieur du disque.*

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(R\,e^{i\theta})\,\mathrm{Re}\biggl(\frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}-z}\biggr)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Cette formule exprime la valeur de f en un point par une moyenne pondérée de ses valeurs sur le cercle $\mathbb{U}_R$ de rayon R. Cela se recoupe avec le fait qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{D}_R$ est entièrement déterminée par sa valeur sur le bord du disque (problème de Laplace).

Démonstration. On commence par appliquer le théorème de Cauchy à z, qui est dans $\mathbb{D}_R$, puis à $z' = \zeta\overline{\zeta}/\overline{z}$, qui est hors de $\overline{\mathbb{D}_R}$: il donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{U}_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta - z}\,\frac{d\zeta}{\zeta},$$

et

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{U}_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - (\zeta\overline{\zeta}/\overline{z})}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\,\frac{\overline{z}}{\overline{z}-\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

En soustrayant, il vient :

$$\begin{aligned} f(z) - 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta - z}}\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\left[1 + \frac{z}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}}{\overline{\zeta - z}}\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\left[1 + \mathrm{Re}\biggl(\frac{2z}{\zeta - z}\biggr)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{U}_R} f(\zeta)\,\mathrm{Re}\biggl(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\biggr)\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

En posant $\zeta = R\,e^{i\theta}$, on a $d\zeta/\zeta = i\,d\theta$, d'où la formule recherchée :

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(R\,e^{i\theta})\,\mathrm{Re}\biggl(\frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}-z}\biggr)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

□

Si on décompose $f = u + i\,v$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire ($u = \mathrm{Re}\,f$), on obtient des expressions intégrales pour u et pour v. Pour la partie réelle, par exemple, on a :

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(R\,e^{i\theta})\,\mathrm{Re}\biggl(\frac{R\,e^{i\theta}+z}{R\,e^{i\theta}-z}\biggr)\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

donc

$$(*) \qquad f(z) = \int_0^{2\pi} u(R\,e^{i\theta}) \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta} - z} \frac{d\theta}{2\pi} + iC,$$

où C est une constante réelle, car les deux membres de cette égalité sont holomorphes et ont la même partie réelle, donc leur différence, à valeurs dans $i\mathbb{R}$, est constante. En effet, toute fonction holomorphe non-constante a une image ouverte.

Après avoir obtenu ce contrôle de $f(z)$ par les valeurs de f sur $\mathbb{U}_R$ dans le cas d'une fonction holomorphe, étudions le cas d'une fonction f méromorphe et non-nulle sur $\overline{\mathbb{D}_R}$. On supposera dans la suite que f de n'a ni zéro ni pôle sur le cercle $\mathbb{U}_R$. Cette hypothèse n'est en fait pas restrictive sur f, et interdit seulement à R de prendre certaines valeurs, discrètes.

On va se ramener à l'étude précédente en isolant les pôles et les zéros de f : on écrit pour cela $f = hP$, où P a les mêmes pôles et zéros (munis de leur multiplicité) que f, et donc où h est holomorphe et ne s'annule pas. Étant donnée une telle décomposition, on aura $\log f = \log h + \log P$ en dehors de l'ensemble des zéros et des pôles de f, et à un multiple entier de $2\pi i$ près. La formule $(*)$ appliquée à une détermination de $\log h(z)$ sur l'ensemble simplement connexe $\overline{\mathbb{D}_R}$ permettra de contrôler $\log h$ dans $\mathbb{D}_R$ par les valeurs de $\operatorname{Re}\,\log h = \log |h|$ sur $\mathbb{U}_R$.

Il faut choisir une décomposition particulière $f = hP$.

- La condition essentielle sur P est que cette fonction doit avoir les mêmes pôles et les mêmes zéros que f. De plus on aimerait que $\log P$ soir facile à manipuler. Pour atteindre simultanément ces deux objectifs, on va traiter les pôles et les zéros de f individuellement, en écrivant P comme un produit sur les pôles $\{a_i\}$ et les zéros $\{b_j\}$ de f (comptés avec leur multiplicité) de facteurs élémentaires G_{R,a_i} et $1/G_{R,b_j}$, où $G_{R,a}$ désigne pour chaque $a \in \mathbb{D}_R$ une fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$ qui a exactement un pôle en a, et aucun zéro dans le disque.
- Pour que le contrôle de $\log h$ dans $\mathbb{D}_R$ par les valeurs de $\log |h|$ sur $\mathbb{U}_R$ soit utile, on veut borner ces valeurs par des quantités liées directement à f. Pour cela, on choisira les $G_{R,a}$ de telle sorte que $|G_{R,a}| = 1$ sur le cercle $\mathbb{U}_R$. Grâce à cela on aura $|P| = 1$ sur ce même cercle, donc $|h| = |f|$, et $(*)$ donnera un contrôle de $\log h(z)$, $z \in \mathbb{D}_R$ par $\log |f(Re^{i\theta})|$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition. *Pour chaque $a \in \mathbb{D}_R$, l'application*

$$G_{R,a} : z \mapsto \frac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)}$$

est, à une phase (un facteur multiplicatif $e^{i\varphi}$) près, l'unique fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) *$G_{R,a}$ a pour unique pôle a,*

(ii) *$G_{R,a}$ ne s'annule pas dans $\overline{\mathbb{D}_R}$,*

(iii) *$|G_{R,a}(z)| = 1$ dès que $|z| = R$.*

De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}_R$, $|G_{R,a}(z)| > 1$.

Démonstration. $G_{R,a}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui a pour unique pôle a et pour unique zéro $(R^2/\overline{a}) \notin \overline{\mathbb{D}_R}$. Pour tout $z \in \mathbb{U}_R$, on a $z\overline{z} = R^2$, donc $G_{R,a}(z)\,\overline{z} = \frac{R^2(\overline{z}-\overline{a})}{R(z-a)}$, d'où $|G_{R,a}(z)| = \frac{R^2}{|\overline{z}|R}\left|\frac{\overline{z-a}}{z-a}\right| = 1$. On obtient la dernière assertion en appliquant le principe du maximum à $1/G_{R,a}$ (holomorphe car $G_{R,a}$ n'a pas de zéro sur le disque).

Pour l'unicité, on remarque que le quotient de deux telles fonctions est holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$, puis que le principe du maximum implique qu'il est majoré en module par 1. Par symétrie, son inverse est aussi majoré par 1, *i.e.* le quotient est minoré par 1 en module. Ainsi il est à valeurs dans le cercle unité, donc est constant. □

Définition. On appelle *produit de Blaschke associé à f* la quantité suivante :

$$P_{R,f}(z) = \prod_{a \in \mathbb{D}_R} \big(G_{R,a}(z)\big)^{-ord_a f} = \prod_{a \in \mathbb{D}_R} \left(\frac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)}\right)^{-ord_a f},$$

où $ord_a f$ désigne l'ordre de f en a, positif si $f(a) = 0$, négatif si $f(a) = \infty$, de sorte que $P_{R,f}$ ait les mêmes zéros et pôles que f dans $\mathbb{D}_R$.

Ainsi, par construction, le produit de Blaschke est tel que $h = f/P_{R,f}$ n'ait ni zéro ni pôle dans $\mathbb{D}_R$. On a de plus $|P_{R,f}(z)| = 1$ dès que $|z| = R$. Sur $\mathbb{U}_R$ on a donc bien comme annoncé $|h| = |f|$.

Grâce à ce produit, on va pouvoir exprimer une version modifiée de la formule de Poisson qui prend en compte les pôles d'une fonction méromorphe f.

Théorème (FORMULE DE POISSON-JENSEN). *Soit f une fonction méromorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$, sans zéro ni pôle sur $\mathbb{U}_R$. Pour chaque ouvert simplement connexe de $\mathbb{D}_R$ ne contenant ni zéro ni pôle de f, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout z dans cet ouvert on ait :*

$$\log f(z) = \int_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\theta})| \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta} - z}\,\frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{a \in \mathbb{D}_R} (ord_a f) \log G_{R,a}(z) + i\,C.$$

Démonstration. On considère la décomposition expliquée plus haut, en posant

$$h(z) = \frac{f(z)}{P_{R,f}(z)} = f(z) \prod_{a \in \mathbb{D}_R} \Big(G_{R,a}(z)\Big)^{ord_a f}.$$

Appliquant $(*)$ à une détermination de $\log h$, et utilisant le fait que $|h(R\,e^{i\theta})| = |f(R\,e^{i\theta})|$, on obtient :

$$\log h(z) = \int_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\theta})| \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta} - z}\,\frac{d\theta}{2\pi} + i\,C.$$

Pour conclure il suffit de se rappeler dans le membre gauche que le logarithme est un morphisme de groupes, à un multiple entier de $2i\pi$ près :

$$\log h(z) = \log f(z) + \sum_{a\in\mathbb{D}_R} (ord_a f) \log G_{R,a}(z) + 2\pi n i,$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

§ **4.2. Fonctions caractéristiques de Nevanlinna.** En prenant la partie réelle dans l'expression du théorème, il vient :

$$\log |f(z)| = \int_0^{2\pi} \log |f(R\,e^{i\theta})| \mathrm{Re} \frac{R\,e^{i\theta} + z}{R\,e^{i\theta} - z} \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{a\in\mathbb{D}_R} (ord_a f) \log |G_{R,a}(z)|.$$

Si 0 n'est ni un zéro ni un pôle de f, on peut prendre $z = 0$.

$$\log |f(0)| = \int_0^{2\pi} \log |f(R\,e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_R \\ a\neq 0}} (ord_a f) \log \left| \frac{R}{a} \right|.$$

De façon générale, si on écrit $f(z) = c_f z^m + \ldots$, où c_f, non-nul, est le coefficient dominant de f en 0, alors on a la *formule de Jensen* :

$$\log |c_f| = \int_0^{2\pi} \log |f(R\,e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_R \\ a\neq 0}} (ord_a f) \log \left| \frac{R}{a} \right| - (ord_0 f) \log R.$$

Cela découle du résultat précédent appliqué à $f(z)/z^m$ (on rappelle que $m = ord_0 f$).

Dans toute la suite, nous noterons avec un exposant $^+$ la partie positive d'une quantité réelle, *i.e.* $x^+ = \max(x, 0)$; et nous noterons avec un exposant $^-$ sa partie négative : $x^- = \max(-x, 0)$. Ainsi $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Munis de ces notations, nous allons séparer dans le membre droit de la formule de Jensen les termes liés à la proximité de f avec ∞ d'une part, et avec 0 d'autre part.

Définition : Soit f une fonction méromorphe non-nulle sur $\overline{\mathbb{D}_R}$.

- On définit la fonction de proximité[6] m_f et la fonction de comptage N_f par

$$\begin{aligned} m_f(R) = m_f(R, \infty) &= \int_0^{2\pi} \log^+ |f(R\,e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}, \\ N_f(R) = N_f(R, \infty) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_R - \{0\} \\ f(a)=\infty}} (-\,ord_a f) \log \left| \frac{R}{a} \right| + (ord_0 f)^- \log R, \\ T_f(R) &= m_f(R) + N_f(R). \end{aligned}$$

[6] Tout se passe bien tant que f n'a ni zéro ni pôle sur $\mathbb{U}_R$. On ne traitera pas le cas contraire (même si il est aisé de prouver que la définition s'étend par continuité), car il s'agit d'un ensemble de mesure nulle.

- On pose aussi pour tout $b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} m_f(R,b) = m_{1/(f-b)}(R,\infty), \quad \text{et} \\ N_f(R,b) = N_{1/(f-b)}(R,\infty). \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\log x = \log^+ x - \log^+(1/x)$, on a

$$\int_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = m_f(R) - m_{1/f}(R).$$

En reportant ce résultat dans la formule de Jensen, et en séparant les termes de la somme en fonction du signe de $ord_a f$ (*i.e.* du fait que a soit un pôle ou un zéro de f), on obtient

$$\log|c_f| = m_f(R) - m_{1/f}(R) + N_f(R) - N_{1/f}(R),$$

soit, avec la définition de T_f, le point (i) du théorème ci-dessous.

Théorème. (PREMIER THÉORÈME DE NEVANLINNA) *Si f est méromorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a :*

(i) $\log|c_f| + T_{1/f}(R) = T_f(R)$, *et*

(ii) $T_f(R) = T_{f-a}(R) + O_a(1)$, *où* $|O_a(1)| \leqslant \log^+|a| + \log 2$.

Avant d'attaquer la preuve de (ii), faisons quelques remarques élémentaires.

Remarques sur $\log^+ : x \mapsto \max(0, \log x)$**.** *Pour tout $n \geqslant 0$ et tous $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$,*

- $\log^+$ *est positive et croissante.*
- $\log^+|\alpha_1 \cdots \alpha_n| \leqslant \log^+|\alpha_1| + \ldots + \log^+|\alpha_n|$.
- $\log^+|\alpha_1 + \cdots + \alpha_n| \leqslant \log^+\big(n \max_k |\alpha_k|\big)$
$$\begin{aligned} &\leqslant \log^+ n + \log^+ \max_k |\alpha_k| \\ &\leqslant \log^+ n + \max_k \log^+ |\alpha_k| \\ &\leqslant \log^+ n + \textstyle\sum_k \log^+|\alpha_k|. \end{aligned}$$

Démonstration du (ii). Étant donné deux fonctions f et g méromorphes sur $\overline{\mathbb{D}_R}$, en appliquant la troisième propriété ci-dessus à $\alpha_1 = f(r\,e^{i\theta})$, et $\alpha_2 = g(r\,e^{i\theta})$, puis en intégrant, on obtient :

$$m_{f+g}(r) \leqslant m_f(r) + m_g(r) + \log^+ 2.$$

En particulier,

$$\begin{cases} m_f = m_{f-a+a} & \leqslant m_{f-a} + m_a + \log 2 \\ \qquad\quad m_{f-a} & \leqslant m_f \;+\; m_{-a} + \log 2, \end{cases}$$

ce qui se réécrit $|m_f - m_{f-a}| \leqslant \log^+|a| + \log 2$, car $m_a = m_{-a} = \log^+|a|$.

Par ailleurs, la fonction de comptage N_f ne dépend que des pôles de f, et les fonctions f et $f-a$ ont les mêmes pôles, donc $N_{f-a} = N_f$.

Il suffit de sommer ces deux résultats pour faire apparaître T. $\square$

Afin de mieux cerner ce que signifient la fonction caractéristique T_f et ses composantes m_f et N_f, nous énonçons un certain nombre de résultats les concernant.

Proposition. (PROPRIÉTÉS DE m, N ET T) *Pour tout* $n \geqslant 0$ *et toutes fonctions* $f_1, \ldots, f_n$ *et* f *méromorphes non-nulles sur* $\mathbb{C}$*, on a*

(i) $m_f \geqslant 0$*, donc* $N_f \leqslant T_f$ *;*

(ii) $m_{f_1 \cdots f_n} \leqslant m_{f_1} + \ldots + m_{f_n}$ *;*

(iii) $m_{f_1 + \ldots + f_n} \leqslant m_{f_1} + \ldots + m_{f_n} + \log^+ n$ *;*

(iv) *Si* $r \geqslant 1$ *ou* $f(0) \neq \infty$*, alors* $N_f(r) \geqslant 0$*, donc* $m_f(r) \leqslant T_f(r)$*.*

(v) $N_{f_1 \cdots f_n} \leqslant N_{f_1} + \ldots + N_{f_n}$ *;*

(vi) $N_{f_1 + \ldots + f_n} \leqslant N_{f_1} + \ldots + N_{f_n}$ *;*

(vii) $T_f(r) \geqslant 0$ *dés que* $r \geqslant 1$ *ou* $f(0) \neq \infty$ *;*

(viii) $T_{f_1 \cdots f_n} \leqslant T_{f_1} + \ldots + T_{f_n}$ *;*

(ix) $T_{f_1 + \ldots + f_n} \leqslant T_{f_1} + \ldots + T_{f_n} + \log^+ n$ *;*

(x) m_f*,* N_f *et* T_f *sont continues ;*

(xi) N_f *et* T_f *sont croissantes.*

Remarque. Nous nous intéressons principalement à des comportements asymptotiques en $r \to \infty$. Ainsi l'hypothèse $r \geqslant 1$ du point (iv) n'est pas très restrictive, et nous la supposerons souvent vérifiée dans la suite.

Démonstration. Les points (i), (ii) et (iii) s'obtiennent en intégrant les inégalités correspondantes sur $\log^+$. La continuité de m_f en un rayon r s'obtient en considérant un voisinage compact $\{z : r - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant r + \varepsilon\}$ de $\mathbb{U}_r$ qui ne contient pas de pôle de f. Alors $\log^+ f$ est bornée sur ce voisinage, donc le théorème de continuité sous le signe somme s'applique : m_f est continue dans l'intervalle $]r - \varepsilon, r + \varepsilon[$.

On exprime ensuite N_f comme une somme sur *tous* les pôles de f :

$$N_f(r) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{C}^* \\ f(a) = \infty}} (-\, ord_a f) \log^+ \left| \frac{R}{a} \right| + (ord_0 f)^- \log R.$$

Tous les termes sont croissants, donc N_f aussi. Ils sont tous continus, donc N_f l'est aussi. Enfin, tous sont positifs sauf éventuellement celui en zéro : il est cependant positif ou nul dès que $r \geqslant 1$ ou $f(0) \neq \infty$, et cela prouve (iv). Les points (v) et (vi) s'obtiennent en majorant les multiplicités d'un pôle a de $f_1 \cdots f_n$ ou de $f_1 + \ldots + f_n$ par la somme des multiplicités $(ord_a\, f_i)^-$ de ce point pour les fonctions $f_1, \ldots, f_n$.

Pour obtenir les propriétés (vii) – (x) sur T_f, il suffit de sommer les propriétés correspondantes sur m et N. On ne peut pas obtenir le point (xi) de la même façon, car bien que N_f soit croissante, m_f ne l'est pas forcément[7].

[7] Par exemple, si $f : z \mapsto 1/z$, alors $m_f(r) = \log^- r$ n'est pas croissante.

Il ne reste plus qu'à montrer que T_f est croissante. Pour chaque θ on applique le (i) du premier théorème de Nevanlinna à la fonction $z \mapsto f(z) - e^{i\theta}$ (qui a les mêmes pôles que f) :

$$\begin{aligned}\log|c_{f-e^{i\theta}}| + N_{1/(f-e^{i\theta})}(r) &= N_{f-e^{i\theta}}(r) + \left[m_{f-e^{i\theta}}(r) - m_{1/(f-e^{i\theta})}(r)\right].\\ &= N_f(r) + \left[\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi}) - e^{i\theta}\right|\frac{d\varphi}{2\pi}\right].\end{aligned}$$

Or on a $\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} = \log^+|b|$ pour tout b (la preuve est donnée plus bas). En intégrant l'égalité qui précède en θ, et en permutant les intégrales du second membre par le théorème de Fubini, il vient donc :

$$\int_0^{2\pi}\left[\log|c_{f-e^{i\theta}}| + N_{1/(f-e^{i\theta})}(r)\right]\frac{d\theta}{2\pi} = N_f(r) + \int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\frac{d\varphi}{2\pi} = T_f(r).$$

Comme $\log|c_{f-e^{i\theta}}|$ est constante, et que $N_{1/(f-e^{i\theta})}(r)$ est croissante en r, on déduit que T_f est aussi croissante.

Prouvons enfin que $\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} = \log^+|b|$.

- Si $|b| > 1$, alors la fonction $z \mapsto \log(b - z)$ est holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}_1}$, donc sa partie réelle $z \mapsto \log|b - z|$ est harmonique, d'où
$$\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} = \log|b - 0|.$$
- Si $|b| < 1$, alors la fonction $z \mapsto \log(bz - 1)$ est holomorphe sur $\overline{\mathbb{D}_1}$, donc sa partie réelle $z \mapsto \log|bz - 1|$ est harmonique, d'où
$$\int_0^{2\pi} \log|b - e^{i\theta}|\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log|b\,e^{-i\theta} - 1|\frac{d\theta}{2\pi} = \log|b.0 - 1| = 0.$$
- Le cas $|b| = 1$ s'obtient par continuité. $\square$

Calculons maintenant m_f, N_f et T_f pour diverses fonctions f méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Proposition.

(i) *Pour toute fonction holomorphe f, on a $N_f = 0$, donc $T_f = m_f$.*

(ii) *Pour toute constante $c \neq 0$, on a $T_c(r) = m_c(r) = \log^+|c|$.*

(iii) *Pour tout polynôme P, on a $T_P(r) = m_P(r) = (\deg P)\log r + O_P(1)$.*

(iv) *Pour toute fraction rationnelle $f = P/Q$ avec P et Q premiers entre eux, on a*

$$\begin{aligned}N_f(r) &= (\deg Q)\log r + O_f(1),\\ m_f(r) &= \max\big(0, \deg(P) - \deg(Q)\big)\log r + O_f(1),\\ T_f(r) &= \max\big(\deg Q, \deg P\big)\log r + O_f(1).\end{aligned}$$

(v) *Si $f : z \mapsto \exp(z^n)$, alors $T_f(r) = m_f(r) = (1/\pi)r^n$.*

Démonstration.

(i) Une fonction holomorphe n'a pas de pôle.

(ii) $m_c(r) = \int_0^{2\pi} \log^+ |c| \frac{d\theta}{2\pi} = \log^+ |c|$.

(iii) On écrit $P(z) \sim a_n z^n$, où $n = \deg P$. Ainsi

$$\log |P(z)| = \log |a_n z^n| + o(1) = n \log |z| + O(1)$$

quand $|z| \to \infty$. On peut remplacer $\log$ par $\log^+$ pour $|z| = r$ assez grand (car P n'est pas constant) :

$$\log^+ |P(r\, e^{i\theta})| = n \log^+ r + O(1).$$

Il suffit alors d'intégrer en θ pour avoir $m_P(r) = n \log^+ r + O(1)$.

(iv) Pour r assez grand, le disque $\mathbb{D}_r$ contient tous les pôles de f. Il y en a $\deg Q$. La définition de N_f donne alors $N_f(r) \sim (\deg Q) \log r$.

Si $\deg P > \deg Q$, on écrit $f(z) \sim a\, z^n$ avec $n = \deg P - \deg Q$. Comme dans le cas d'un polynôme, on obtient $m_f(r) = n \log r + O_f(1)$. Sinon, $f(z) \to l \in \mathbb{C}$, donc $m_f(r) \to \log^+ |l|$, puis $m_f(r) = O_f(1)$.

Finalement, on somme pour obtenir l'estimation de T_f.

(v) On écrit tout d'abord que $\log^+ |\cdot| = \big(\mathrm{Re}\ \log(\cdot)\big)^+$:

$$\log^+ |f(r\, e^{i\theta})| = \Big(\mathrm{Re}\big[\log\ f(r\, e^{i\theta})\big]\Big)^+ = \Big(\mathrm{Re}\big[(r\, e^{i\theta})^n\big]\Big)^+ = r^n \big(\cos(n\theta)\big)^+,$$

donc en moyennant en θ :

$$m_f(r) = r^n \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{\pi} r^n.$$

□

Au vu des exemples qu'on vient de traiter, on se rend compte que la fonction caractéristique T_f mesure la "complexité" de la fonction f, avec d'une part sa vitesse de croissance (mesurée par m_f), et d'autre part son nombre de pôles (comptés par N_f).

Si f est une fonction "simple", par exemple une fraction rationnelle, alors $T_f(r) = O(\log r)$, où la constante dans le O croît avec les degrés des numérateurs et dénominateurs de f. Si f est plus "complexe", comme par exemple une exponentielle de polynôme (*cf.* le point (v)), T_f croît plus vite.

Le premier théorème de Nevanlinna indique que les fonctions f, $f - a$ et $1/f$ sont aussi compliquées les unes que les autres. Les propriétés additives et multiplicatives de T correspondent à borner la complexité d'une somme ou d'un produit par celle des termes.

La proposition ci-dessous, qui reformule les points (i) – (iv) de la proposition précédente, et en donne une réciproque, indique que les seules fonctions "très" simples, *i.e.* les fraction rationelles vérifie $T_f(r) = O(\log r)$.

Proposition. (CARACTÉRISATION DES FRACTIONS RATIONNELLES). *Soit f une fonction méromorphe. Alors*

- *soit f est constante, auquel cas $T_f = m_f$ sont constantes ;*
- *soit f est une fraction rationnelle non constante, auquel cas $T_f(r) \sim K \log r$ où $K > 0$ est le plus grand des degrés du numérateur et du dénominateur ;*
- *soit* $\log r = o(T_f(r))$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si on n'a pas $\log r = o(T_f(r))$, alors f est une fraction rationnelle : tout le reste est contenu dans la proposition précédente. Cette hypothèse signifie qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$, et une suite tendant vers l'infini de rayons R_i tels que $\log R_i > c\,T_f(R_i)$.

Comme $N_f \leqslant T_f$, on a $N_f(R_i) \leqslant \frac{1}{c} \log R_i$. Cette borne sur la fonction de comptage des pôles de f implique que f a au plus $1/c$ pôles, donc en a un nombre fini. On peut donc choisir un polynôme P qui s'annule exactement en les pôles de f, de sorte que Pf soit holomorphe. On a alors $T_{Pf}(R_i) \leqslant T_P(R_i) + T_f(R_i) \leqslant C' \log R_i$ pour une constante $C' = \frac{1}{c} + \deg P$.

On s'est donc ramené au cas d'une fonction holomorphe. La démonstration dans ce cas sera ajoutée dans une version ultérieure du mémoire. Il faut montrer que pour tout $r < R$ on a

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{R+r}{R-r}\, m_f(R),$$

puis évaluer en $R = 2r$ pour avoir

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leqslant 3m_f(2r) = 3T_f(2r).$$

On obtient ainsi que $\log \sup_{|z|=r} |f(z)| = O(\log R)$, et on conclut par le théorème de Liouville. $\square$

§ **4.3. Théorème sur la dérivée logarithmique.** Le théorème suivant va nous occuper pour le reste de la section. Sa démonstration est assez technique, mais le résultat est plutôt intuitif : la dérivée logarithmique d'une fonction est beaucoup plus simple que cette fonction.

Théorème sur la dérivée logarithmique. (NEVANLINNA). *Il existe une constante universelle K telle que pour toute fonction f méromorphe non-constante sur $\mathbb{C}$, on ait*

$$m_{f'/f}(r) \leqslant K\big(\log^+ T_f(r) + \log^+ r + \log^+ |1/c_f|\big)$$

pour r en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue finie.

Démonstration. Pour montrer le théorème, on va utiliser la décomposition $f = hP$, et traiter successivement le cas d'une fonction h holomorphe et ne s'annulant pas sur un disque $\mathbb{D}_s$, puis le cas d'un produit de Blaschke P.

Il suffit de faire la preuve dans le cas $c_f = 1$. En effet, toute fonction méromorphe est un multiple λf d'une fonction vérifiant $c_f = 1$. Si on a prouvé le théorème sur f, alors

$$m_{\lambda f'/\lambda f}(r) = m_{f'/f}(r) \leqslant K\big(\log^+ T_f(r) + \log^+ r\big).$$

, supposons que nous ayons prouvé le théorème dans ce cas. Soit alors f une fonction méromorphe quelconque. La fonction $g = f/c_f$ vérifie $c_g = 1$, donc

$$m_{f'/f}(r) = m_{g'/g}(r) \leqslant K\big(\log^+ r + \log^+ T_g(r)\big)$$

pour r en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue finie. On a par ailleurs $T_g(r) = T_{f/c_f}(r) \leqslant T_f(r) + T_{1/c_f}(r) = T_f(r) + \log^+ |1/c_f|$. Par croissance, puis par 1-lipschitzianité de $\log^+$, on obtient :

$$\log^+ T_g(r) \leqslant \log^+ \Big[T_f(r) + \log^+ |1/c_f|\Big] \leqslant \log^+ \big[T_f(r)\big] + \log^+ |1/c_f|.$$

Il suffit ensuite de combiner les inégalités pour conclure.

On fixe trois rayons R, s, r vérifiant $1 \leqslant r < s < R$.

Lemme *Supposons que h soit une fonction holomorphe sans zéros dans $\mathbb{D}_s$. Alors*

$$m_{h'/h}(r) \leqslant \log^+ \max[m_h(s), m_{1/h}(s)] + \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + 2\log 2.$$

Démonstration du lemme. Le produit de Blaschke associé à h valant 1 (car h n'a ni zéro ni pôle), la formule de Poisson-Jensen s'écrit

$$\log h(z) = \int_0^{2\pi} \log |h(se^{i\theta})| \, \frac{se^{i\theta} + z}{se^{i\theta} - z} \, \frac{d\theta}{2\pi} + iC.$$

On dérive par rapport à z sous l'intégrale :

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \int_0^{2\pi} \log |h(se^{i\theta})| \, \frac{2se^{i\theta}}{(se^{i\theta} - z)^2} \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On utilise ensuite que $|\log \alpha| = \log^+ \alpha + \log^+ 1/\alpha$:

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqslant \frac{2s}{(s-r)^2}\, [m_h(s) + m_{1/h}(s)].$$

On applique alors $\log^+$ des deux côtés de l'inégalité, et on se rappelle des inégalités usuelles sur $\log^+$ d'un produit et d'une somme pour obtenir

$$\log^+ \left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqslant \log^+ 2 + \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + \Big[\log^+ \big(\max[m_h(s), m_{1/h}(s)]\big) + \log 2\Big].$$

On pose enfin $z = re^{i\theta}$ et on intègre le membre de gauche par rapport à $d\theta/2\pi$ pour faire apparaître $m_{h'/h}(r)$, ce qui fournit le résultat voulu. □

Exprimons le résultat de ce lemme lorsque $h = f/P_{R,f}$ provient de la division d'une fonction méromorphe f par son produit de Blaschke. Par construction, $|h| = |f|$ sur le cercle $\mathbb{U}_R$, donc

$$m_h(s) = \int_0^{2\pi} \log^+ |h(se^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(se^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = m_f(s).$$

Comme $s \geqslant 1$, on a $m_f(s) \leqslant T_f(s)$, donc $m_h(s) \leqslant T_f(s)$. De même, $m_{1/h}(s) = m_{1/f}(s) \leqslant T_{1/f}(s) = T_f(s)$, où la dernière inégalité provient de l'hypothèse $c_f = 1$. Ainsi

$$\max[m_h(s), m_{1/h}(s)] \leqslant T_f(s),$$

et le lemme précédent donne

Lemme. *Soit f méromorphe sur $\mathbb{D}_R$. Soit $f = hP$ sa décomposition sur $\mathbb{D}_s$. On suppose $c_f = 1$. Alors*

$$m_{h'/h}(r) \leqslant \log^+ T_f(s) + \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + 2\log 2.$$

Donnons maintenant une borne pour $m_{P'/P}$.

Lemme. *Soit $P = P_{s,f}$. On a*

$$m_{P'/P}(r) \leqslant 2\left(\frac{\log s - \log r}{\log R - \log s}\right) T_f(R) + \log\left[\frac{T_f(R)}{\log R - \log s}\right] + \log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + \log 2.$$

Démonstration du Lemme. On considère un facteur[8]

$$G_a(z) = \frac{s^2 - \overline{a}z}{s(z-a)}.$$

Alors par le calcul on a

$$\begin{aligned} -G_a'(z)/G_a^2(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{G_a(z)}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{s(z-a)}{s^2 - \overline{a}z}\right) \\ &= \frac{s\big[s^2 - \overline{a}z\big] - (-\overline{a})\big[s(z-a)\big]}{(s^2 - \overline{a}z)^2} \\ &= \frac{s(s^2 - |a|^2)}{(s^2 - \overline{a}z)^2}. \end{aligned}$$

On utilise alors les inégalités

$$\left\{ \begin{array}{lll} s(s^2 - |a|^2) & \leqslant & s^3 \\ |s^2 - \overline{a}z| & \geqslant & s^2 - |\overline{a}z| \geqslant s^2 - s|z| = s(s-r) \end{array} \right.$$

pour obtenir la majoration ci-dessous :

$$|G_a'/G_a(z)| \leqslant \frac{s^3}{s^2(s-r)^2}|G_a(z)| = \frac{s}{(s-r)^2}|G_a(z)|.$$

Comme P est un produit (et un quotient) de G_a pour a parcourant les pôles et les zéros de f dans $\mathbb{D}_s$, P'/P est une somme de G_a'/G_a, et l'inégalité ci-dessus donne :

$$|P'/P(z)| \leqslant \frac{s}{(s-r)^2} \sum_a |G_a(z)|,$$

[8]On n'écrira pas l'indice s dans la suite, pour alléger les notations.

où chaque G_a apparaît dans la somme avec la multiplicité du zéro ou du pôle de f. On passe au $\log^+$ et on utilise les formules pour $\log^+$ d'un produit puis d'une somme :

$$\begin{aligned}\log^+|P'/P(z)| &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\log^+\sum_a |G_a(z)| \\ &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\sum_a \log^+|G_a(z)|+\log^+ n_f(s,0+\infty),\end{aligned}$$

où $n_f(s,0+\infty)$ désigne[9] le nombre de zéros et de pôles de f dans le disque de rayon s (comptés avec leur multiplicité). On intègre ensuite en θ avec $z = r\,e^{i\theta}$:

$$(**)\qquad m_{P'/P}(r) \leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\sum_a m_{G_a}(r)+\log^+ n_f(s,0+\infty).$$

Il reste maintenant à borner $\sum_a m_{G_a}(r)$ et $n_f(s,0+\infty)$. On note $N_f(s,0+\infty) = N_f(s,0)+N_f(s,\infty)$.

Sous-lemme. *Pour toute fonction f méromorphe non-constante sur $\mathbb{D}_R$, telle que $c_f = 1$, on a*

(i) $\sum_a m_{G_a}(r) \leqslant \big[\log s - \log r\big] n_f(s,0+\infty)$*, où la somme porte sur les zéros et les pôles de f dans $\mathbb{D}_s$, comptés avec leur multiplicité ;*

(ii) $n_f(s,0+\infty) \leqslant \dfrac{N_f(R,0+\infty)-N_f(s,0+\infty)}{\log R-\log s} \leqslant \dfrac{2T_f(R)}{\log R-\log s}.$

Démonstration du sous-lemme. Le premier théorème de Nevanlinna nous affirme que $T_{G_a}(r) = T_{1/G_a}(r)+\log|c_{G_a}|$. Or $1/G_a$ est holomorphe et de module inférieur à 1 sur le disque $\mathbb{D}_s$, donc $T_{1/G_a} = 0$. Il suffit donc de calculer c_{G_a} et $N_{G_a}(r)$.

Si $a = 0$, alors $G_a(z) = s/z$, donc $\log|c_{G_a}| = \log s$ et $N_{G,a}(r) = \log r$, d'où $m_{G_a}(r) = \log s - \log r$.

Sinon, $\log|c_{G_a}| = \log|s/a|$, et

$$\begin{aligned}N_{G_a}(r) &= \begin{cases}0 & \text{si } r < |a| \\ \log|r/a| & \text{si } r > |a|\end{cases} \\ &\geqslant \log|r/a|,\end{aligned}$$

d'où $m_{G_a}(r) \leqslant \log|s/a| - \log|r/a| = \log s - \log r$.

En sommant sur a comme prescrit par l'énoncé, on obtient (i).

[9]Nous nous excusons pour cette notation peu élégante : nous avons conservé la notation de S. Lang.

Revenons à la définition de N_f. On peut écrire :

$$\begin{aligned} N_f(R,\infty)-N_f(s,\infty) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_s-\{0\}\\ f(a)=\infty}}(-ord_a f)\left[\log\left|\frac{R}{a}\right|-\log\left|\frac{s}{a}\right|\right]+\sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_R-\mathbb{D}_s\\ f(a)=\infty}}(-ord_a f)\log\left|\frac{R}{a}\right| \\ &\geqslant \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_s-\{0\}\\ f(a)=\infty}}(-ord_a f)[\log R-\log s] \\ &\geqslant \big[\log R-\log s\big]n_f(s,\infty). \end{aligned}$$

La même relation vaut aussi en remplaçant ∞ par 0, et il ne reste plus qu'à sommer pour avoir la première inégalité de (ii).

On remarque ensuite que $s \geqslant 1$, donc $N_f(s,0+\infty)\geq 0$; et que $N_f(R,0+\infty)\leqslant T_f(R)+T_{1/f}(R)=2T_f(R)$, la dernière égalité provenant de l'hypothèse $c_f=1$. Ainsi $N_f(R,\infty)-N_f(s,\infty)\leqslant 2T_f(R)$, ce qui termine la preuve du sous-lemme. □

En reportant les résultats du sous-lemme dans $(**)$, on conclut la preuve du lemme :

$$\begin{aligned} m_{P'/P}(r) &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\sum_a m_{G_a}(r)+\log^+ n_f(s,0+\infty) \\ &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\big(\log s-\log r\big)\,n_f(s,0+\infty)+\log^+\big[n_f(s,0+\infty)\big] \\ &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+2\left(\frac{\log s-\log r}{\log R-\log s}\right)T_f(R)+\log^+\left[\frac{2}{\log R-\log s}T_f(R)\right]. \\ &\leqslant \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+2\left(\frac{\log s-\log r}{\log R-\log s}\right)T_f(R)+\log^+\left[\frac{T_f(R)}{\log R-\log s}\right]+\log 2. \end{aligned}$$

□

Mettons bout-à-bout les deux derniers lemmes : on commence avec

$$m_{f'/f}=m_{h'/h+P'/P}\leqslant m_{h'/h}+m_{P'/P}+\log 2.$$

Les lemmes, qui contrôlent $m_{h'/h}$ et $m_{P'/P}$ donnent :

$$\begin{aligned} m_{f'/f}(r) \leqslant &\left[\log^+ T_f(s)+\log^+\frac{s}{(s-r)^2}+2\log 2\right] \\ &+\left[2\left(\frac{\log s-\log r}{\log R-\log s}\right)T_f(R)+\log^+\left[\frac{T_f(R)}{\log R-\log s}\right]+\log^+\frac{s}{(s-r)^2}+\log 2\right] \\ &+\log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{f'/f}(r) \leqslant\ & 2\left(\frac{\log s-\log r}{\log R-\log s}\right)T_f(R)+\log^+\left[\frac{T_f(R)}{\log R-\log s}\right]+\log^+ T_f(s) \\ &+2\ \log^+\frac{s}{(s-r)^2}+4\log 2. \end{aligned}$$

On utilise alors le fait que $\log s - \log r \leqslant (s-r)/r$ et $\log R - \log s \geqslant (R-s)/R$:

$$m_{f'/f}(r) \leqslant 2\,\frac{s-r}{R-s}\,\frac{R}{r}\,T_f(R) + \log^+\left(\frac{R}{R-s}\,T_f(R)\right) + \log^+ T_f(s) \\ + 2\,\log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + 4\log 2.$$

On applique alors l'inégalité sur le $\log^+$ d'un produit, ainsi que le fait que T_f est croissante, donc que $T_f(s) \leqslant T_f(R)$.

$$\begin{aligned} m_{f'/f}(r) &\leqslant 2\,\frac{s-r}{R-s}\,\frac{R}{r}\,T_f(R) + \log^+ \frac{R}{R-s} + \log^+ T_f(R) + \log^+ T_f(R) \\ &\quad + 2\,\log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + 4\log 2, \\ &\leqslant 2\,\frac{s-r}{R-s}\,\frac{R}{r}\,T_f(R) + 2\log^+ T_f(R) + \log^+ \frac{R}{R-s} + 2\,\log^+ \frac{s}{(s-r)^2} + 4\log 2. \end{aligned}$$

Le premier terme est clairement le pire, donc on va choisir s de façon à le rendre petit : on choisit $s \in]r, R[$ tel que

$$\frac{s-r}{R-s}\,\frac{R}{r} = \frac{1}{2\,T_f(R)+1}.$$

Ainsi le premier terme est borné par 1.

Comme on avait supposé $R \geqslant 1$, on a $T_f(R) \geqslant 0$, donc $\frac{s-r}{R-s} \leqslant \frac{r}{R} \leqslant 1$, *i.e.* s est plus près de r que de R. Ainsi,

$$\frac{1}{R-s} \leqslant \frac{2}{R-r},$$

puis

$$\frac{1}{s-r} = \frac{R}{r}\,\frac{\big(2\,T_f(R)+1\big)}{R-s} \leqslant \frac{R}{r}\,\frac{2}{R-r}\,\big(2\,T_f+1\big) = \frac{1}{r}\,\frac{2R}{R-r}\,\big(2\,T_f(R)+1\big).$$

Avec la formule pour le $\log^+$ d'un produit, puis avec les deux inégalités précédentes, et le fait que $s \leq R$, on a

$$\begin{aligned} \log^+ \frac{R}{R-s} + 2\log^+ \frac{s}{(s-r)^2} &\leqslant \log^+ \frac{R}{R-s} + 2\log^+ s + 4\log^+ \frac{1}{(s-r)} \\ &\leqslant \log^+ \frac{2R}{R-r} + 2\log^+ R \\ &\qquad + 4\log^+ \left[\frac{1}{r}\,\frac{2R}{R-r}\,\big(2\,T_f(R)+1\big)\right]. \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau les formules pour les $\log^+$ de sommes et de produits, et en utilisant le fait que $\log^+(1/r) = 0$, car $r \geqslant 1$, il vient :

$$\begin{aligned}\log^+ \frac{R}{R-s} + 2\log^+ \frac{s}{(s-r)^2} &\leqslant 5\log^+ \frac{2R}{R-r} + 2\log^+ R + 4\log^+(1/r)\\ &\quad + 4\log^+\big(2\,T_f(R)+1\big)\\ &\leqslant 5\log^+ \frac{2R}{R-r} + 2\log^+ R\\ &\quad + \Big[4\log^+ T_f(R) + 8\log 2\Big].\end{aligned}$$

Le terme en $\log^+(1/r)$ est nul car on a supposé $r \geqslant 1$. On peut réécrire l'estimation de $m_{f'/f}(r)$.

$$\begin{aligned}m_{f'/f}(r) &\leqslant 1 + 2\log^+ T_f(R) + 5\log^+ \frac{2R}{R-r} + 2\log^+ R\\ &\quad + \Big[4\log^+ T_f(R) + 8\log 2\Big] + 4\log 2.\\ &\leqslant 1 + 6\log^+ T_f(R) + 5\log^+ \frac{2R}{R-r} + 2\log^+ R + 12\log 2.\end{aligned}$$

On a donc la proposition suivante.

Proposition. *Soit f méromorphe sur $\overline{\mathbb{D}_R}$, telle que $c_f = 1$. Soit $r \in [1, R)$. Alors pour une certaine constante universelle $K > 0$:*

$$m_{f'/f}(r) \leqslant K\left(\log^+ T_f(R) + \log^+ \frac{1}{R-r} + \log^+ R + 1\right).$$

Suite et fin de la preuve du théorème sur la dérivée logarithmique. Changeons de point de vue : au lieu de fixer R, puis de prendre $r \in [1, R)$, on va fixer $r \geqslant 1$, puis choisir $R > r$.

On veut que R vérifie $\log^+\big(T_f(R)\big) = O\big(\log^+(T_f(r))\big)$, pour pouvoir remplacer R par r dans le premier terme de la proposition. Or on ne sait pas du tout à quelle vitesse T_f croit. Le risque est donc qu'il faille prendre R trop proche de r, ce qui ferait exploser le terme $O\big(\log^+(2R)/(R-r)\big)$. Pour contrôler cela, on va utiliser un dernier lemme, dû à Borel, qui va nous aider à choisir R.

Lemme. *Soit $S : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une application positive, croissante, et non identiquement nulle. Alors on a*

$$S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) < 2S(r)$$

pour tout $r \geqslant 0$ en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue finie.

Démonstration. On cherche à montrer que l'ensemble exceptionnel

$$E = \{r \mid S(r) = 0\} \bigcup \left\{r \,\middle|\, S\left(r + \frac{1}{S(r)}\right) \geqslant 2S(r)\right\}$$

est de mesure finie. On va le recouvrir pour cela par une union dénombrable d'intervalles, dont la somme des longueurs est finie.

Par hypothèse, S n'est pas identiquement nulle, donc il existe un r_0 tel que $S(r_0) \neq 0$. Alors comme S est croissante, $\{r \mid S(r) = 0\} \subseteq [0, r_0[$.

On pose ensuite par récurrence pour tout $n \geqslant 0$:

$$r_{n+1} = \inf \left\{ r \in E \,\middle|\, r \geqslant r_n + 1/S(r_n) \right\}.$$

Par croissance de S, par définition de E, puis par récurrence on a

$$S(r_{n+1}) \geqslant S\big(r_n + 1/S(r_n)\big) \geqslant 2S(r_n) \geqslant 2^n S(r_1).$$

Comme $S(r_1) \geqslant S(r_0) > 0$, l'inégalité ci-dessus implique que $S(r_n)$ tend vers l'infini. Si les r_n étaient bornés, disons par M, alors, S étant croissante, $S(r_n) \leqslant S(M)$. Ainsi (r_n) tend vers l'infini, donc

$$\left\{ r \,\middle|\, S\big(r + 1/S(r)\big) \geqslant 2S(r) \right\} \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} \Big[r_n\,,\, r_n + 1/S(r_n) \Big[,$$

puis en terme de mesure :

$$\begin{aligned} mes(E) &\leqslant mes\big([0, r_0[\big) + \sum_{n \geqslant 0} mes\Big(\big[r_n\,,\, r_n + 1/S(r_n) \big[\Big) \\ &\leqslant r_0 + \frac{1}{S(r_0)} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{S(r_n)} \\ &\leqslant r_0 + \frac{1}{S(r_0)} + \frac{1}{S(r_1)} \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi prouvé. $\square$

Nous appliquons ce résultat à la fonction positive et croissante $\log^+ T_f$ (qui n'est pas identiquement nulle, car sinon T_f serait borné par 1, donc f serait constante). On suppose dans la suite que r est en dehors de l'ensemble exceptionnel décrit par le lemme précédent. Alors en posant $R = \min\big(r + \frac{1}{\log^+ T_f(r)}, r + 1\big)$, la croissance de T_f et le lemme donnent la première inégalité ci-dessous.

$$\begin{aligned} \log^+ T_f(R) &< 2 \log^+ T_r(r) \\ \log^+ R &\leqslant \log^+ r + \log 2 \\ \log^+ \frac{1}{R - r} &\leqslant \log^+ T_f(r). \end{aligned}$$

La seconde relation vient du fait que $R \leqslant r + 1$ et de l'inégalité sur le $\log^+$ d'une somme. La troisième relation s'obtient en distinguant les cas suivants.

- Si $R = r + 1$, alors $\log^+ \big(1/(R - r)\big) = \log^+ 1 = 0$.
- Si $R = r + \frac{1}{\log^+ T_f(r)}$, alors $\log^+ \big(1/(R - r)\big) = \log^+ \log^+ T_f(r) \leqslant \log^+ T_f(r)$, car pour tout $x > 0$ on a $x \geqslant \log^+ x$.

En reportant les trois inégalités dans la proposition précédente, on obtient

$$\begin{aligned} m_{f'/f}(r) &\leqslant K\left(2\log^+ T_f(r) + \log^+ T_f(r) + \log^+ r + \log 2 + 1\right). \\ &\leqslant 3\,K\left(\log^+ T_f(r) + \log^+ r\right), \end{aligned}$$

dès que $\log^+ r \geqslant \frac{1}{2}(\log 2 + 1)$. Cette hypothèse sur r est absorbée par l'ensemble exceptionnel de mesure finie.

On a donc montré le théorème sur la dérivée logarithmique dans le cas d'une fonction méromorphe f vérifiant $c_f = 1$. D'après la remarque du début de la preuve, cela suffit pour le prouver pour une fonction méromorphe non constante quelconque f. $\square$

En utilisant la même preuve, il n'est pas difficile d'exhiber des constantes explicites assez petites dans le théorème sur la dérivée logarithmique. Nous invitons chaleureusement le lecteur à le faire. Saura-t-il faire mieux que nous ?

$$m_{f'/f}(r) \leqslant 17\log^+ T_f(r) + 7\log^+ r + 24\log 2 + 1.$$

5. Théorème de Borel

Nous montrerons dans la suite du mémoire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ privé de $(2n+1)$ hyperplans projectifs en position générale est Brody hyperbolique. Ce résultat est une généralisation du petit théorème de Picard, qui correspond au cas $n = 1$: il n'existe pas d'application holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{trois\ points\}$ (les hyperplans de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont des points).

Essayons de donner un nouvel éclairage sur le théorème de Picard. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si ni f ni $g = -1 - f$ ne s'annulent, alors f est constante. De façon équivalente, on peut dire que si f et g sont deux fonction ne s'annulant pas, et vérifiant $1 + f + g = 0$ alors f et g sont constantes.

Définition : On nomme *unités* les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui ne s'annulent pas, car elles forment le groupe des unités (des inversibles) de l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

De cette façon, le théorème de Picard peut se réécrire comme un énoncé sur la structure linéaire des unités : si f_0, f_1 et f_2 sont trois unités telles que $f_0 + f_1 + f_2 = 0$, alors $1 + \frac{f_1}{f_0} + \frac{f_2}{f_0} = 0$ et donc $\frac{f_1}{f_0}$ et $\frac{f_2}{f_0}$ sont constantes, *i.e.* f_0, f_1 et f_2 sont proportionelles. Dans la suite de ce chapitre nous allons généraliser ceci en étudiant davantage la structure linéaire du groupe des unités dans l'algèbre des fonctions holomorphes.

L'ensemble des unités est une réunion de droites linéaires privées de la fonction nulle, *i.e.* pour toute unité h et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}^*$, λh est une unité. Ainsi, toute relation linéaire entre des unités se ramène à l'équation suivante, dite de *Borel* : $h_0 + \ldots + h_n = 0$, où les h_i sont des unités.

On remarque d'abord les solutions *triviales* de l'équation de Borel : si $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ vérifient $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 0$, alors pour toute unité h, $\lambda_0 h + \ldots + \lambda_n h = (\lambda_0 + \ldots + \lambda_n)h = 0$, donc $(\lambda_0 h, \ldots, \lambda_n h)$ est solution de l'équation de Borel.

Une réunion de plusieurs solutions triviales est encore une solution. Soit une partition de $\{0, \ldots, n\}$ en sous-ensembles disjoints S_k, et soient des unités $(h_0, \ldots, h_n)$ telles que pour chaque k, les $(h_i)_{i \in S_k}$ soient proportionnelles, et $\sum_{i \in S_k} h_i = 0$. Alors il est clair que $(h_0, \ldots, h_n)$ est solution de l'équation de Borel. Le résultat suivant affirme que toutes les solutions sont de cette forme.

Théorème (BOREL 1897). *Soient $(h_0, \ldots, h_n)$ des unités vérifiant $h_0 + \ldots + h_n = 0$. On définit la relation d'équivalence $i \sim j$ si il existe une constante c (non-nulle) telle que $h_i = c h_j$. Alors pour chaque classe d'équivalence S de cette relation, $\sum_{i \in S} h_i = 0$. Autrement dit la solution $(h_0, \ldots, h_n)$ est une réunion de solutions triviales.*

Ce résultat signifie que l'ensemble des unités est une réunion de droites linéairement indépendantes, privée de la fonction nulle. Ainsi toute famille d'unités deux à deux non-proportionnelles, par exemple $\{h \text{ unité} \mid h(0) = 1\}$, est une famille $\mathbb{C}$-libre.

Démonstration. Nous allons avoir besoin dans cette preuve de corollaires du théorème sur la dérivée logarithmique (voir section précédente), dont nous rappelons l'énoncé : pour toute fonction f méromorphe non-constante sur $\mathbb{C}$, on a

$$m_{f'/f}(r) = O_{exc}\big(\log r + \log^+(T_f(r))\big),$$

pour r en dehors d'un ensemble "<u>exc</u>eptionnel", de mesure de Lebesgue finie.

Lemme : *Pour toute fonction f méromorphe non-constante sur $\mathbb{C}$,*

(i) $$m_{f'/f}(r) = \begin{cases} O_{exc}(log(r)) & \textit{si } f \textit{ est une fraction rationnelle,} \\ o_{exc}(T_f(r)) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(ii) $$m_{f'/f}(r) = o_{exc}(T_f(r)) + O_{exc}(log(r)).$$

(iii) $$T_{f'}(r) = O_{exc}(T_f(r)).$$

Le premier point donne un contrôle assez fin de la dérivée logarithmique, le second en est une conséquence triviale, et le dernier fournit un contrôle de la dérivée.

Démonstration du lemme. D'après la caractérisation des fractions rationnelles, pour toute fonction méromorphe f non constante, soit f est une fraction rationnelle, auquel cas $T_f(r) \sim K \log(r)$, où $K > 0$ est le plus grand des degrés du numérateur et du dénominateur, soit $\log r = o(T_f(r))$.

- Si f est une fraction rationnelle, $\log^+(T_f(r)) = o(\log r)$, donc par le théorème sur la dérivée logarithmique, $m_{f'/f}(r) = O_{exc}(\log r)$.
- Sinon, $\log r = o(T_f(r))$, et en particulier $T_f \to \infty$, donc $\log^+(T_f(r)) = o(T_f(r))$. En sommant, il vient $m_{f'/f} = O_{exc}\big(\log r + \log^+(T_f(r))\big) = o_{exc}(T_f)$.

On a donc prouvé le premier point. Le second en est une conséquence immédiate.

Comme $\log r = O(T_f(r))$ pour toute f non-constante, on déduit de (i) que $m_{f'/f}(r) = O_{exc}(T_f(r))$. De plus, $m_f(r) \leqslant T_f(r)$ dés que $r \geqslant 1$, donc $m_f = O(T_f)$. On se rappelle alors que $m_{g_1 g_2} \leqslant m_{g_1} + m_{g_2}$ pour toutes fonctions méromorphes g_1 et g_2, afin d'obtenir que $m_{f'} \leqslant m_{f'/f} + m_f = O_{exc}(T_f)$.

D'autre part on vérifie par le calcul que $N_{f'}(r) \leqslant 2N_f(r) = O(T_f(r))$ dés que $r \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} N_{f'}(r) &= \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_r \\ a\neq 0, f'(a)=\infty}} \left(-ord_a(f')\log\left|\frac{r}{a}\right|\right) + (ord_0(f'))^- \log r \\ &\leqslant \sum_{\substack{a\in\mathbb{D}_r \\ a\neq 0, f(a)=\infty}} \left(-2ord_a(f)\log\left|\frac{r}{a}\right|\right) + (2\,ord_0(f))^- \log r \\ &= 2N_f(r), \end{aligned}$$

car les pôles de f' sont exactement ceux de f, et un pôle a (nul ou non) de f' a pour multiplicité $(-ord_a(f')) = 1 - ord_a(f) \leqslant -2\,ord_a(f)$.

Enfin, par addition, $T_{f'} = m_{f'} + N_{f'} = O_{exc}(T_f)$, ce qui achève la preuve du lemme. □

Montrons désormais par récurrence le théorème de Borel. Pour $n = 1$ le résultat est trivial, car si $h_0 + h_1 = 0$, alors h_0 et h_1 sont proportionnelles.

Soit $n \geqslant 2$. On suppose pour chaque $k \leqslant n$ que les seuls k-uplets d'unités de somme nulle sont les réunions de solutions triviales. Soit $(h_0, \ldots, h_n)$ un $(n+1)$-uplet d'unités vérifiant $h_0 + \ldots + h_n = 0$. On commence par diviser l'équation par $-h_0$, et par poser $f_i = -h_i/h_0$, pour obtenir $f_1 + \ldots + f_n = 1$.

Nous allons prouver qu'il existe une relation linéaire $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$ entre les f_i en étudiant leur Wronskien

$$W = \det \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Une fois cette relation linéaire obtenue, quitte à permuter les indices, on pourra supposer que $c_1 \neq 0, \ldots, c_m \neq 0$, et $c_{m+1} = \ldots = c_n = 0$, avec $m \geqslant 1$. Le m-uplet $(c_1 f_1, \ldots, c_m f_m)$ est alors solution de l'équation de Borel, et l'hypothèse de récurrence implique notamment qu'il existe un indice j tel que $1 \sim j$, c'est-à-dire tel que $c_j f_j = \lambda c_1 f_1$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

En combinant $h_1 + h_j = (1 + \lambda\frac{c_1}{c_j})h_1$ dans l'équation de départ, on obtient une relation plus courte[10], à laquelle on peut appliquer le théorème de Borel pour conclure.

[10] éventuellement de deux unités dans le cas où la somme $h_1 + h_j$ est nulle

On admet le corollaire classique du théorème de Cauchy-Lipschitz affirmant que des fonctions $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes si et seulement leur Wronskien est non identiquement nul.

Supposons donc par l'absurde que W n'est pas identiquement nul.

On commence par dériver $(n-1)$ fois la relation $f_1 + \ldots + f_n = 1$, afin d'obtenir le système linéaire (à coefficients non-constants) suivant.

$$\begin{cases} & f_1 & + & \ldots & + & & f_n & = & 1, \\ (f_1'/f_1) & f_1 & + & \ldots & + & (f_n'/f_n) & f_n & = & 0, \\ & & & \vdots & & & & & \vdots \\ (f_1^{(n-1)}/f_1) & f_1 & + & \ldots & + & (f_n^{(n-1)}/f_n) & f_n & = & 0. \end{cases}$$

Notons L le déterminant de ce système :

$$L = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1'/f_1 & \cdots & f_n'/f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}/f_1 & \cdots & f_n^{(n-1)}/f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{f_1 \ldots f_n} W.$$

La fonction L n'est pas identiquement nulle d'après l'hypothèse sur le Wronskien W. On peut donc appliquer les formules de Cramer de résolution des systèmes linéaires : $f_i = L_i/L$, où

$$L_i = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ f_1'/f_1 & \cdots & 0 & \cdots & f_n'/f_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}/f_1 & \cdots & 0 & \cdots & f_n^{(n-1)}/f_n \end{pmatrix}.$$

L'expression du déterminant en fonction de ses coefficients, et le fait que $m_{g_1 g_2} \leqslant m_{g_1} + m_{g_2}$ et $m_{g_1+g_2} \leqslant m_{g_1} + m_{g_2} + O(1)$ pour toutes fonctions méromorphes g_1, g_2 impliquent que

$$m_L \textit{ et } m_{L_i} = O\big(\sum_{i,k} m_{f_i^{(k)}/f_i}\big) + O(1).$$

Or on a aussi pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $k \in \{0, \ldots, (n-1)\}$:

$$\begin{aligned} m_{f_i^{(k)}/f_i} &\leqslant m_{f_i^{(k)}/f_i^{(k-1)}} + \ldots + m_{f_i'/f_i} \\ &= o_{exc}(T_{f_i^{(k-1)}} + \ldots + T_{f_i'} + T_{f_i}) + O_{exc}(\log r) \\ &= o_{exc}(T_{f_i}) + O_{exc}(\log r), \end{aligned}$$

où la première inégalité vient des propriétés multiplicatives de m, l'égalité qui suit découle de (ii), et la seconde égalité de (iii). Ainsi, en posant $T = T_{f_1} + \ldots + T_{f_n}$, on obtient que

$$m_L \textit{ et } m_{L_i} = o_{exc}(T) + O_{exc}(\log r).$$

D'autre part, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $T_{f_i} = m_{f_i} = m_{L_i/L} \leqslant m_{L_i} + m_{1/L}$. Dés que $r \geqslant 1$ on a aussi $m_{1/L} \leqslant T_{1/L} = T_L + O(1)$, et, L n'ayant pas de pôle (car les f_i ne s'annulent pas), $T_L = m_L$. Ainsi

$$T_{f_i} = O(m_{L_i} + m_L).$$

En combinant ces deux résultats,

$$T = \sum_i T_{f_i} = O\Big(\sum_i (m_L + m_{L_i})\Big) = o_{exc}(T) + O_{exc}(\log r),$$

donc $T = O_{exc}(\log r)$, d'où $T_{f_i} = O_{exc}(\log r)$ pour tout i. Ainsi toutes les f_i sont des fractions rationnelles, donc sont constantes (car une fraction rationnelle qui n'a ni zéro ni pôle est constante). Or on avait supposé le Wronskien des f_i non-nul. On aboutit donc à une contradiction, ce qui achève la preuve du théorème. □

6. Théorème de Green

Dans ce chapitre, nous commencerons par appliquer le théorème de Borel à l'étude de fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ privé d'un certain nombre d'hyperplans en position générale. Nous montrerons notamment que le complémentaire de $2n+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique au sens de Brody. Nous énoncerons ensuite un résultat qui nous permettra dans le cas qui nous intéresse de déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ privé de $2n+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique au sens de Kobayashi : c'est le théorème de Green.

Par abus de langage on parlera dans la suite du *noyau* d'une forme linéaire non-nulle $l \in \left(\mathbb{C}^{n+1}\right)^*$ pour désigner le projeté H de cet hyperplan linéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On notera $H = \ker l$.

Définition : Les $(m+1)$ hyperplans $H_0 = \ker l_0, \ldots, H_m = \ker l_m$ sont dits *en position générale* lorsque $(n+1)$ quelconques des formes linéaires l_i sont toujours linéairement indépendantes.

Soient $(n+2)$ hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en position générale. Comme les $(n+1)$ formes linéaires $l_0, \ldots, l_n$ sont linéairement indépendantes, elles forment une base du dual de $\mathbb{C}^{n+1}$, donc on peut écrire $l_{n+1} = \lambda_0 l_0 + \ldots + \lambda_n l_n$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Pour chaque i, les $(n+1)$ formes linéaires $l_0, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n$ étant linéairement indépendantes par hypothèse, $\lambda_i \neq 0$. On peut donc remplacer l_i par $\lambda_i l_i$ qui définit le même hyperplan, et supposer $l_{n+1} = l_0 + \ldots + l_n$. Dans le théorème ci-dessous nous demandons sans perte de généralité que cette relation soit vérifiée.

Théorème. *Soient $H_0 = \ker(l_0), \ldots, H_n = \ker(l_n), H_{n+1} = \ker(l_0 + \ldots + l_n)$ des hyperplans en position générale de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dont l'image ne rencontre aucun des hyperplans H_i est soit constante, soit à valeurs dans* *un hyperplan diagonal* $H_S = \ker\left(\sum_{i\in S} l_i\right)$*, pour une certaine partie* S *non vide de* $\{0,\ldots,n\}$.

Démonstration. On écrit $f = [f_0,\ldots,f_n]$ avec les f_i holomorphes non toutes simultanément nulles. Pour $i \in \{0,\ldots,n\}$ on pose $h_i : z \mapsto l_i(f_0(z),\ldots,f_n(z))$. L'hypothèse implique alors que les h_i sont des unités, de même que $h_{n+1} = -(h_0 + \ldots + h_n)$.

On applique le théorème de Borel à ces $(n+2)$ unités qui vérifient l'équation $h_0 + \ldots + h_{n+1} = 0$.

Si une des parties S de la partition donnée par le théorème de Borel ne contient pas h_{n+1}, alors on a $\sum_{i\in S} h_i = 0$, *i.e.* f est à valeurs dans $\ker\left(\sum_{i\in S} l_i\right) = H_S$.

Sinon, toutes les unités h_i sont proportionnelles. Comme les $(l_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ forment une base du dual de $\mathbb{C}^{n+1}$, on peut écrire les applications coordonnée de $\mathbb{C}^{n+1}$ comme combinaison linéaire des l_i, donc, en composant par f, on peut écrire les $f_j(z)$ comme combinaison linéaire (à coefficients constants) des $h_i = l_i(f_0,\ldots,f_n)$. On en déduit que les applications f_j sont elles aussi proportionnelles, c'est-à-dire exactement que f est constante. $\square$

Ainsi dès qu'une fonction holomorphe f évite une famille donnée d'hyperplans, elle est contrainte à varier dans un certain sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, qui ne dépend que de la famille d'hyperplans.

Le théorème suivant donne un contrôle plus précis de l'image de f pour chaque fonction individuellement. En contrepartie, ce contrôle n'est plus uniforme en la fonction f.

Théorème. (Fujimoto et Green) *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *une application holomorphe. Supposons que* f *évite* $n+p$ *hyperplans projectifs en position générale* ($p \geqslant 1$)*. Alors l'image de* f *est contenue dans un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *de dimension inférieure à* (n/p).

Démonstration. On reprend des notations proches de celles du théorème précédent. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une application holomorphe qui évite $n+p$ hyperplans $H_1 = \ker l_1, \ldots, H_{n+p} = \ker l_{n+p}$. On écrit f en coordonnées projectives holomorphes : $f = [f_0 : \ldots : f_n]$. Pour chaque $i \leqslant n+p$ on pose $h_i(z) = l_i(f_0(z),\ldots,f_n(z))$. L'hypothèse implique alors que les h_i sont des unités.

On partitionne alors l'ensemble des indices $\{1,\ldots,n+p\}$ en classes d'équivalence (S_k) pour la relation définie dans le théorème de Borel : $i \sim j$ si h_i et h_j sont proportionnelles. Montrons que chaque classe d'équivalence S_k contient au moins p éléments.

Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'on dispose d'au moins $n+1$ indices $i_1,\ldots,i_{n+1}$ qui ne sont pas dans S_k. On choisit un indice quelconque $\alpha \in S_k$. Les $n+2$ formes linéaires $h_{i_1},\ldots,h_{i_{n+1}}$ et h_α ne peuvent pas être linéairement indépendantes (tout simplement parce qu'il y en a plus que la dimension $n+1$), et on obtient une relation linéaire

$$\lambda_1 h_{i_1} + \ldots + \lambda_{n+1} h_{i_{n+1}} + \mu h_\alpha = 0,$$

dans laquelle aucun coefficient n'est nul (on aurait sinon une relation entre moins de $n+1$ formes linéaires l_i, ce qui contredirait l'hypothèse que les hyperplans H_i sont en position générale. On peut donc appliquer le théorème de Borel aux unités $\lambda_j h_{i_j}$ et μh_α et obtenir notamment que parmi ces fonctions, la classe d'équivalence[11] de μh_α n'est pas réduite à cette seule fonction. Or cela implique que l'un des $\lambda_j h_{i_j}$ est proportionnel à μh_α, ce qui contredit l'hypothèse que les i_j ne sont pas dans S_k.

Ainsi il y a au plus $(n+p)/p$ classes d'équivalence.

On considère d'une part l'application $\tilde{f} = (f_0, \ldots, f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+1}$, et d'autre part l'application produit

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+p} \\ x & \longmapsto & \big(l_1(x), \ldots, l_{n+p}(x)\big), \end{cases}$$

qui est injective car les l_i sont en position générale. On remarque que leur composée s'écrit

$$\pi \circ \tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+p} \\ z & \longmapsto & \big(h_1(z), \ldots, h_{n+p}(z)\big). \end{cases}$$

La discussion qui précède sur le nombre de classes d'équivalence pour la relation de proportionnalité implique que l'image de $\pi \circ \tilde{f}$ engendre un espace vectoriel de dimension au plus $(n+p)/p$.

Comme π est injective, l'image de $\tilde{f}$ engendre un espace vectoriel de dimension au plus $(n+p)/p$. En passant au quotient dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, on obtient que f est à valeurs dans un certain sous-espace linéaire projectif de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, de dimension au plus $(n+p)/p - 1 = n/p$. $\square$

En prenant $p = n+1$ dans le théorème ci-dessus, on obtient le théorème de Green.

Théorème (Green). *$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ privé de $2n+1$ hyperplans en position générale est Brody hyperbolique.*

Il est temps d'énoncer l'outil qui va nous permettre de montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ privé de $2n+1$ hyperplans en position générale est Kobayashi hyperbolique.

Théorème. *Soient $H_1, \ldots, H_m$ des hypersurfaces fermées de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, définies localement par des équations analytiques, c'est-à-dire que pour chaque $i \leqslant m$ on a :*

$$\forall z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\ \exists V \text{ voisinage de } z,\ \exists \phi : V \mapsto \mathbb{C} \text{ holomorphe, telle que } V \cap H_i = \phi^{-1}(0).$$

On pose $X = H_1 \cup \ldots \cup H_m$. On suppose que pour toute partition $\{1, \ldots, m\} = I \cup J$ des indices l'ensemble

$$\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) - \left(\bigcup_{j \in J} H_j\right)$$

est Brody hyperbolique. Alors $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X$ est Kobayashi hyperbolique.

Remarquons que parmi les hypothèses figure le fait que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X$ est Brody hyperbolique : il s'agit du cas $I = \emptyset$.

[11] Ceci est un abus de langage, étant donné que la relation d'équivalence a été définie sur les indices dans tout ce qui précède

Nous utiliserons le théorème dans le cas d'hyperplans, pour lesquels on peut prendre pour U une carte affine, et pour ϕ une application linéaire sur cette carte affine.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X$ n'est pas Kobayashi hyperbolique.

On peut alors appliquer le lemme de Brody[12] (en munissant $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'une métrique infinitésimale N quelconque), car $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X$ est une sous-variété complexe relativement compacte de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ce lemme nous fournit une suite d'applications holomorphes

$$f_k : \mathbb{D}_{R_k} \to \big(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X\big),$$

avec $R_k \to \infty$, telles que la suite (f_k) converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe *non constante*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \overline{\big(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - X\big)}.$$

La question est de savoir si l'image de f peut intersecter les hypersurfaces $H_1, \ldots, H_m$. Nous allons montrer que pour chaque indice i, ou bien f est à valeurs dans H_i, ou bien l'image de f n'intersecte pas H_i.

Fixons un indice i. On va montrer que $f^{-1}(H_i)$ est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{C}$. Par connexité de $\mathbb{C}$ on aura alors soit $f^{-1}(H_i) = \mathbb{C}$, auquel cas f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, soit $f^{-1}(H_i) = \emptyset$, auquel cas l'image de f n'intersecte pas H_i.

Par continuité de f, $f^{-1}(H_i)$ est fermé.

Montrons que $f^{-1}(H_i)$ est un voisinage de chacun de ses points. On choisit un $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) \in H_i$. Par hypothèse sur H_i, on dispose d'un voisinage $V \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de $f(a)$, et d'une application holomorphe $\phi : V \to \mathbb{C}$, tels que $V \cap H_i = \phi^{-1}(0)$.

Comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Il contient donc un voisinage compact K de a. La[13] distance δ entre le fermé $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - V$ et le compact $f(K)$ est strictement positive, donc comme $f_k \to f$ uniformément sur K, on a $|f_k(z) - f(z)| < \delta$ pour tout $z \in K$ à partir d'un certain rang k_0, soit $f_k(K) \subseteq V$.

Les composées $g = \phi \circ f$ et $g_k = \phi \circ f_k$ sont donc définies sur K pour k assez grand, et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Par continuité de ϕ, on a encore $g_k \to g$ uniformément sur K. De plus, les fonctions g_k ne s'annulent pas car on a supposé que l'image de f_k n'intersecte pas H_i, mais par définition de ϕ, si $g_k(z) = \phi(f_k(z)) = 0$, alors $f_k(z) \in V \cap H_i \subseteq H_i$.

Nous pouvons donc appliquer à cette suite un théorème de Hurwitz, qui affirme qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas est soit la fonction nulle, soit une fonction qui ne s'annule pas. Comme $g(a) = \phi(f(a)) = 0$, on n'est pas dans le second cas, mais dans le premier, donc $g = 0$ sur K, *i.e.* $f(K) \subseteq H_i$, soit $K \subseteq f^{-1}(H_i)$.

Ainsi, l'ensemble $f^{-1}(H_i)$ est bien ouvert et fermé, et on a comme expliqué ci-dessus que pour chaque indice i, soit f est à valeurs dans H_i, soit l'image de f n'intersecte pas H_i.

[12] Ce lemme est l'objet du chapitre 3.

[13] $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ n'est pas muni d'une distance canonique, mais la conclusion du raisonnement ne dépend pas de la notion de distance utilisée.

Avec cette dichotomie en tête, partitionnons à présent l'ensemble des indices $\{1,\dots,m\}$ en l'ensemble I des indices i pour lesquels f est à valeurs dans H_i d'une part, et l'ensemble J des indices j pour lesquels f n'intersecte pas H_j d'autre part. On obtient que f est une fonction holomorphe non constante sur $\mathbb{C}$, à valeurs dans

$$\bigcap_{i\in I} H_i - \bigcup_{j\in J} H_j.$$

Cela contredit le caractère Brody hyperbolique de ce dernier ensemble. $\square$

Nous combinons finalement tous ces résultats, afin de montrer le théorème suivant.

Corollaire (THÉORÈME DE GREEN). *Le complémentaire dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de $2n+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique au sens de Kobayashi.*

Démonstration. La remarque qui précède la preuve du théorème explique pourquoi on peut prendre pour H_i des hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Il suffit donc de prouver que si $H_1,\dots,H_{2n+1}$ sont des hyperplans en position générale (*cf.* le chapitre 5, sur le théorème de Borel), alors pour toute partition de $\{1,\dots,2n+1\}$ en deux parties I et J, l'ensemble

$$\bigcap_{i\in I} H_i - \bigcup_{j\in J} H_j.$$

est Brody hyperbolique.

On remarque tout d'abord que l'intersection

$$V = \bigcap_{i\in I} H_i$$

de $|I|$ hyperplans projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un espace projectif de dimension $n-|I|$, où $|I|$ est le cardinal de I. De plus, l'intersection de chaque H_j ($j\in J$) avec V est un hyperplan projectif de V, donc

$$\left(\bigcap_{i\in I} H_i - \bigcup_{j\in J} H_j\right) = \left(V - \bigcup_{j\in J}(H_j\cap V)\right) \simeq \Big(P^{(n-|I|)}(\mathbb{C}) - \big\{|J|\text{ hyperplans}\big\}\Big).$$

Vérifions que les hyperplans $H_j\cap V$ de V sont en position générale. Pour tout $J'\subset J$ de cardinal $1+\dim V = 1+n-|I|$, les $n+1$ hyperplans $(H_i)_{i\in I}$ et $(H_j)_{j\in J'}$ sont linéairement indépendants, au sens où les formes linéaires l_i et l_j qui les définissent sont linéairement indépendantes. Supposons que les hyperplans $(H_j\cap V)_{j\in J'}$ de V ne sont pas linéairement indépendants. Cela signifie qu'il existe une relation linéaire $\sum_{j\in J'}\lambda_j l_j = 0$, valable *dans V*. Ainsi

$$\bigcap_{i\in I}\ker l_i \subseteq \ker \sum_{j\in J'}\lambda_j l_j.$$

D'après le lemme des noyaux, on peut alors exprimer la forme linéaire $\sum_{j\in J'}\lambda_j l_j$ comme combinaison linéaire des l_i ($i\in I$). Or cela contredit l'indépendance linéaire des formes $(l_i)_{i\in I}$ et $(l_j)_{j\in J'}$.

On va donc pouvoir appliquer les théorèmes vus ci-dessus à notre complémentaire d'hyperplans projectifs : dès qu'on enlève au moins $2k+1$ hyperplans en position générale à un espace projectif de dimension k, on obtient une variété Brody hyperbolique.

Il suffit donc de vérifier que $|J| \geqslant 2\dim V + 1$: comme (I, J) est une partition de $\{1, \ldots, 2n+1\}$, on a $|J| = 2n+1-|I|$. On vérifie alors que $2\dim V + 1 = 2n+1-2|I| \leqslant 2n+1-|I|$.

Les espaces

$$\bigcap_{i\in I} H_i - \bigcup_{j\in J} H_j$$

sont donc bien tous Brody hyperboliques, et on peut ainsi appliquer le théorème précédent pour conclure. $\square$

Ceci achève la preuve du théorème de Green, et ce mémoire par la même occasion. Avant de conclure, mentionnons la conjecture de Kobayashi, qui, si elle est vraie, est une généralisation du cas $n = 2$ du théorème de Green :

Conjecture (KOBAYASHI). *Le complémentaire dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'une hypersurface algébrique, projective, générique, de degrée supérieur à 5 est Kobayashi hyperbolique.*

On sait depuis 1996 que ceci est vrai pour une surface de degré "sufisamment grand". À l'époque, la borne était de 10^{13}. Demailly et Elgoul ont montré en 2000 que cela est vrai pour le degré 21, puis en 2003 Elgoul a montré que cétait en réalité vrai en degré 15. La meilleure borne connue actuellement est 14 elle à été obtennue par E.Rousseau en 2007.

Nous remercions avec plaisir M. Joël Merker qui a encadré notre travail, nous guidant par sa rigueur implacable et ses conseils avisés.

RÉFÉRENCES

[1] R. BRODY : *Compact manifolds in hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 213–219.

[2] H.M. FARKAS ET I. KRA : *Riemann Surfaces*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, (1980,1992).

[3] O.FOSTER : *Lectures on Riemann Surfaces*. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan. Reprint of the 1981 English translation. Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] S.KOBAYASHI : *Hyperbolic complex spaces*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] S.LANG : *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] E.ROUSSEAU : *Hyperbolicité des variétés complexes*, Cours Peccot au Collège de France, Mai-Juin 2007, 52 pp., `arxiv.org/abs/0709.3882/`