Correction de l'examen de logique

26 janvier 2011

Exercice 1

I)

1. On définit par récurrence sur n, une suite $(\kappa_n : n < \omega)$ de cardinaux par : $\kappa_0 = \aleph_0$ et $\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n}$. Il est clair que cette suite est croissante. On pose $\kappa = \sup_n \kappa_n$. Soit $\lambda > \aleph_0$ fortement limite. Par induction sur $n \in \omega$, on montre que $\kappa^n < \lambda$, d'où $\kappa \leq \lambda$. Par ailleurs, si $\mu < \kappa$, alors il existe $n \in \omega$ tel que $\mu \leq \kappa_n$, et alors $2^\mu \leq 2^{\kappa_n} = \kappa_{n+1} < \kappa$. Il s'en suit que κ est le plus petit cardinal fortement limite $> \aleph_0$. Il est de cofinalité ω, donc n'est pas régulier et par suite pas inaccessible.

2. Soit λ un cardinal. On définit par récurrence sur n, une suite $(\lambda_n : n < \omega)$ de cardinaux par : $\lambda_0 = \lambda$ et $\lambda_{n+1} = \aleph_{\lambda_n}$. Il est clair que cette suite est croissante. On pose $\kappa = \sup_n \lambda_n$. Alors κ est un cardinal comme sup de cardinaux. De plus par continuité de la fonction $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$, on a $\kappa = \aleph_{\sup \lambda_n} = \aleph_\kappa$. Et bien sûr $\kappa \geq \lambda$.

3. Soit κ inaccessible. Soit α tel que $\kappa = \aleph_\alpha$. Par (iii), α est un ordinal limite. On sait alors que $cof(\kappa) = cof(\alpha)$, d'où $cof(\alpha) = \kappa$. En particulier $\alpha \geq \kappa$. D'autre part il est clair que $\alpha \leq \kappa$, donc $\alpha = \kappa$.

4. Le plus petit cardinal vérifiant $\kappa = \aleph_\kappa$ est $\sup\{\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}} ...\}$.

II)

1. Évident.

2. Supposons qu'il existe $H \subseteq 2^{\aleph_0}$ homogène pour f et de cardinalité $\aleph_1$. Quitte à diminuer H, on peut supposer que son type d'ordre est exactement $\aleph_1$ et on peut énumérer $H = (\alpha_i : i < \aleph_1)$ avec $\alpha_i < \alpha_j$ pour $i < j$.

Par hypothèse, il existe $i_* \in \{0, 1\}$ tel que pour tout $\alpha < \beta \in H$, on ait $f(\alpha, \beta) = i_*$. Supposons $i_* = 1$; la preuve pour $i_* = 0$ est identique. On a donc pour $i < j < \aleph_1$, $\sigma(\alpha_i) <_{\mathbb{R}} \sigma(\alpha_j)$. La suite $(\sigma(\alpha_i) : i < \aleph_1)$ est donc une suite strictement croissante de réels de longueur $\aleph_1$. On a vu dans un des premiers TD de l'année que cela n'était pas possible. On rappelle l'argument: pour tout $i < \aleph_1$, on choisit un rationnel q_i tel que $\alpha_i < q_i < \alpha_{i+1}$. Clairement les q_i sont deux-à-deux distincts et on obtient $\aleph_1$ rationnels ce qui est absurde.

3. Supposons que κ satisfasse $\kappa \to (\kappa)^2_2$ et $\kappa > \aleph_0$ (condition manquante dans l'énoncé. Elle est nécessaire car on a bien $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$: c'est le théorème de Ramsey). Soit $\lambda < \kappa$, on sait que $\lambda^+ \nrightarrow (2^\lambda)^2_2$. Par la question 1, on a donc $\kappa \nrightarrow (2^\lambda)^2_2$ et à nouveau par 1. cela implique $2^\lambda < \kappa$. Le cardinal κ est donc fortement limite.

Reste à montrer qu'il est régulier. Supposons par l'absurde κ singulier, de cofinalité $\lambda < \kappa$. On peut alors écrire $\kappa = \sup\{\kappa_i : i < \lambda\}$ pour certains ordinaux $\kappa_i < \kappa$. On définit une relation d'équivalence E sur κ par $\alpha E \beta$ si et seulement si, pour tout i, on a

$$\alpha \leq \kappa_i \iff \beta \leq \kappa_i.$$

(C'est-à-dire que α et β sont placés identiquement par rapport aux κ_i).

On définit alors une fonction $f : [\kappa]^2 \to \{0,1\}$ par: $f(\{\alpha,\beta\}) = 0$ si $\alpha E \beta$ et $f(\{\alpha,\beta\}) = 1$ sinon. Soit $H \subset \kappa$ un ensemble homogène pour f. Il existe $i_* \in \{0,1\}$ tel que pour tous $\alpha, \beta \in H$, on a $f(\{\alpha,\beta\}) = i_*$. Supposons d'abord $i_* = 0$. Tous les éléments de H sont donc E-équivalents. Soit $\alpha \in H$. Il existe i tel que $\alpha \leq \kappa_i$. Alors pour tout $\beta \in H$, $\beta \leq \kappa_i$. Par suite $H \subseteq \kappa_i + 1$, donc H est de cardinalité au plus $\kappa_i < \kappa$.

Si maintenant $i_* = 1$, les éléments de H sont deux-à-deux non E-équivalents. Énumérons $H = (\alpha_j : j < \gamma)$ de manière croissante. Alors pour tout $j < \gamma$, il existe $i_j < \lambda$ tel que $\alpha_j \leq \kappa_{i_j}$ et $\alpha_{j+1} > \kappa_{i_j}$. Clairement pour $j \neq j'$ on a $i_j \neq i_{j'}$. Ainsi γ est de cardinalité au plus $\lambda < \kappa$.

On a donc montré que dans les deux cas on avait $|H| < \kappa$ ce qui prouve $\kappa \nrightarrow (\kappa)^2_2$ et achève la preuve que κ est inaccessible.

Exercice 2

1. Supposons $C(T)$ fini. Écrivons $C(T) = \{T_1, ..., T_n\}$. On peut alors trouver des énoncés $\phi_1, ..., \phi_n$ tels que pour tous $k, m \leq n$, on ait $T_m \vdash \phi_k$ si et seulement si $k = m$. (Pour chaque paire $i, j \leq n$, il existe un énoncé $\theta_{i,j}$ tel que $T_i \vdash \theta_{i,j}$ et $T_j \vdash\neq \theta_{i,j}$. Prendre alors $\phi_k = \bigwedge_{j \leq n} \phi_{k,j}$).

Fixons une completion T_m de T et soit θ un $\mathcal{L}$-énoncé. On a alors

$$T_m \vdash \theta \iff T \vdash \phi_m \to \theta.$$

La fonction qui au code de θ associe le code de $\phi_m \to \theta$ est clairement récursive. Puisque T est décidable, T_m est décidable.

2. On considère une énumération récursive $(\theta_n : n < \omega)$ des $\mathcal{L}$-énoncés. On va décrire à partir d'elle un algorithme qui décide une complétion T' de T. L'algorithme prend un entier n en entrée et renvoie OUI si $T' \vdash \theta_n$ et NON sinon. En voici une description :

– Pour chaque $m < n$, appeler récursivement l'algorithme pour déterminer si $T' \vdash \theta_m$.

– Soit $A \subseteq n$ l'ensemble des $m < n$ pour lesquels $T' \vdash \theta_m$ et soit

$$\Theta = \bigwedge_{m \in A} \theta_m.$$

On appelle l'algorithme qui décide T avec comme entrée $\Theta \to \theta_n$. S'il répond que $T \vdash \Theta \to \theta_n$, alors renvoyer OUI, sinon renvoyer NON.

Cet algorithme est bien défini et termine toujours. Notons T' l'ensemble des énoncés θ_n pour lesquels l'algorithme répond OUI. Montrons que T' est une théorie complète. D'abord supposons T' inconsistante. Il existe donc $m_1 < ... < m_n$ tels que $T \cup \{\theta_{m_1}, ..., \theta_{m_n}\}$ est inconsistante (par compacité) et $\theta_{m_i} \in T'$ pour tout i. Supposons m_n minimal avec cette propriété. C'est-à-dire que si $A = \{m < m_n : T' \vdash \theta_m\}$, alors $T_0 := T \cup \{\theta_m : m \in A\}$ est consistant.

Si l'algorithme a renvoyé OUI sur l'entrée m_n, c'est nécessairement que $T \vdash \left(\bigwedge_{m \in A} \theta_m\right) \to \theta_{m_n}$, c'est-à-dire $T_0 \vdash \theta_{m_n}$. Comme T_0 est consistante, $T_0 \cup \{\theta_{m_n}\}$ aussi. Contradiction.

Il est clair par construction que T' est complète et qu'elle contient T. Donc T' est bien une complétion décidable de T.

3. Si $C(T)$ est fini, c'est clair par la question 1. Supposons donc $C(T)$ infini. À toute complétion décidable de T est associé une machine de Turing qui la décide. Le nombre de machine de Turing étant dénombrable, il existe au plus $\aleph_0$ complétions décidables de T.

Il reste donc à montrer qu'il existe une infinité de complétions décidables de T. Pour cela, on va construire par récurrence sur n une suite $(T'_n : n < \omega)$ de complétions décidables deux-à-deux distinctes de T. Par la question 2., il existe T'_0 une complétion décidable de T. Supposons $(T'_m : m < n)$ construits. Puisque $C(T)$ est infini, il existe une complétion T_* de T différente de $T'_0, ..., T'_{n-1}$. On peut alors trouver un énoncé ϕ tel que $T_* \vdash \phi$ et $T'_m \vdash \neg\phi$ pour tout $m < n$ (par le même argument qu'en 1.). La théorie $T \cup \{\phi\}$ est alors consistante. De plus, elle est décidable, car pour tout énoncé θ, on a

$T \cup \{\phi\} \vdash \theta \iff T \vdash \phi \to \theta$, et T est décidable. Par la question précédente, cette théorie admet une complétion décidable T'_n.

Par construction, les T'_n sont deux-à-deux distinctes. On a donc montré que $C_d(T)$ est infini.

4. Il était vu en cours que la théorie CAC des corps algébriquement clos est décidable. Ces complétions sont données par CAC_p, pour p premier ou 0, et elles sont toutes décidables. Cela montre le cas $\kappa = \aleph_0$. Si $0 < \kappa = n$ est fini, il suffit de considérer la théorie CAC augmentée par l'axiome $\phi_{p_1} \vee \ldots \vee \phi_{p_n}$, où $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres premiers 2-à-2 distincts et $\phi_{p_i} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ fois}} \doteq 0$. Cette théorie est décidable et admet exactement n complétions décidables.

Exercice 3

1. Soit $c \in C$ une constante qui n'apparaît ni dans T' ni dans ψ. Comme $T' \backslash T$ est finie, un tel c existe. Si $T' \vdash \neg \exists v_0 \psi$, clairement $T' \cup \{\exists v_0 \psi \to \psi(c)\}$ est consistante. Sinon, soit $\mathfrak{M}^* \models T' \cup \{\exists v_0 \psi\}$, et soit $a \in M^*$ tel que $\mathfrak{M}^* \models \psi(a)$. Alors la structure obtenue à partir de $\mathfrak{M}^*$, en interprétant c par a et en gardant les interprétations des autres symboles, est un modèle de $T' \cup \{\exists v_0 \psi \to \psi(c)\}$.

2. On cherche $\phi \in \pi_j$ tel que $T' \cup \{\neg \phi(\overline{c})\}$ soit consistante. Comme le dit l'indication, T' est logiquement équivalente à $T \cup \{\chi(\overline{c}, \overline{d})\}$ pour une $\mathcal{L}$-formule $\chi(\overline{x}, \overline{y})$ et $\overline{d}$ un uplet de constantes de C disjoints de $\overline{c}$. Par hypothèse, la formule $\exists \overline{y} \chi(\overline{x}, \overline{y})$ n'isole pas $\pi_j(\overline{x})$. On peut donc choisir $\phi \in \pi_j$ telle que

$$T \not\vdash \forall \overline{x} (\exists \overline{y} \chi(\overline{x}, \overline{y}) \to \phi(\overline{x})).$$

La théorie $T \cup \{\exists \overline{x} \exists \overline{y} (\chi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \neg \phi(\overline{x})\}$ est donc consistante. Comme $\overline{c}$ et $\overline{d}$ n'apparaissent pas dans T, on en déduit que $T \cup \{(\chi(\overline{c}, \overline{d}) \wedge \neg \phi(\overline{c})\}$ est consistante aussi.

3. Soit $(\psi_i(v_0))_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération des $\mathcal{L}^*$-formules à une variable libre. De même, soit $e : \mathbb{N} \to \{(j, (c_{i_1}, \ldots, c_{i_{n_j}})) \mid j \in \mathbb{N}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_{n_j}} \text{ 2-à-2 distincts}\}$ une énumération. On pose $T_0 = T$. Si T_{2n} est construite, on trouve $T_{2n+1} := T_{2n} \cup \{\exists v_0 \psi_n(v_0) \to \psi_n(c)\}$ (consistante) comme dans la partie 1. Si T_{2n+1} est construite, on traite le problème associé à $e(n) = (j, \overline{c})$. Par la partie 2., il

existe $\phi \in \pi_j$ telle que $T_{2n+2} := T_{2n+1} \cup \{\neg\phi(\overline{c})\}$ soit une théorie consistante. Alors $T^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ est consistante par compacité. Par construction, T^* satisfait (H) et (O).

4. Soit T^* donnée, T^* satisfaisant (H). Si X_i était fini, disons $X_i = \{c_{j_1}, \dots, c_{j_N}\}$, il suffirait d'appliquer (H) à la formule $v_0 = c_i \wedge \bigwedge_{k=1}^{N} v_0 = c_{j_k}$ pour trouver $c \in X_i$ distinct de tous les c_{i_k}. Contradiction.

On montre sans peine, en utilisant le test de Tarski-Vaught, que si $\mathfrak{M}^* \models T^*$, alors $\{c^{\mathfrak{M}^*} \mid c \in C\}$ est l'ensemble de base d'une sous-structure élémentaire $\mathfrak{M}_0^*$ de $\mathfrak{M}^*$.

5. Soit $\mathfrak{M}_0^* \preccurlyeq \mathfrak{M}^*$ comme dans la partie précédente. Si $a_1, \dots, a_{n_j} \in M_0$, par 4. il existe des constantes 2-à-2 distinctes c_{i_k}, $1 \leq k \leq n_j$, telles que $a_k = c_{j_k}^{\mathfrak{M}^*}$ pour tout k. Par construction, $\mathfrak{M}_0^* \not\models \neg\phi(\overline{c})$ pour un $\phi \in \pi_j$. Cela montre que $\mathfrak{M}_0^*$ omet tous les π_j.

Exercice 4

1. On considère la formule suivante:

$$\phi(y) = [\forall x\, \exists z > x\, \exists v < y\, \theta(v,z)] \rightarrow \exists v < y\, \forall x\, \exists z > x\, \theta(v,z).$$

On a clairement $\mathfrak{M} \models \phi(0)$. De plus, pour tout $a \in M$, $\mathfrak{M} \models \phi(a)$ entraîne $\mathfrak{M} \models \phi(S(a))$: en effet, si $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \exists v < S(a)\, \theta(v,z)$, alors ou bien $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \exists v < a\, \theta(v,z)$, ou bien $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \theta(a,z)$. Dans les deux cas, on conclut que $\mathfrak{M} \models \exists v < S(a)\, \forall x\, \exists z > x\, \theta(S(a),z)$ (dans le premier cas, on se sert de l'hypothèse d'induction). Par le schéma d'induction dans $\mathcal{P}$, on a bien que $\mathfrak{M} \models \forall y \phi(y)$.

2.(a) Clair par compacité.

2.(b) Montrons d'abord que $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \exists v < a\, \theta(v,z)$. Sinon, il existe $n \in M$ tel que $\mathfrak{M} \models \neg\exists z > n\, \exists v < a\, \theta(v,z)$. Il est facile de voir que cela contredit la consistance de $T \cup \{\exists v\, \theta(v,c)\}$.

Par le principe des tiroirs (partie 1.), on en déduit que $\mathfrak{M} \models \exists v < a\, \forall x\, \exists z > x\, \theta(v,z)$. Donc il existe $m \in M$, $m < a$ tel que $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \theta(m,z)$.

2.(c) Soit $a \in M$ non-standard. Alors il existe une infinité d'éléments m dans M avec $m < a$. En particulier, $\pi_a(v)$ est u 1-type partiel. Supposons que π_a soit isolé par la $\mathcal{L}$-formule $\phi(v)$. Alors $\phi(v) = \theta(v, c)$ pour une $\mathcal{L}_{ar}(M)$-formule $\theta(v, z)$. La théorie $T \cup \{\exists v\, \theta(v, c)\}$ est consistante. De plus, comme $\theta(v, c)$ isole π_a, on a $T \vdash \forall v(\theta(v, c) \to v < a)\}$. Par le résultat dans 2.(b), il existe $m \in M$, $m < a$, tel que $\mathfrak{M} \models \forall x\, \exists z > x\, \theta(m, z)$. Alors $T \cup \{\theta(m, c)\}$ est consistante. En effet, dans le cas contraire, par compacité on trouverait $n \in M$ tel que la théorie $U = D(\mathfrak{M}) \cup \{c > n\} \cup \{\theta(m, c)\}$ soit inconsistante. Cela contredirait le fait que $\mathfrak{M}$ admet une expansion en un modèle de U.

En particulier, $T \not\vdash \forall v(\theta(v, c) \to v \neq m)$, ce qui montre que π_a est non-isolé.

3. On utilise le théorème d'omission des types pour trouver un modèle $\mathfrak{N}^* \models T$ qui omet tous les π_a. Soit $\mathfrak{N}$ le réduit de $\mathfrak{N}^*$ au langage $\mathcal{L}_{ar}$. Alors, à isomorphisme près, $\mathfrak{N}$ est une extension élémentaire de $\mathfrak{M}$ qui est propre (l'interprétation de c en témoigne) et terminale (tous les π_a sont omis dans $\mathfrak{N}^*$).