Partiel du Cours de logique

2 heures, 23 novembre 2009

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 (Filtres et ultrafiltres)

Soit X un ensemble non vide. Un **filtre** sur X est un ensemble F de parties de X tel que

(a) $X \in F$, $\emptyset \notin F$

(b) si $A, B \in F$, $A \cap B \in F$

(c) si $A \in F$ et $A \subset B$, $B \in F$.

Un ensemble B de parties non vides de X est une **base de filtre** si l'intersection de toute famille finie d'éléments de B est dans B.

1. Montrer que toute base de filtre B est contenue dans un filtre minimal pour l'inclusion noté F_B.
2. Soit J un ensemble et soit I l'ensemble des parties finies de J. Pour tout $i \in I$, on pose $I_i = \{j \in I; i \subset j\}$. Montrer que l'ensemble B dont les éléments sont les I_i, $i \in I$, est une base de filtre sur I.
3. Montrer que si X est infini, l'ensemble des parties de X de complémentaire fini est un filtre, le filtre de Fréchet.
4. Un **ultrafiltre** est un filtre maximal pour l'inclusion. Montrer qu'un filtre F sur un ensemble non vide X est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subset X$, A ou $X \setminus A$ est dans F.
5. Montrer que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

Exercice 2 (Le théorème de Hausdorff)

On se propose dans cet exercice de démontrer le résultat suivant de Hausdorff : sur un ensemble infini X de cardinal κ, il existe $2^{(2^\kappa)}$ ultrafiltres distincts.

1. On dit qu'une famille de parties de X est libre si elle vérifie la propriété suivante : si X_1, …, X_n, Y_1, …, Y_m sont des éléments distincts de F alors $X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap (X \setminus Y_1) \cap \cdots \cap (X \setminus Y_m)$ est non vide. Démontrer que le théorème de Hausdorff résulte de l'énoncé suivant : il existe une famille libre de cardinal 2^κ.
2. On considère l'ensemble Y formé des couples $(F, (P_1, \ldots, P_n))$ avec F partie finie de X et $(P_1, \ldots, P_n)$ suite finie de parties de F. Quel est le cardinal de Y ?
3. A toute partie A de X on associe une partie A' de $X \cup Y$ de la façon suivante :
   • si $x \in X$, alors $x \in A'$ si et seulement si $x \in A$.
   • si $y \in Y$ et $y = (F, (P_1, \ldots, P_n))$, alors $y \in A'$ si et seulement si $A \cap F$ est l'un des P_i.
   Montrer que l'ensemble des A' pour $A \subset X$ forme une famille libre.
4. Conclure.

Exercice 3 (Ultraproduits)

Soit L un langage égalitaire et soit I un ensemble infini. On considère une famille $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, de L-structures égalitaires. Soit U un ultrafiltre sur I. Si M_i est l'ensemble sous-jacent à $\mathfrak{M}_i$, on considère la relation d'équivalence suivante sur $\prod_I M_i$: $(a_i) \equiv_U (b_i)$ si $\{i \in I, a_i = b_i\} \in U$. On note M_U l'ensemble des classes d'équivalences et $\pi : \prod_I M_i \to M_U$ la surjection canonique.

1. Vérifier que $\equiv_U$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que M_U admet une unique L-structure $\mathfrak{M}_U$ telle que pour toute formule **atomique** $\varphi(x^1, \cdots, x^n)$ et tous $(a^1, \cdots, a^n) \in (\prod_I M_i)^n$, on a $\mathfrak{M}_U \models \varphi(\pi(a^1), \cdots, \pi(a^n))$ si et seulement si l'ensemble des i tels que $\mathfrak{M}_i \models \varphi(a_i^1, \cdots, a_i^n)$ est dans U. On appelle $\mathfrak{M}_U$ l'ultraproduit des $\mathfrak{M}_i$ selon U.

3. Démontrer le théorème de Łoś : pour toute formule $\varphi(x^1, \cdots, x^n)$ et tous $(a^1, \cdots, a^n) \in (\prod_I M_i)^n$, on a $\mathfrak{M}_U \models \varphi(\pi(a^1), \cdots, \pi(a^n))$ si et seulement si l'ensemble des i tels que $\mathfrak{M}_i \models \varphi(a_i^1, \cdots, a_i^n)$ est dans U.
4. A l'aide du théorème de Łoś donner une preuve directe de ce qu'une théorie dont toute partie finie admet un modèle admet également un modèle.
5. Soit P l'ensemble des nombres premiers et soit U un ultrafiltre sur P contenant le filtre de Fréchet. On considère le langage des anneaux. On considère la famille $\mathbb{F}_p$, $p \in P$ des corps à p éléments et l'ultraproduit $\mathbb{F}_U$ selon U. Remarquer que c'est un corps. Déterminer sa caractéristique.