Des extensions de $\mathbb{Q}_p$ aux (φ, Γ)-modules généralisés

Tony Ly (sous la direction de Marie-France Vignéras)

Juin 2009

Ce texte constitue une introduction aux mathématiques que j'ai été amené à côtoyer de mon entrée à l'ENS jusqu'à la fin de la 3ème année de scolarité. Il ouvre à la fin vers le genre de questions que je serai sans doute amené à me poser durant ma thèse. Soyez prévenus, tout ce qui suit sera p-adique...

1 Corps de classes local

Soient p un nombre premier impair, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique fixée de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, muni de la topologie profinie naturelle.

Théorème 1 (Kronecker-Weber) *Toute extension finie abélienne de $\mathbb{Q}_p$ est contenue dans une extension cyclotomique.*

Examinons un peu plus précisément ces extensions cyclotomiques. D'abord, on remarque qu'il existe une unique extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de tout degré puisqu'une telle extension correspond à une extension du corps résiduel $\mathbb{F}_p$. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Alors K contient un unique sous-corps maximal non ramifié K^u, et K/K^u est totalement ramifiée. Ensuite, si on examine[1] le rôle des extensions totalement ramifiées dans le théorème de Kronecker-Weber, on s'aperçoit qu'il suffit de s'intéresser aux $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^e})/\mathbb{Q}_p$, où μ_n désigne une racine n-ème primitive de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Et cette dernière est de degré $(p-1) \times p^{e-1}$.
En prenant la limite inductive d'extensions abéliennes finies, on obtient une extension abélienne (éventuellement infinie) et toutes s'obtiennent de la sorte.

[1] si on note $e = v_p(n)$, $n = mp^e$ et $f = \min\{r \geq 1 \mid m \mid p^r - 1\}$, alors on a la décomposition $\mathbb{Q}_p(\mu_n) = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^r-1}, \mu_{p^e})$

Examinons maintenant le groupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times$. Le groupe des unités de $\mathbb{Q}_p$ se décompose de la manière suivante :

$$\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times p^{\mathbb{Z}} \times (1 + p\mathbb{Z}_p),$$

où la topologie est respectée si on munit $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ et $p^{\mathbb{Z}}$ de la topologie discrète. On a naturellement envie de mettre en correspondance la partie en $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$ avec les extensions totalement ramifiées, et celle en $p^{\mathbb{Z}}$ avec les non ramifiées. Ceci conduit à l'introduction du sous-groupe de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ suivant.
D'abord on note $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}_p}$ le sous-groupe d'inertie : c'est $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^u) \subseteq \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On a aussi le quotient $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^u/\mathbb{Q}_p) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. On peut alors écrire $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ comme une extension

$$1 \to \mathcal{I}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \widehat{\mathbb{Z}} \to 0.$$

On appelle *groupe de Weil* le sous-groupe de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ correspondant à l'extension

$$1 \to \mathcal{I}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z} \to 0,$$

provenant de l'inclusion naturelle $\mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$. Une étude plus fine avec prise en compte de l'inertie sauvage donne la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathcal{I}_{\mathbb{Q}_p} \to \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell \to 0.$$

On avait remarqué précédemment que l'abélianisé s'identifie à

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathcal{I}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to 0,$$

de sorte que l'on a finalement une version explicite de la théorie du corps de classe local à travers l'isomorphisme topologique

$$\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Q}_p^\times.$$

Ceci nous donne en particulier le cas unidimensionnel d'une conjecture de Langlands locale.

Proposition 2 *On a une équivalence de catégories entre caractères complexes de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$ et représentations irréductibles complexes de $\mathbb{Q}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$.*

2 Langlands local et Langlands local ℓ-adique

L'analogue n-dimensionnel a été prouvé de deux manières différentes dans [6] et [7].

On note $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes irréductibles admissibles[2] de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. On note aussi $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations n-dimensionnelles complexes de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$ telles que tout relèvement du Frobenius agit de manière semisimple.

Théorème 3 (Harris-Taylor, Henniart) *On a une bijection de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}(n)$ sur $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(n)$.*

Pour passer au cas ℓ-adique, on va introduire la notion de représentation de Weil-Deligne : c'est la donnée d'un triplet (ρ, V, N) où (ρ, V) est une représentation lisse de dimension finie de $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $N \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$ est nilpotent et vérifie

$$\rho(x)N\rho(x)^{-1} = |x|N \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p},$$

où $w_p : \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}$ envoie le Frobenius géométrique sur 1 et $|x| = p^{-w_p(x)}$.

Comme précédemment on note alors $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Et $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(n)$ désignera l'ensemble des classes d'équivalence de représentations n-dimensionnelles de Weil-Deligne ℓ-adiques telles que tout relèvement du Frobenius agit de manière semisimple.

Théorème 4 (Harris-Taylor, Henniart) *On a une bijection de $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(n)$ sur $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(n)$.*

3 Langlands local p-adique en dimension 2

Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension algébrique (pas nécessairement finie), dont on notera $\mathfrak{m}_L$ l'idéal maximal et k_L le corps résiduel. Notons aussi $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}_p^\times$.

3.1 (φ, Γ)-modules et équivalence de Fontaine

Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k$ à coefficients dans $\mathcal{O}_L$ et vérifiant $v_p(a_k) \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$. On munit $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ de la valuation définie par $v^{\{0\}}\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k\big) = \inf_k v_p(a_k)$, qui en fait un anneau complet. De manière équivalente, on peut voir $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ comme le complété de $\mathcal{O}_L((T))$ pour la valuation p-adique $v^{\{0\}}$. On note $\mathcal{E}$ son corps des fractions, et on remarquera que son corps résiduel est $k_L((T))$.
La valuation $v^{\{0\}}$ dote $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ d'une topologie dite forte : elle rend continue la projection sur le corps résiduel lorsque ce dernier est muni de la topologie

[2] on rappelle qu'une représentation lisse V de G est dite admissible si l'espace d'invariants V^K est de dimension finie pour tout sous-groupe compact ouvert K de G

discrète. Cependant, on s'intéressera à la topologie dite faible, qui rend continue la projection sur le corps résiduel lorsque celui-ci est muni de la topologie engendrée par v_T : en d'autres termes, une base de voisinages de 0 dans $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est donnée par les $\mathfrak{m}_L^k\mathcal{O}_\mathcal{E} + T^n\mathcal{O}_L[[T]]$ pour k, $n \in \mathbb{N}$. De même on munira tout module de type fini sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ de cette topologie faible.

Il est important de noter que l'on peut munir $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ d'actions $\mathcal{O}_L$-linéaires de φ et de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ commutant entre elles via

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1,$$

$$\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1.$$

Définition 5 *Un (φ, Γ)-module D sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-module de type fini muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ commutant entre elles. Un tel module est étale si $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathcal{O}_\mathcal{E}$-module. Un (φ, Γ)-module D sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ tué par $\mathfrak{m}_L$ est aussi appelé un (φ, Γ)-module sur $k_L((T))$.*

Le théorème suivant est central : il énonce l'équivalence de catégories entre représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules. Il fait ainsi le lien entre un objet de nature arithmétique et un objet purement algébrique. Pour la preuve, on se reportera à [5].

Théorème 6 (Fontaine)
- *(i) Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}$), alors $\mathbf{V}(D) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} D)^{\varphi=1}$ est une $\mathcal{O}_L$ (resp. L)-représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.*
- *(ii) Si V est une $\mathcal{O}_L$ (resp. L)-représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}}$ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}$).*
- *(iii) De plus, on a*

$$\mathbf{V}(\mathbf{D}(V)) = V \quad \textit{et} \quad \mathbf{D}(\mathbf{V}(D)) = D.$$

3.2 Représentations du mirabolique de GL_2 et représentations galoisiennes

Si D est un (φ, Γ)-module (de torsion) étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$, on définit un opérateur $\mathcal{O}_L$-linéaire $\psi : D \to D$ qui est l'inverse à gauche de φ : on a $\psi \circ \varphi = \mathbb{1}_D$. On note alors $\psi^{-\infty}(D)$ l'ensemble des suites bornées $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de D vérifiant $\psi(w^{(n+1)}) = w^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On définit ensuite une action du mirabolique

$$P^{(2)}(\mathbb{Q}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ a & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Q}_p,\, b \in \mathbb{Q}_p^\times \right\}$$

sur $\psi^{-\infty}(D)$ de la manière suivante. Si $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $\psi^{-\infty}(D)$, alors

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^k \end{pmatrix} * w\right)^{(n)} &= w^{(n+k)} && \text{si } k \in \mathbb{Z},\\
\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & b \end{pmatrix} * w\right)^{(n)} &= \gamma_b(w^{(n)}) && \text{si } b \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ et } \gamma_b \in \Gamma \text{ vérifie } \chi(\gamma_b) = b,\\
\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ a & 1 \end{pmatrix} * w\right)^{(n)} &= (1+T)^{ap^n} w^{(n)} && \text{si } a \in \mathbb{Q}_p \text{ et } n \geq -v_p(a).
\end{aligned}$$

On montre que $\psi^{-\infty}$ est un foncteur exact de la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vers celle des $P^{(2)}(\mathbb{Q}_p)$-modules. Il est aussi important de noter l'injectivité d'une correspondance de Langlands locale p-adique que donne le résultat suivant, qui est le théorème principal de [2].

Théorème 7 *Si D_1 et D_2 sont deux (φ, Γ)-modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ tels que les $P^{(2)}(\mathbb{Q}_p)$-modules $\psi^{-\infty}(D_1)$ et $\psi^{-\infty}(D_2)$ sont isomorphes, alors on a $D_1 \simeq D_2$.*

3.3 Le foncteur D de Colmez

Soit Π un $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module lisse, de longueur finie (donc de torsion) et admettant un caractère central. On commence par constituer son dual algébrique

$$\Pi^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\Pi, L/\mathcal{O}_L),$$

muni de la topologie de la convergence faible ; c'est un $\mathcal{O}_L$-module compact.
On note $\mathcal{T}$ l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$: ses sommets sont les classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux de $\mathbb{Q}_p^2$. Et deux sommets v et v' de $\mathcal{T}$ sont reliés par une arête s'il existe des représentants $L \subseteq L'$ (ou $L' \subseteq L$) respectifs tels que L'/L (ou L/L') soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Pour W un sous-$\mathcal{O}_L$-module de Π de longueur finie, stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et engendrant Π comme $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module, on définit

$$D_W^+(\Pi) = \left\{ \mu \in \Pi^\vee \;\middle|\; \mu \text{ nul sur } \begin{pmatrix} 1 & \\ a & p^n \end{pmatrix} .W \text{ si } a + p^n\mathbb{Z}_p \not\subseteq \mathbb{Z}_p,\ a \in \mathbb{Q}_p,\ n \in \mathbb{Z} \right\};$$

c'est un $\mathcal{O}_L[[T]]$-module avec actions de φ et de Γ. Cela correspond à demander à ce que le support de μ soit contenu dans une (et même celle correspondant à $\mathbb{Z}_p$) des $p+1$ branches de l'arbre $\mathcal{T}$. On note enfin

$$\mathbf{D}(\Pi) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[[T]]} D_W^+(\Pi).$$

La notation présuppose que $\mathbf{D}(\Pi)$ ne dépend pas du choix de W. Les propriétés du foncteur ainsi défini sont résumées à travers la proposition suivante, dont on trouvera la preuve dans [4].

Théorème 8

(i) Soit Π une $\mathcal{O}_L$-représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à caractère central, de longueur finie et de torsion. Alors $\mathbf{D}(\Pi)$ est un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, étale et de torsion.

(ii) Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ est contravariant et exact.

4 Et pour GL_n ?

Dans [8], les auteurs essaient de trouver un analogue n-dimensionnel au foncteur de Colmez.

4.1 $\Lambda(P_+)$-modules

Si on observe un peu la définition du $\mathbf{D}$ de Colmez, on a commencé par définir $D_W^+(\Pi)$, qui n'est autre qu'un module sur $P_+^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \mathbb{Z}_p & p^{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}$. C'est en partant de cette remarque que vient l'idée de considérer les algèbres de groupe sur un Borel de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

Soient $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et P le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures. On a la décomposition $P = TN$ où T est le tore diagonal et N le radical unipotent. Soient T_0 et N_0 les sous-groupes compacts ouverts de T et N, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p^\times$ et $\mathbb{Z}_p$ respectivement. On introduit alors les éléments dominants

$$T_+ = \{t \in T \mid tN_0t^{-1} \subseteq N_0\}.$$

On notera par la suite $P_0 = N_0T_0$ et $P_+ = N_0T_+$.

Si G_0 est un groupe compact, on note $\Lambda(G_0)$ l'algèbre de groupe complétée $\mathcal{O}_L[[G_0]]$. Le monoïde P_+ agit par conjugaison sur lui-même. L'ensemble $\mathcal{N}(P_+)$ des sous-groupes normaux ouverts U de P_0 vérifiant $bUb^{-1} \subseteq U$ pour tout $b \in P_+$ forme un système fondamental de voisinages ouverts de 1 dans P_+. Pour tout $U \in \mathcal{N}(P_+)$, on peut passer au quotient $U\backslash P_+$ et former l'anneau $\mathcal{O}_L[U\backslash P_+]$; ce dernier est encore muni d'une action de P_+ par conjugaison. En passant à la limite projective, on obtient la $\mathcal{O}_L$-algèbre unitaire $\widetilde{\Lambda}(P_+) = \varprojlim_U \mathcal{O}_L[U\backslash P_+]$, qui possède aussi une action de P_+. L'application naturelle $\Lambda(P_0) \otimes_{\mathcal{O}_L[P_0]} \mathcal{O}_L[P_+] \to \widetilde{\Lambda}(P_+)$ est injective ; on notera $\Lambda(P_+)$ son image, et c'est un sous-anneau de $\widetilde{\Lambda}(P_+)$ invariant sous P_+.

Définition 9 *Un $\Lambda(P_+)$-module à gauche M est dit étale si pour tout $b \in P_+$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(P_+) \otimes_{\Lambda(P_+),b} M & \to & M \\ \lambda \otimes x & \mapsto & \lambda b x \end{array}$$

est un isomorphisme de $\Lambda(P_+)$-modules.

On note $\mathcal{M}(\Lambda(P_+))$ la catégorie abélienne des $\Lambda(P_+)$-modules à gauche unitaires, et $\mathcal{M}_{\mathrm{et}}(\Lambda(P_+))$ la sous-catégorie pleine des $\Lambda(P_+)$-modules étales. C'est une catégorie abélienne. En particulier on peut considérer $D_{\mathrm{et}}(\Lambda(P_+))$ la sous-catégorie pleine de $D(\Lambda(P_+))$ dont les objets sont les complexes à modules de cohomologie étales.

4.2 Les foncteurs D^i de Schneider-Vignéras

Soient $\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)$ la catégorie abélienne des P-représentations lisses à coefficients dans un $\mathcal{O}_L$-module de torsion et Π un objet de $\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)$. On note $\mathcal{P}_+(\Pi)$ l'ensemble des sous-P_+-représentations de Π engendrant Π en tant que P-représentation. On définit ensuite

$$D(\Pi) = \varinjlim_{W \in \mathcal{P}_+(\Pi)} W^\vee.$$

Alors la catégorie des objets lisses $\mathcal{R}_{\mathrm{sm}}(P)$ possédant assez d'injectifs, on peut dériver D et en restreignant, on obtient le foncteur

$$RD : D^-(\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)) \to D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda(P^+));$$

le i-ème module de cohomologie de sa restriction à $\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)$ sera alors noté D^i.

4.3 Microlocalisation des algèbres d'Iwasawa

Pour espérer de bonnes propriétés sur ces foncteurs D^i, on va devoir changer de base vers un localisé de $\Lambda(N_0)$. Pour cela on définit (matriciellement) le morphisme de groupes

$$\ell : \begin{array}{ccc} N_0 & \to & \mathbb{Z}_p \\ (n_{ij})_{ij} & \mapsto & \sum_i n_{i+1,i} \end{array}.$$

Son noyau sera noté N_1 et on forme l'idéal

$$\mathcal{N} = \mathrm{Ker}(\Lambda(N_0) \to \Lambda(N_0/N_1) \to \Lambda(N_0/N_1)/\pi_L\Lambda(N_0/N_1));$$

il s'écrit aussi $\mathcal{N} = \mathfrak{m}(N_1)\Lambda(N_0) = \Lambda(N_0)\mathfrak{m}(N_1)$ où $\mathfrak{m}(N_1)$ désigne l'idéal maximal de l'anneau local $\Lambda(N_1)$, et en particulier il est bilatère.

La partie multiplicative $\mathcal{S} = \Lambda(N_0) \setminus \mathcal{N}$ est un ensemble de Ore à droite (et à gauche aussi d'ailleurs), ce qui veut dire qu'on va pouvoir localiser (on rappelle qu'on est dans un cadre non commutatif) à droite par rapport à $\mathcal{S}$ et former $\Lambda(N_0)_{\mathcal{S}}$.

Enfin $\Lambda_\ell(N_0)$ désignera le complété $\mathfrak{m}(N_1)$-adique de $\Lambda(N_0)_{\mathcal{S}}$. Les propriétés de ce dernier sont peu connues mais en imitant le cas commutatif (de dimension 2 en particulier), on se permet d'avoir l'espoir suivant.

Conjecture 1 *L'anneau $\Lambda_\ell(N_0)$ est de dimension globale finie.*

Soit Γ le sous-groupe de P constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^{n-1} \end{pmatrix}$ avec $a \in 1 + p\mathbb{Z}_p$. Soient γ un générateur topologique de Γ et $t = \gamma - 1$. On commence par définir $\Lambda_\ell(N_0\Gamma)$ comme étant

$$\Lambda_\ell(N_0\Gamma) = \Big\{ \sum_{i \geq 0} \mu_i t^i \ \Big| \ \{\mu_i\}_i \text{ est bornée dans } \Lambda_\ell(N_0) \Big\}.$$

On fera attention que ce n'est pas la même chose que l'anneau obtenu par la construction précédente avec $N_0\Gamma$ à la place de N_0. Toujours est-il que c'est un sous-$\Lambda_\ell(N_0)$-module du produit direct $\prod_{\mathbb{N}} \Lambda_\ell(N_0)$. Aussi, en écrivant $\Lambda(N_0\Gamma) = \Lambda(N_0)[[t; \sigma, \delta]]$, on obtient une injection

$$\Lambda_\ell(N_0) \otimes_{\Lambda(N_0)} \Lambda(N_0\Gamma) \hookrightarrow \Lambda_\ell(N_0\Gamma).$$

On peut munir $\Lambda_\ell(N_0\Gamma)$ d'une structure d'anneau ; il est alors noethérien et est un module plat sur chacun les anneaux à droite et à gauche du produit tensoriel ci-dessus.

Si on note σ_φ l'action continue injective de φ sur $\Lambda(N_0\Gamma)$ induite par conjugaison, on a $\Lambda(P_\star) = \Lambda(N_0\Gamma)[[\varphi; \sigma_\varphi]]$. Cette action se prolonge à $\Lambda_\ell(N_0\Gamma)$ et on peut former

$$\Lambda_\ell(P_\star) = \Lambda_\ell(N_0\Gamma)[[\varphi; \sigma_\varphi]] \simeq \Lambda_\ell(N_0\Gamma) \otimes_{\Lambda(N_0\Gamma)} \Lambda(P_\star),$$

où l'isomorphisme est une identité de bimodules.

4.4 (φ, Γ)-modules généralisés

Regardons le monoïde correspondant au mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$; c'est :

$$P_\star^{(2)} = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ a & b \end{pmatrix} \ \Big| \ a \in \mathbb{Z}_p,\ b \in (1 + p\mathbb{Z}_p)p^{\mathbb{N}} \Big\}.$$

Il contient les sous-groupes

$$N_0^{(2)} = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ a & 1 \end{pmatrix} \ \Big| \ a \in \mathbb{Z}_p \Big\} \quad \text{et} \quad \Gamma^{(2)} = \Big\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ & b \end{pmatrix} \ \Big| \ b \in 1 + p\mathbb{Z}_p \Big\} \simeq \mathbb{Z}_p,$$

ainsi que l'élément $\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & p \end{pmatrix}$.

On note $\Lambda_F(P_\star^{(2)})$ l'anneau correspondant à $\Lambda_\ell(P_\star)$ dans le cas de la dimension 2. On remarque que l'isomorphisme $N_1 \backslash P_\star \xrightarrow{\sim} P_\star^{(2)}$ nous fournit l'identité de bimodules

$$\Lambda(P_\star^{(2)}) = \mathcal{O}_L \otimes_{\Lambda(N_1)} \Lambda(P_\star),$$

qui se révèle bien utile pour avoir la commutativité des flèches pour les foncteurs que l'on construira par la suite.

On peut faire un résumé des foncteurs construits dans [8] à travers le diagramme commutatif suivant.

$$
\begin{tikzcd}
D^-(\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)) \arrow[dr, "RD"'] \arrow[drrr, bend left=10, "RD_{\Lambda(P_\star^{(2)})}"] \arrow[ddrr, bend right=30, "RD_\ell"] \arrow[ddrrr, bend right=60, "RD_{\Lambda_F(P_\star^{(2)})}"'] & & & \\
& D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda(P_+)) \arrow[r, "\top"] & D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda(P_\star)) \arrow[r] \arrow[d] & D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda(P_\star^{(2)})) \arrow[d] \\
& & D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda_\ell(P_\star)) \arrow[dr] & D^+_{\mathrm{et}}(\Lambda_F(P_\star^{(2)})) \arrow[d, hook] \\
& & & D_{\mathrm{et}}(\Lambda_F(P_\star^{(2)}))
\end{tikzcd}
$$

Le symbole $\top$ désigne le foncteur d'oubli et les flèches non renseignées indiquent un changement de base naturel.

Revenons un instant au cas de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\mathcal{R}_{\mathrm{adm}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}_{\mathrm{tor}}(P)$ dont les objets sont les restrictions de représentations de G admissibles, de longueur finie et à caractère central. Une telle représentation possède une présentation standard et la restriction de $D^0_{\Lambda_F(P_\star^{(2)})}$ à $\mathcal{R}_{\mathrm{adm}}(G)$ coïncide avec le $\mathbf{D}$ de Colmez.

Références

[1] BUSHNELL Colin J. & HENNIART Guy : *The local Langlands conjecture for* GL(2), Springer, 2006

[2] CASSELS J.W.S. : *Local Fields*, Cambridge University Press, 1986

[3] COLMEZ Pierre : (φ, Γ)*-modules et représentations du mirabolique de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint 2007

[4] COLMEZ Pierre : *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et* (φ, Γ)*-modules*, preprint 2008

[5] FONTAINE Jean-Marc : *Représentations p-adiques des corps locaux*, The Grothendieck Festschrift Vol 2, Birkhäuser, 1991

[6] HARRIS M. & TAYLOR R. : *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Princeton University Press, 2001

[7] HENNIART Guy : *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. No 139, 2000

[8] SCHNEIDER Peter & VIGNERAS Marie-France : *A functor from smooth o-torsion representations to* (φ, Γ)*-modules*, preprint 2008

[9] SERRE Jean-Pierre : *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque No 46, Société Mathématique de France, 1977