INTRODUCTION AU DOMAIN DE RECHERCHE

Yue Ma

Mémoire de Master fait à Laboratoire Jacques-Luois Lions, 2010, Paris, France

Titre: **Nonlinear Gravitation Models. A Preliminary report on the well posedness theory**

Directeur du mémoire: **Philippe Lefloch**

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Philippe LE FLOCH, mon directeur du mémoire de M2, qui a dirigé mon travail. Ses conseils et ses commentaires précieux m'ont permis de surmonter mes difficultés et de progresser dans mes études.

Je voudrais aussi exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Grégoire NADIN, qui par son expérience et son enthousiasme, m'a donné beaucoup de propositions tout au long de mon magistère.

Je voudrais également exprimer mes remerciements sincères aux Monsieur Piere PANSU, Monsieur Frédéric PAULIN et Monsieur Jérémie SZEFTEL, qui par leur enthousiasme et leur savoir sur les matématiques, m'ont aussi donné beaucoup d'aides et d'encouragement pendant mes études à l'École Normale Supérieure.

Je voudrais aussi remercier mes parents, Monsieur Qing-jiu MA et Madame Hui-qin YUAN, pour leur encouragement, leur amour et leurs conseils pendant toute ma vie.

Tout mes études et travaux se sont déroulés à l'École Normale Supérieure et à Laboratoire Jacques-Louis Lions. Je tiens à remercier tous les membres de la FIMFA et de l'équipe du parcours Analyse Numérique et EDP, pour leur sympathie et leur accueil.

Enfain, je voudrais remercier mes camarades Wei WANG, Juan DU, Yuan-mi Chen et Yong LÜ, pour leur encouragements et leurs conseils pendant mes études en France.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE GRAVITÉ $f(R)$: EXISTENCE ET STABILITÉ

Yue Ma

1. Motivations physiques

La théorie de la relativité générale compte de nombreuses réussites : des observations astronomiques, comme la précession du périhélie de Mercure, la décroissance des étoiles doubles, la lentille gravitationnelle, ont démontré que cette théorie décrit la gravitation d'une manière assez précise. Celles-ci encouragent les cosmologistes à fonder un modèle cosmologique sur cette théorie, appelé modèle standard, pour expliquer l'évolution de notre univers. Selon ce modèle, la vitesse de l'expansion de l'univers doit diminuer. Mais en 1998, Saul Perlmutter à UC Berkeley, et Brian Schmidt à la National University of Australia, ont découvert que l'univers est en train de se développer à une vitesse accélérée. Pour expliquer cela, les cosmologistes ont imaginé plusieurs méthodes. L'énergie sombre est une de ces méthodes.

L'énergie sombre est une chose qui doit avoir un effet d'antigravitation entre les objets. Comme cela, on peut très bien comprendre l'accélération de l'expansion. Le problème est : qu'est-ce que l'énergie sombre ?

Une autre solution, qui est plus naturelle, est la théorie de gravité $f(R)$. Cette théorie est une modification de la théorie de relativité générale. On verra que dans cette théorie, l'énergie sombre apparaîtra comme un terme dans l'équation du champ gravitationnel d'une manière naturelle.

2. Introduction à la relativité générale

2.1. **La philosophie.** La relativité générale est une théorie géométrique. Cela veux dire que dans cette théorie, il n'y a pas de concept de force comme dans la théorie de Newton. Les objets se déplacent le long des courbes spéciales appellées géodésiques. Le concept de géodésique est, grosso modo, une généralisation de l'idée de ligne droite. On sait que dans la théorie de Newton, les objets libres se déplacent le long des lignes droites. Quand une force agit sur un objet, cet objet va se déplacer le long d'une courbe. Dans la théorie d'Einstein, la gravitation n'agit pas sur les objets dans le champ gravitationnel directement par la force, mais il influence la forme des géodésiques. Quand il n'y pas de gravitation, les géodésiques sont les lignes droites. Quand il y a une gravitation non nulle, les géodésiques deviennent courbées.

2.2. **Equation d'Einstein.** Ici, nous supposons que le lecteur est familiarisé avec les notions de variété, fibré tangent, connexion, géodésique, métrique riemannienne, connexion de Levi-Civita et courbure riemannienne (consultez [4] par exemple). Soit $g_{\alpha\beta}$ la métrique inconnue, de type de Lorentz, i.e. sa signature est $(-,+,+,+)$. On note $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ la courbure de Riemann associée, $R^{\alpha\beta}$ la courbure de Ricci associée et R la courbure scalaire.

L'équation d'Einstein s'écrit

$$G_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \tag{1}$$

où $G_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'Einstein, défini par

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ s'apelle le tenseur énergie-impulsion. Il joue le rôle de source du champ gravitationnel. Sa forme précise dépend de la situation physique étudié. Par exemple, dans le cas où le champ électromagnétique joue le rôle de source, ce tenseur s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha}^{\lambda}F_{\beta\lambda} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}. \tag{3}$$

où F est le tenseur du champ électromagnétique. Dans le cas ma thèse, je suppose que ce tenseur s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\partial^\lambda\psi\partial_\lambda\psi \tag{4}$$

où ψ est un champ scalaire introduit par les cosmologistes.

Remarque 2.1. D'après les identités de Bianchi, le tenseur d'Einstein est un tenseur de divergence nulle. En prenant la divergence des deux membres de l'équation (1), on trouve

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{5}$$

En combinant cette equation avec la forme précise de $T_{\alpha\beta}$, on obtient un système d'évolution de la source sous l'action du champ gravitationnel. Par exemple si on choisit la forme (3), les équations (5) vont donner les équations de Maxwell.

2.3. **Formulation du problème de Cauchy.** La théorie de la relativité générale est une théorie non-quantique, donc il est raisonnable de considérer le problème d'évolution. Parce que la théorie de la relativité générale est une théorie géométrique, tous les résultats doivent être énoncés sous une forme indépendante d'un système de coordonnées, même si un système de coordonnées particulier est utilisé dans la preuve.

Définition 2.2 (de [6])**.** *Un ensemble de données initiales est un triplet* $(M, \bar{g}, K)$ *où* M *est une variété de dimension* N*,* $\bar{g}$ *est une métrique riemannienne sur* M *et* K *un tenseur symétrique de l'ordre* 2.

Une évolution d'un ensemble de données initiales $(M, \bar{g}, K)$ *est un espace-temps* (V, g) *tel qu'il existe un polongement* i *de* M *à* V *qui satisfait*

(*a*) *la métrique* $\bar{g}$ *est la restriction de* g *à* $i(M)$ *transportée par* i.

(*b*) *l'image de* K *est la seconde forme fondamentale de* $i(M)$ *comme sous-variété de* V.

Une évolution (V, g) *de* $(M, \bar{g}, K)$ *est dit Einsteinnienne si la métrique* g *sur* V *satisfait* (1)

Evidemment, il y a des contraintes géométriques sur les composantes de $\bar{g}$ et de K.

Dans notre cas, on va prendre M difféomorphe a $\mathbb{R}^3$. On utilise les coordonnées standard de $\mathbb{R}^3$. On peut noter les données initiales g_0, g_1 comme dans (10). Les contraintes géométriques se traduisent par un système elliptique sur g_0 et g_1. Par le théorème de la masse positive, un ensemble de données initiales non-nul possède au moins une décroissance $|x|^{-1}$ à l'infini spatial.

2.4. **Conditions de coordonnées.** Les équations (1) et (4) sont des équations géométriques, si on veut discuter l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions, on a besoin de fixer un système de coordonnées et écrire ces équations dans ce système, i.e., écrire les objets géométriques (courbures, dérivés covariantes etc..) en termes des dérivées normales par rapport aux coordonnées de ce système.

De plus, dans l'équation d'Einstein, la métrique inconnue a 16 composantes dont 10 sont indépendantes par la symétrie. On a aussi 10 équations scalaires pour ces 10 inconnues. Mais, à cause des identités de Bianchi, on n'a que 6 équations indépandantes. Donc on a besoin d'ajouter 4 équations supplémentaires. Ces 4 équations s'appellent les conditions de coordonnées. On va voir comment les trouver.

Prenons la trace de (1), on trouve

$$R = -T,$$

où T est la trace du tenseur $T^{\alpha\beta}$. Les indices sont montés et déscendus par la métrique $g^{\alpha\beta}$.

On substitue le R dans (1), il vient

$$R_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T.$$

Les termes principaux de l'équation (les termes contenant des dérivées du second ordre de $g_{\alpha\beta}$) sont contenus dans $R_{\alpha\beta}$. Après un calcul, on voit que

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(\partial g, g). \tag{6}$$

Ici,

$$\widetilde{\Box}_g = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta,$$
$$\Gamma_\alpha = \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\lambda'}$$

F est un terme quadratique, $F_{\mu\nu}(\partial g, g)$ ne contient pas de terme de dérivé du second ordre.

Dans les termes principaux, $\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu}$ est hyperbolique. Mais $(\partial_\mu \Gamma_\nu + \partial_\nu \Gamma_\mu)$ est un terme problématique. Il détruit l'hyperbolicité du système. Donc pour rendre cette équation hyperbolique, on peut choisir 4 conditions de coordonnées comme

$$\Gamma_\alpha = 0 \ \alpha = 0, 1, 2, 3 \tag{7}$$

Ces conditions de coordonnées s'apellent les conditions harmoniques. Un système de coordonnées qui satisfait les conditions harmoniques s'appelle un système de coordonnées harmoniques.

Dans un système de coordonnées harmonique, l'équation (1) s'écrit

$$\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\partial g, g). \tag{8}$$

Pour l'équation d'évolution du champ scalaire ψ, on a

$$\widetilde{\Box}_g \psi = 0. \tag{9}$$

Donc le problème de Cauchy associé aux equations d'Einstein dans des coordonnées harmonique s'écrit

$$\begin{cases} \widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\partial g, g) \\ \widetilde{\Box}_g \psi = 0 \\ g|_{t=0} = g_0 \ \psi|_{t=0} = \psi_0 \\ \partial_t g|_{t=0} = g_1 \ \partial_t \psi|_{t=0} = \psi_1 \end{cases} \tag{10}$$

Jusqu'à mantenant on ne sait pas si les coordonnées harmoniques existent. Mais si on démontre que (10) possède une unique solution qui préserve (7), on en déduit l'existence des coordonnées harmoniques. La première étape consiste à prouver la préservation de (7).

Supposons que les données initiales satisfont

$$\Gamma_\alpha|_{t=0} = 0 \;\; \partial_t\Gamma_\alpha|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

On veut savoir si, quand le système possède une solution de régularité suffisante, cette solution vérifie (7). En général, on a le résultat suivant (voir [6]).

Proposition 2.3 (Préservation des conditions harmoniques)**.** *Supposons que les données initiales satisfont* (11). *S'il existe une solution $g^{\alpha\beta}$ dans $C([0,T);H^s) \cap C^1([0,T);H^{s-1})$ (avec $s \geq n+3$ et $T > 0$) du problème* (10)*, alors la solution satisfait* (7)*.*

2.5. **Existence locale de l'équation d'Einstein.** Si $s \geq n+2$. Le sysème (10) est un système hyperbolique quasilinéaire du deuxième ordre. L'existence et l'unicité locale de solutions pour de tels systèmes est un résultat connu. En général, on a le théorème suivant (voir par exemple [3]).

Théorème 2.4. *Si $g_0\,\psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$; $g_1\,\psi_1 \in H^{s-1}$ alors le problème* (10) *possède une unique solution (g,ψ) dans $C([0,T);H^s) \cap C^1([0,T);H^{s-1})$. De plus, si les données initiales satisfont* (11)*, cette solution satisfait les conditions harmoniques* (7)*.*

3. Introduction à la théorie $f(R)$

3.1. **Formalisation lagrangienne.** En 1915, D. Hilbert a trouvé un principe variationnel pour l'équation d'Einstein. Il a introduit une fonctionnelle dépendant de la métrique. Si on prend la variation de cette fonctionnelle, on obtient l'équation d'Einstein. Cette action s'écrit

$$S[g] := \int R\,dV, \tag{12}$$

où R est la courbure scalaire, dV est l'élément de volume. $dV = \sqrt{-g}d^4x$.

On s'intéresse à une généralisation de (12), on considère l'action

$$S_f[g] := \int f(R)\,dV, \tag{13}$$

où f est une fonction connue, mais à préciser. Si on prend la variation de la fonctionnelle (13), on obtient à nouveau une équation d'évolution de l'espace-temps. Cette équation s'écrit

$$f'(R)R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}f(R)g_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta}\Box_g - \nabla_\alpha\nabla_\beta)f'(R) = T_{\alpha\beta} \tag{14}$$

On note $G_{\alpha\beta}[f]$ le membre de gauche de cette équation. C'est une généralisation du tenseur d'Einstein (si on prend $f(R) = R$, $G_{\alpha\beta}[f] = G_{\alpha\beta}$). De plus, $G_{\alpha\beta}[f]$ est aussi de divergence nulle (voir [1]). Cela veut dire

Proposition 3.1.

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta}[f] = 0. \tag{15}$$

Donc si on prend la divergence de (14), on aura aussi l'équation d'évolution (5) du champ scalaire ψ. Dans les sections suivantes on traite juste le cas où $\psi \equiv 0$ (le cas vide), i.e. le cas où dans l'espace-temps il n'y a pas de matière.

3.2. **Choix des conditions de coordonnées.** Maintenant on considère les mêmes problèmes sur l'équation de la théorie de $f(R)$.

Proposition 3.2. *Dans un système de coordonnées qui satisfait les conditions harmoniques* (7), *l'équation* (14) *se réduit à*

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}f'(R)\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} - \partial^2_{\mu\nu}f'(R) + g_{\mu\nu}\Box_g f'(R) \\ &= -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda f'(R) + \tfrac{1}{2}f'(R)F(\partial g, g) + \tfrac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{16}$$

On note $A_{\mu\nu}(g, \partial g, R)$ le membre de droite de (16).

Remarque 3.3. L'équation (16) est une équation du quatrième ordre. De plus les termes hessiens ($\partial^2_{\mu\nu}f'(R)$) sont non-hyperboliques. Par conséquent, les conditions harmoniques ne conviennent pas. On veut trouver un système de coordonnées dans lequel l'équation (14) se réduit à une équation hyperbolique du second ordre (si possible).

Pour trouver les bonnes conditions, on écrit la partie principale de (14) dans un système de coordonnées arbitraire

$$\begin{aligned} &f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box_g - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) \\ &= -\frac{1}{2}f'(R)\left(\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu\right) - \partial^2_{\mu\nu}f'(R) + g_{\mu\nu}\,\Box_g f'(R) + \text{termes d'ordre inférieur} \end{aligned}$$

On cherche quatre conditions sur les coordonnées pour que les termes hessiens s'en aillent. On peut supposer que

$$\frac{1}{2}f'(R)(\partial_\mu\Gamma_\nu + \partial_\nu\Gamma_\mu) - \partial^2_{\mu\nu}f'(R)$$

ne contient pas de terme d'ordre deux, on trouve que

$$\Gamma_\lambda = \frac{1}{f'(R)}\partial_\lambda f'(R). \tag{17}$$

3.3. **Préservation des conditions de coordonnées et existence locale.** Sous les conditions (17), l'équation (14) s'écrit

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}f'(R)\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box_g f'(R) \\ &-\tfrac{\partial_\mu f'(R)\partial_\nu f'(R)}{f'(R)} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda f'(R) + \tfrac{1}{2}f'(R)F(\partial g, g) - \tfrac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Mais c'est encore une équation du quatrième ordre. On considère le problème de Cauchy avec les données initiales suivantes

$$\begin{aligned} g|_{t=0} = g_0,\ g_t|_{t=0} = g_1 \\ R|_{t=0} = r_0,\ R_t|_{t=0} = r_1 \end{aligned} \tag{19}$$

Comme il n'y a pas de résultat général sur l'existence locale du problème de Cauchy associé aux systèmes du quatrième ordre, (18) n'est pas l'équation que l'on va prendre pour discuter l'existence locale. La stratégie consiste à considérer un système auxiliaire dont l'existence locale est déjà connue. Et puis montrer que toutes les solutions de ce système auxiliaire résolvent aussi l'équation originale.

On suppose que $f'(\cdot)$ est un difféomorphisme au voisinage de 0 et on note

$$f' \circ r = a + id$$

où $a = f'(0)$. Donc $r(\cdot)$ est aussi un difféomorphisme au voisinage de 0.

On considère le système suivant comme système auxiliaire,

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}(u+a)\,\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,\widetilde{\Box}_g u \\ &-\tfrac{\partial_\mu u \partial_\nu u}{u+a} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda u + \tfrac{1}{2}(u+a)F(\partial g, g) - \tfrac{1}{2}f(r(u))g_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

et

$$3\,\Box_g u + (u+a)\,r(u) - 2\,f(r(u)) = 0, \tag{21}$$

avec les données initiales

$$\begin{aligned} &g(0,x) = g_0(x), \quad g'_t(0,x) = g_1(x), \\ &u(0,x) = u_0(x) = f'(r_0) - a, \quad u'_t(0,x) = f''(r_0(x))r_1(x) \end{aligned} \tag{22}$$

et les contraintes

$$\Gamma_\lambda - \frac{1}{f'(R)}\partial_\lambda f'(R)|_{t=0} = 0. \tag{23}$$

Avec ce système auxiliaire, dans [1] on a démontré :

Théorème 3.4 (Existence locale dans les coordonnées harmoniques généralisées)**.** *Supposons que les données initiales* $(g_0, g_1) \in H^{s+1} \times H^s$ *et* $(R_0, R_1) \in H^{s+1} \times H^s$ *avec* $|g_0 - m| \leq 1/2$*,* $f'(R_0) \leq 1/4$ *et* $s \geq n+3$*. Alors, il existe* $T > 0$ *tel que le système d'équations* (18) *admet une solution unique*

$$g \in C([0,T]; H^{s+1}) \cap H^1([0,T]; H^s),$$

satisfaisant (17)*. De plus, la courbure scalaire satisfait*

$$R = R(g) \in C([0,T]; H^{s+1}) \cap H^1([0,T]; H^s).$$

Remarque 3.5. Si on regarde la preuve de (3.4), on voit que $r(u)$ joue le role de R. Dans les discussions suivantes, on va prendre plutôt (20)-(23) que (18) et (19).

4. Problèmes à résoudre pendant ma thèse

4.1. **Introduction : Existence globale d'un système quasilinéaire hyperbolique.** Une fois qu'on a établi l'existence locale par le théorème 3.4, il est naturel de poser la question de l'existence globale : est-ce que la solution locale va s'étendre sur $[0, \infty)$?

La méthode utilisée pour établir l'existence globale s'appelle "boot strap". On va s'appuyer sur un résultat d'existence globale du problème de Cauchy pour un système hyperbolique quasilinéaire (voir par exemple [3]).

On note $u' = (\partial_0 u, \ldots, \partial_n u)$ et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ avec $\sum_1^n \alpha_i = |\alpha|$.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} g^{jk}(u,u')\partial_j\partial_k u = F(u,u'), \\ u(0,\cdot) = f, \;\; \partial_0 u(0,\cdot) = g. \end{cases} \tag{24}$$

On suppose que g^{jk} et F sont C^∞ et toutes leurs dérivées sont bornées. On suppose aussi que $F(0,0) = 0$ et

$$\sum |g^{jk} - g_0^{jk}| < 1/2,$$

où g_0^{jk} sont les coefficients du d'Alembertien.

Théorème 4.1. *Soit* $s \geq n+2$*. Si* $(f,g) \in H^{s+1} \times H^s$*, alors il existe un* $T > 0$ *dependant de la taille des données initiales tel que le problème de Cauchy* (24) *possède une unique solution satisfaisant*

$$\sum_{|\alpha| \leq s+1} ||\partial^\alpha u(t,\cdot)||_{L^2} \leq \infty. \tag{25}$$

De plus, si $T_* < \infty$ est la borne supérieure de tous ces T, alors

$$\sum_{|\alpha|\leq (s+3)/2} |\partial^\alpha u(t,x)| \notin L^\infty\big([0,T_*)\times\mathbb{R}^n\big). \tag{26}$$

(26) caractérise le temps maximal d'existence de la solution. Si on peut trouver une constante C suffisammment grande telle que

$$\sum_{|\alpha|\leq (s+3)/2} |\partial^\alpha u(t,x)| \leq C, \tag{27}$$

on verra que la solution s'étend à $[0,\infty)$.

Pour démontrer (27), on considère un problème de Cauchy associé à un système quasilinéaire, dont l'existence locale est connue. Pour une donnée initiale petite, on suppose que la solution locale u satisfait

$$\sum_{|\alpha|\leq (s+3)/2} |\partial^\alpha u(t,x)| \leq C$$

sur $[0,T]$ avec un C suffisamment grand à déterminer. Puis on prend cette hypothèse et on fait des estimations sur u en espérant que $u < C/2$. On conclut que $T=\infty$.

4.2. **L'Existence globale pour l'équation d'Einstein.** Dans [2], Lindblad et Rodnianski ont démontré, par la méthode de boot strap, qu'avec des bonnes hypothèses sur les données initiales (petitesse, décroissance rapide), on a l'existence d'un espace-temps géodésiquement complet. L'objet de mon mémoire de M2 était d'utiliser cette méthode sur le système de la gravité $f(R)$.

Modulo une étape géométrique, le resultat pricipal de [2] est un résultat d'existence globale du système hyperbolique quasilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\Box}_g g_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(g,\partial g), \\ \Gamma^\alpha = 0, \\ g|_{t=0} = g_0, \quad g'_t|_{t=0} = g_1. \end{cases} \tag{28}$$

Ici le terme $F_{\alpha\beta}$ est défini par (6).

On introduit les champs de vecteur de Minkowski Z,

$$Z \in \big\{\partial_\alpha,\ x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha,\ x^\alpha\partial_\alpha\big\}.$$

Décomposons g,

$$g = \delta + h^0 + h^1, \quad \text{où} \quad h^0_{ij} = \chi(r)\frac{M}{r}\delta_{ij},$$

et introduisons aussi une energie avec un poid,

$$\mathcal{E}_N(t) = \sum_{|I|\leq N} ||w^{1/2}\partial Z^I h^1(t,\cdot)||_{L^2},$$

ici

$$w^{1/2} = \begin{cases} (1+|r-t|)^{1/2+\gamma}, & r>t; \\ 1, & r\leq t. \end{cases}$$

Maintenant on énonce l'existence globale pour (28),

Théorème 4.2. *Il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et si les données initiales $(h^1|_{t=0},\ \partial_t h^1|_{t=0})$ sont lisses et satisfont les conditions :*

$$\mathcal{E}_N(0) + M \leq \varepsilon$$

et

$$\liminf_{|x|\to\infty} |h^1(0,x)| \to 0,$$

alors la solution $h(t)$ de (28) s'étend à $[0,\infty)$ en satisfaisant

$$\mathcal{E}_N(t) \leq C_N \varepsilon (1+t)^{c\varepsilon}$$

où C_N est une constant qui ne dépend que de N et c une constante indépendante de ε.

Ici on a demandé de plus que le système de coordonnées est harmonique. C'est parce que les conditions harmoniques vont jouer un rôle important dans la démostration.

4.3. **Formalisation du problème et transformation conforme.** Le problème que j'étudie pendant ma thèse est le même problème pour l'équation (14). Plus précisement, on veut démontrer un analogue du théorème 4.2, en remplaçant le mot "équation d'Einstein" par "équation de $f(R)$".

De même façon, on peut écrir un résultat qui est analogue de 4.2. On ajoute aussi les conditions harmoniques, en souhaitant qu'ils vont nous aider dans les estimations.

Malheureusement, les bonnes conditions de coordonnée pour (14) sont les conditions harmoniques généralisées. Pour résoudre cette difficulté, on introduit une transformation conforme (voir [1]).

L'idée est de considérer une autre métrique $\widetilde{g}_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta}$, où p est une fonction positive appelée facteur conforme. Dans [1] il est démontré que si on prend

$$p = f'(R), \tag{29}$$

les conditions harmoniques généralisées se transforment en

$$\widetilde{\Gamma}^\lambda = 0.$$

Ici, $\widetilde{\Gamma}$ désigne les symboles de Christoffel associés à la métrique $\widetilde{g}$.

L'équation (17) devient

$$\widetilde{R}_{\mu\nu} = \frac{3}{2}p^{-2}\partial_\mu p \partial_\nu p - \frac{1}{2}p^{-2}(f(R_g) - pR_g)\widetilde{g}_{\mu\nu}. \tag{30}$$

R_g est la courbure scalaire associé à la métrique g. p et R_g sont liés par (29).

On a démontré l'existence de solutions au problème de Cauchy associé à (18) avec (19). Donc on sait que le problème de Cauchy de (29) avec les données initiales transformés de (19) possède aussi une unique solution.

On peut aussi transformer (20)-(23). Cela nous donne un système auxiliaire du 2$^{\text{ème}}$ ordre dont la solution résout aussi (30), ce qui est important dans la discussion de l'existence globale.

$$\widetilde{\Box}_g g_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - 3(u+a)^{-2}\partial_\mu u \partial_\nu u + (u+a)^{-2}(f(r(u)) - (u+a)r(u))g_{\mu\nu}, \tag{31}$$

$$\widetilde{\Box}_g u - (u+a)^{-1}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu u \partial_\nu u + \frac{1}{3}(2f(r(u)) - (u+a)r(u))\right) = 0, \tag{32}$$

avec les données initiales

$$\begin{array}{ll} \widetilde{g}(0,x) = \frac{g_0(x)}{f'(r_0(x))} \quad \widetilde{g}'_t(0,x) = \frac{g_1(x)}{f'(r_0(x))} - \frac{g_0(x)f''(r_0(x))r_1(x)}{(f'(r_0(x))^2} \\ u(0,x) = u_0(x) = f'(r_0(x)) - a, \quad u'_t(0,x) = u_1(x) = f''(r_0(x))r_1(x) \end{array} \tag{33}$$

et les contraintes

$$\widetilde{\Gamma^\lambda} = 0. \tag{34}$$

L'équation (30) et ce système auxiliaire sont liés par

$$p = u + a, \quad R_g = r(u). \tag{35}$$

Remarque 4.3. Ce que l'on a trouvé dans [1] s'appelle la jauge de Jordan, qui a déjà été discutée par beaucoup de mathématiciens et physiciens. La signification physique de la transformation conforme est la suivante. On voit $\widetilde{g}$ comme la métrique physique, i.e. celle qui décrit la géométrie de l' espace-temps. En comparant (30) et

$$R_{\mu\nu} = 0$$

qui est l'équation d'Einstein dans le vide, on voit que même dans le vide, la théorie de $f(R)$ prédit qu'il y a une source

$$\frac{3}{2}p^{-2}\partial_\mu p \partial_\nu p - \frac{1}{2}p^{-2}(f(R_g) - pR_g)\widetilde{g}_{\mu\nu},$$

tandis que la théorie d'Einstein dit qu'il n'y a pas de source. C'est cette source qui joue le rôle de l'énergie sombre. En quelque sorte, le vide n'est pas vraiment "vide". Il fournit aussi la source gravitationnelle.

4.4. **Difficultés principales.** Si on linéarise l'équation (32), il vient

$$\Box u + r'(0)u = 0, \tag{36}$$

avec $r'(0) = \frac{1}{f''(0)}$. Si on suppose que $r'(0) < 0$, (36) devient l'équation de Klein-Gordon dont la solution possède une décroissance suffisamment rapide. Cela veut dire que (32) devient une équation de Klein-Gordon perturbée par des termes du deuxième ordre. Dans ce cas on peut espérer que u décroît suffisament vite. Dans [5] S. Klainerman a démontré que si on remplace dans (32) la métrique g par la métrique de Minkowski, $||u||_{L^\infty}$ décroît à la vitesse $t^{-5/4}$. Cette vitesse nous suffit quand on discute les termes de deuxième ordre de u dans (31)(les autre termes du deuxième ordre peuvent être traités par la même méthode que dans [2]).

Des difficultés apparaissent quand on veut généraliser la méthode de [5] dans un espace-temps courbé. Si on sépare la partie courbe de manière suivante

$$\widetilde{\Box}_g u = \Box u + h^{\alpha\beta}\partial^2_{\alpha\beta}u$$

et on considère le deuxième terme du côté droit comme une perturbation, alors la méthode de Klainerman ne s'applique pas parce que h ne possède pas de décroissance suffisamment rapide.

De plus, quand on discute la décroissance de l'équation d'onde quasilinéaire, on a besoin d'utiliser les champs de vecteurs de Minkowski (voir [2]) mais quand on discute l'équation de Klein-Gordon perturbée, le champ de vecteur $S = x^i\partial_i$ ne s'applique plus. Comment trouver une démonstration du théorème sans utiliser S est la deuxième difficulté.

Références

[1] Ph. Le Floch and Y. Ma, *Nearyl global existence for Cauchy problem of $f(R)$ gravity with the small initil data* .

[2] H. Lindblad and I. Rodnianski, *The global stability of Minkowski spacetime in wave gauge, Ann. Math. (to appear).*

[3] C. D. Sogge, *Lectures on Non-Linear Wave Equations (second edition), International Press of Boston, Inc. 2008*

[4] I. Chavel, *Riemannian Geometry A Modern Introduction (Second Edition), Cambridge University Press, 2006*

[5] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equation in four space-time dimensions, Comm, Pure Appl. Math.* ***38*** *(1985), 631-641.*

[6] Y. Choquet-Bruhat, *General relativity and the Einstein equations, Oxford University Press Inc., 2009.*